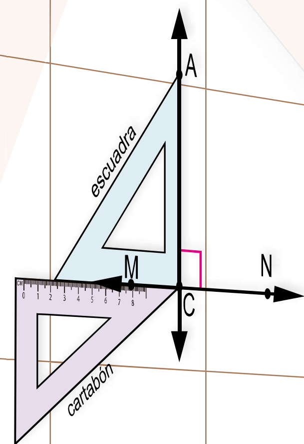
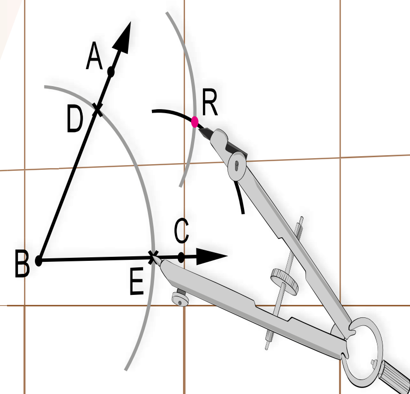
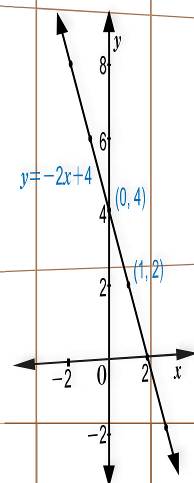
MATEMÁTICA 9

Noveno grado







Libro de Texto

Educación Secundaria

Gobierno de Reconciliación y Unidad Nacional
El Pueblo, Presidente!
UNIDA, NICARAGUA TRIUNFA!

MINED
Un Ministerio en la Comunidad

JICA

9no

COORDINACIÓN GENERAL

Profesora María Elsa Guillén
Profesora Melba López Montenegro
Profesor Julio César Canelo Castillo

AUTORES

Alberto Leonardo García Acevedo
Juan Carlos Caballero López
Anastacio Benito González Funes

REVISIÓN Y ASESORÍA TÉCNICA CIENTÍFICA

Sociedad Matemática de Nicaragua
Profesora Gloria Parrilla Rivera
Profesor Jorge Alberto Velásquez Benavidez

COLECTIVO DE AUTORES

MINED

Francisco Emilio Díaz Vega
Humberto Antonio Jarquín López
Juan Carlos Caballero López
Gregorio Isabel Ortiz Hernández
Alberto Leonardo García Acevedo

UNAN - MANAGUA

Nubia Aracelly Barreda Rodríguez
Melissa Lizbeth Velásquez Castillo
Armando José Huete Fuentes
Primitivo Herrera Herrera
Marlon José Espinoza Espinoza

UNAN - LEÓN

Anastacio Benito González Funes
Domingo Felipe Aráuz Chévez
Célfida del Rosario López Sánchez
Orlando Antonio Ruiz Álvarez
Hilario Ernesto Gallo Cajina

INSTITUTOS QUE PARTICIPARON EN LA VALIDACIÓN

Colegio Clementina Cabezas, Managua, Managua
Colegio Fernando Gordillo, Managua, Managua
Colegio Tomas Borge, Mateare, Managua
Colegio San Cayetano, San Rafael del Sur, Managua
Instituto Nacional La Salle, Diriamba, Carazo
Instituto Juan José Rodriguez, Jinotepe, Carazo
San Benito #1, Chinandega, Chinandega
Instituto Nacional Rubén Darío, Posoltega, Chinandega
Jhon F. Kenedy, León, León
Salomón de la Selva, León, León

EQUIPO DE DIAGRAMACIÓN

Lissette Margina Serrano Vallecillo • Grettel Mercedes Moran Pineda • Maribel del Socorro Cuarezma López

Primera Edición, 2019

Cooperación Técnica de Japón a través de la Agencia de Cooperación Internacional del Japón (JICA)

La presente publicación ha sido reproducida con el apoyo de la Agencia de Cooperación Internacional del Japón (JICA) a través del Proyecto para el Aprendizaje Amigable de Matemática en Educación Secundaria (NICAMATE).

PRESENTACIÓN

Estimado estudiante:

El texto que tienes en tus manos es un esfuerzo realizado en el marco del **“Proyecto para el Aprendizaje Amigable de Matemática en Educación Secundaria” (NICAMATE)**, implementado por el Ministerio de Educación en coordinación con la UNAN – MANAGUA, UNAN – LEÓN, y el apoyo técnico de la Agencia de Cooperación Internacional del Japón (JICA).

La matemática es una herramienta potente en el desarrollo de cada una de nuestras vidas; nos ayuda a resolver problemas complejos con mayor facilidad, a contar con un razonamiento matemático capaz de ser crítico, analítico y práctico. En definitiva, a vivir con éxito, en un mundo cada vez más desafiante ante los cambios sociales y los avances tecnológicos.

Cada contenido de este libro, es abordado de manera que resulta fácil de comprender, y con el apoyo de tu docente lograrás adquirir conceptos y procedimientos matemáticos, necesarios para el desarrollo de conocimientos y habilidades que favorecen tu formación integral.

Tenemos la certeza que tu encuentro con estos saberes será muy satisfactorio, ya que este libro ha sido elaborado por un equipo altamente calificado que nos plantea una metodología amigable, retadora y exigente, con el propósito de que los conocimientos matemáticos te enriquezcan, sean mejor entendidos y puedan integrarse en tus quehaceres cotidianos con mayor facilidad.

Mucho ánimo ya que contamos contigo para desarrollar una mejor Nicaragua.

Atentamente,

Ministra de Educación
Miriam Soledad Raudez

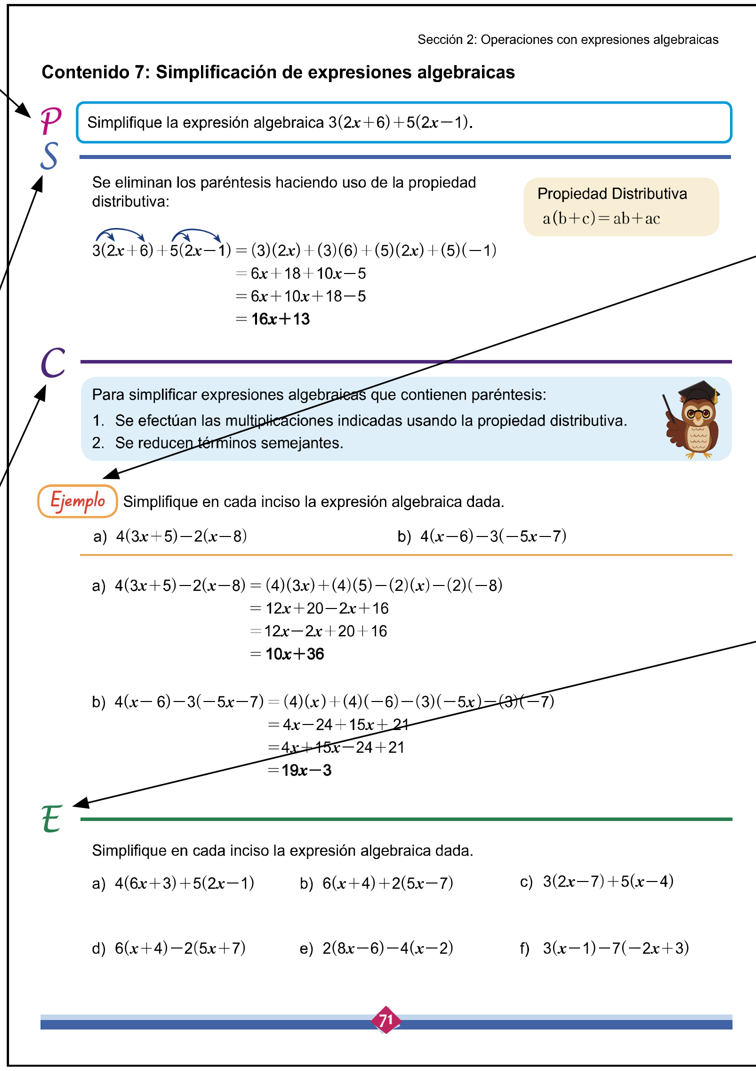
INTRODUCCIÓN

En cada página del libro de texto se presentan los momentos de una clase de 45 minutos:

P Representa el problema inicial, el cual se debe leer y analizar identificando las condiciones que plantea y lo que se pregunta.

S Representa la solución del problema inicial explicada paso a paso.

C Representa la conclusión de la clase, donde se propone el esquema de solución del problema inicial, en algunos casos también se presentan conceptos importantes usados en el problema.



Sección 2: Operaciones con expresiones algebraicas

Contenido 7: Simplificación de expresiones algebraicas

P

Simplifique la expresión algebraica $3(2x+6)+5(2x-1)$.

S

Se eliminan los paréntesis haciendo uso de la propiedad distributiva:

Propiedad Distributiva
$a(b+c)=ab+ac$

$$\begin{aligned} 3(2x+6)+5(2x-1) &= (3)(2x)+(3)(6)+(5)(2x)+(5)(-1)\\ &= 6x+18+10x-5\\ &= 6x+10x+18-5\\ &= \mathbf{16x+13} \end{aligned}$$

C

Para simplificar expresiones algebraicas que contienen paréntesis:
1. Se efectúan las multiplicaciones indicadas usando la propiedad distributiva.
2. Se reducen términos semejantes.

Ejemplo Simplifique en cada inciso la expresión algebraica dada.

a) $4(3x+5)-2(x-8)$ b) $4(x-6)-3(-5x-7)$

a) $$\begin{aligned} 4(3x+5)-2(x-8) &= (4)(3x)+(4)(5)-(2)(x)-(2)(-8)\\ &= 12x+20-2x+16\\ &= 12x-2x+20+16\\ &= \mathbf{10x+36} \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 4(x-6)-3(-5x-7) &= (4)(x)+(4)(-6)-(3)(-5x)-(3)(-7)\\ &= 4x-24+15x+21\\ &= 4x+15x-24+21\\ &= \mathbf{19x-3} \end{aligned}$$

E

Simplifique en cada inciso la expresión algebraica dada.

a) $4(6x+3)+5(2x-1)$ b) $6(x+4)+2(5x-7)$ c) $3(2x-7)+5(x-4)$

d) $6(x+4)-2(5x+7)$ e) $2(8x-6)-4(x-2)$ f) $3(x-1)-7(-2x+3)$

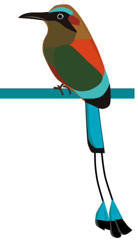
71

Ejemplo
Los ejemplos que se presentan son variantes del problema inicial.

E Representa los ejercicios propuestos, es importante que intenten resolver los ejercicios por ustedes mismos.

En **Comprobemos lo aprendido** se presentan una serie de ejercicios representativos de contenidos anteriores, el objetivo de estas clases es asegurar un tiempo de ejercitación que permita afianzar los conocimientos adquiridos y aclarar cualquier duda que puedan tener de los contenidos estudiados.

En ***Desafío*** se presentan casos especiales o contenidos de mayor complejidad.



Índice

Unidad 1

Productos Notables y Factorización

Sección 1: Multiplicación de polinomios

Contenido 1: Multiplicación de monomio por binomio

P Efectúe el producto $x(x+3)$.

S

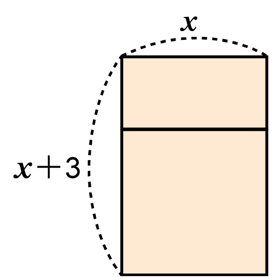
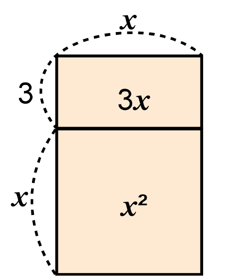
Se multiplica el monomio x por cada término del binomio $(x+3)$.

$$x(x+3)=x\cdot x+x(3)$$
$$=\boldsymbol{x^2+3x}$$

$x\cdot x=x^2$

Otra forma

A partir del área de un rectángulo, se encontrará el producto $x(x+3)$.

Fórmula del área de un rectángulo: (base)×(altura)		
Área de rectángulo	$x(x+3)$ =	$\boldsymbol{x^2+3x}$

C

Para calcular el producto de un monomio por un binomio, se multiplica el monomio por cada término del binomio.
Es decir, si a es un monomio y $b+c$ un binomio, entonces

$$a(b+c)=ab+ac \qquad (a+b)c=ac+bc$$

Ejemplo Efectúe los siguientes productos:

a) $x(x-2)$ b) $x(2x+3)$ c) $-x(x+3)$

Se aplica la propiedad distributiva, conmutativa y la ley de los signos.

a) $x(x-2)=x\cdot x-x(2)$
$=\boldsymbol{x^2-2x}$

b) $x(2x+3)=x(2x)+x(3)$
$=\boldsymbol{2x^2+3x}$

c) $-x(x+3)=-x\cdot x+(-x)(3)$
$=\boldsymbol{-x^2-3x}$

E Efectúe los siguientes productos:

a) $x(x+5)$ b) $x(4x-3)$ c) $2x(x+3)$

d) $3x(2x-1)$ e) $-x(x+2)$ f) $-3x(x-1)$

g) $(x-6)x$ h) $(3x+5)(4x)$ i) $(2x-7)(-5x)$

Contenido 2: Multiplicación de binomio por binomio

P Efectúe el producto $(x+2)(y+3)$.

S

Para efectuar el producto $(x+2)(y+3)$, se utiliza la distributividad realizando lo siguiente:

1. Se multiplica cada término del binomio $x+2$ por el binomio $y+3$, de la siguiente manera:

$$(x+2)\boxed{(y+3)}=x(y+3)+2(y+3)$$

2. Se aplica la propiedad distributiva en los productos indicados obtenidos en el paso anterior:

$$\begin{aligned}(x+2)(y+3)&=x(y+3)+2(y+3)\\&=xy+x(3)+(2)y+(2)(3)\\&=\mathbf{xy+3x+2y+6}\end{aligned}$$

C

Para calcular el producto de dos binomios, se multiplica cada término de un binomio por cada término del otro.

En símbolos,

$$(a+b)(c+d)=\underset{\textcircled{1}}{ac}+\underset{\textcircled{2}}{ad}+\underset{\textcircled{3}}{bc}+\underset{\textcircled{4}}{bd}$$

Ejemplo Efectúe los siguientes productos:

a) $(x-3)(y+4)$ b) $(x+2y)(3x+4y)$

a) $$\begin{aligned}(x-3)(y+4)&=xy+x(4)+(-3)y+(-3)(4)\\&=\mathbf{xy+4x-3y-12}\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}(x+2y)(3x+4y)&=x(3x)+x(4y)+2y(3x)+2y(4y)\\&=3x^2+4xy+6xy+8y^2\\&=\mathbf{3x^2+10xy+8y^2}\end{aligned}$$

E

Efectúe los siguientes productos:

a) $(x+4)(y+5)$ b) $(x+2)(y-3)$ c) $(x+6)(3y+1)$

d) $(x+7)(5y-6)$ e) $(x+3y)(2x+5y)$ f) $(5x+4y)(7x-3y)$

Contenido 3: Multiplicación de binomio por trinomio de forma horizontal

P

Efectúe el producto $(x+2)(x+y+3)$ de forma horizontal.

S

Para efectuar el producto $(x+2)(x+y+3)$ se realiza lo siguiente:

1. Se multiplica cada término del binomio $x+2$ por el trinomio $x+y+3$:

$$(x+2)\boxed{(x+y+3)}=x(x+y+3)+2(x+y+3)$$

2. Se aplica la propiedad distributiva en los productos indicados que se obtuvieron en el paso anterior,

$$\begin{aligned}(x+2)(x+y+3)&=x(x+y+3)+2(x+y+3)\\&=x\cdot x+xy+x(3)+(2)x+(2)y+(2)(3)\\&=x^2+xy+3x+2x+2y+6\\&=\mathbf{x^2+xy+5x+2y+6}\end{aligned}$$

C

Para calcular el producto de un binomio por un trinomio, se multiplica cada término del binomio por cada término del trinomio.

$$(a+b)(c+d+e)=\underset{①}{ac}+\underset{②}{ad}+\underset{③}{ae}+\underset{④}{bc}+\underset{⑤}{bd}+\underset{⑥}{be}$$

Ejemplo Efectúe los siguientes productos de forma horizontal:

a) $(x+2)(x+y-5)$ b) $(2x+1)(3x+y+4)$

a) $$\begin{aligned}(x+2)(x+y-5)&=x\cdot x+x\cdot y+x(-5)+(2)(x)+(2)(y)+(2)(-5)\\&=x^2+xy-5x+2x+2y-10\\&=\mathbf{x^2+xy-3x+2y-10}\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}(2x+1)(3x+y+4)&=2x(3x)+2x(y)+2x(4)+(1)(3x)+(1)(y)+(1)(4)\\&=6x^2+2xy+8x+3x+y+4\\&=\mathbf{6x^2+2xy+11x+y+4}\end{aligned}$$

E

Efectúe los siguientes productos de forma horizontal:

a) $(x+4)(x+y+5)$

b) $(x+3)(x+y-7)$

c) $(3x+1)(2x+y+9)$

d) $(3x-1)(2x-y+6)$

Contenido 4: Multiplicación de binomio por trinomio de forma vertical

P

Efectúe el producto $(x+2)(x+y+3)$ de forma vertical.

S

Existe un esquema vertical para efectuar la multiplicación de polinomio por polinomio, en el que se visualizan mejor los resultados de las multiplicaciones de términos. A continuación se muestran los pasos a seguir:

Se escribe el trinomio $x+y+3$, y debajo de este el binomio $x+2$. Luego se traza un segmento horizontal.

$$\begin{array}{rr} & x+y+3 \\ \times & x+2 \\ \hline \end{array}$$

Se multiplica la x del binomio por cada término del trinomio, obteniendo $x^2+xy+3x$, el cual se escribe debajo del segmento horizontal.

$$\begin{array}{rl} & x+y+3 \\ \times & x+2 \\ \hline & x^2+xy+3x \end{array}$$

Se multiplica el 2 del binomio por cada término del trinomio obteniendo $2x+2y+6$ que se coloca debajo de $x^2+xy+3x$ pero respetando la semejanza de términos, luego se suman los términos de cada columna.

A la par se muestra el esquema operativo.

$$\begin{array}{rllll} & & x+y+3 & & \\ \times & & x+2 & & \\ \hline & x^2+xy & +\boxed{3x} & & \\ + & & \boxed{2x} & +2y & +6 \\ \hline & \mathbf{x^2+xy} & \mathbf{+5x} & \mathbf{+2y} & \mathbf{+6} \end{array}$$

C

Para efectuar el producto de un binomio por un trinomio de forma vertical:

1. Se coloca de primero el trinomio.
2. Se multiplica cada uno de los términos del binomio por cada término del trinomio aplicando la propiedad distributiva y la ley de los signos.
3. Se suman términos semejantes si los hay.

Ejemplo Efectúe el producto $(x-3)(x-2y+5)$ de forma vertical.

$$\begin{array}{rllll} & x-2y+5 & & & \\ \times & x-3 & & & \\ \hline & x^2-2xy & +5x & & \\ + & & -3x & +6y & -15 \\ \hline & \mathbf{x^2-2xy} & \mathbf{+2x} & \mathbf{+6y} & \mathbf{-15} \end{array}$$

E

Efectúe los siguientes productos de forma vertical:

a) $(x+1)(x+y+5)$

b) $(x+5)(x+y-3)$

c) $(x-4)(x-3y+7)$

d) $(x-6)(x-4y-8)$

Contenido 5: Comprobemos lo aprendido 1

E

Efectúe los siguientes productos de:

1. Monomio por binomio:

a) $x(x+7)$

b) $3x(4x+5)$

c) $-x(x-2)$

d) $-5x(2x-7)$

2. Binomio por binomio:

a) $(x+3)(y+5)$

b) $(x+2)(y-4)$

c) $(x+8)(4y-6)$

d) $(2x-1)(4y+9)$

3. Binomio por trinomio, de forma horizontal:

a) $(x+5)(x+y+8)$

b) $(x-1)(x+2y-3)$

c) $(2x+5y)(7x+8y+9)$

d) $(3x-4y)(5x-6y+2)$

4. Binomio por trinomio, de forma vertical:

a) $(x+5)(x+y+9)$

b) $(x-7)(x-6y+8)$

Sección 2: Productos notables

Contenido 1: Producto de dos binomios de la forma $(x+a)(x+b)$ (1)

P

Efectúe el producto $(x+1)(x+2)$.

S

Para desarrollar el producto $(x+1)(x+2)$, se realiza lo siguiente:

$$(x+1)\boxed{(x+2)}=x(x+2)+1(x+2)$$ Se multiplica cada término del binomio $x+2$ por el binomio $x+1$

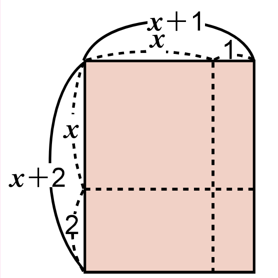
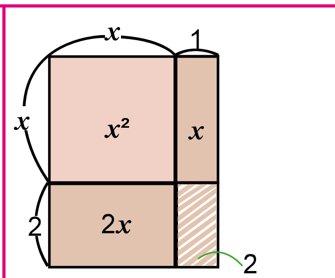
$$=x\cdot x+x(2)+x+2$$ Se aplica la multiplicación de monomio por binomio en las multiplicaciones

$$=x^2+2x+x+2$$

$$=\mathbf{x^2+3x+2}$$ Se simplifican los términos semejantes

Otra forma:

A partir del área de un rectángulo, se encontrará el producto $(x+1)(x+2)$

Fórmula del área del rectángulo: (base) $\times$ (altura)		
Área del rectángulo	$(x+1)(x+2)=x^2+x+2x+2=\mathbf{x^2+3x+2}$	

C

El producto de dos binomios de la forma $(x+a)(x+b)$ se desarrolla de la siguiente forma:

$$(x+a)(x+b)=x^2+bx+ax+ab$$
$$=x^2+\underbrace{(a+b)}_{\text{Suma de } a \text{ y } b}x+\underbrace{ab}_{\text{Producto de } a \text{ y } b}$$

Fórmula 1 $\quad (x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

Ejemplo Desarrolle los siguientes productos:

a) $(x+3)(x+2)$

b) $\left(x+\frac{1}{5}\right)\left(x+\frac{3}{5}\right)$

En ambos casos se hace uso de la fórmula 1.

a) $(x+3)(x+2)=x^2+(3+2)x+(3)(2)$
$=\mathbf{x^2+5x+6}$

b) $\left(x+\frac{1}{5}\right)\left(x+\frac{3}{5}\right)=x^2+\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{5}\right)x+\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)$
$=\mathbf{x^2+\frac{4}{5}x+\frac{3}{25}}$

E

Efectúe los siguientes productos:

a) $(x+5)(x+8)$

b) $(x+6)(x+2)$

c) $(y+4)(y+3)$

d) $(y+7)(y+9)$

e) $\left(x+\frac{1}{4}\right)\left(x+\frac{3}{4}\right)$

f) $\left(y+\frac{2}{3}\right)\left(y+\frac{5}{6}\right)$

Contenido 2: Producto de dos binomios de la forma $(x+a)(x+b)$ (2)

Ejemplo 1 Efectúe el producto $(x+3)(x-4)$.

$x-b=x+(-b)$

Para efectuar el producto $(x+3)(x-4)$ se observa que la diferencia con el caso anterior es el signo $-$ en el binomio $x-4$, pero este se puede reescribir como una suma. Entonces

$(x+3)(x-4)=(x+3)[x+(-4)]$ Se reescribe $x-4$ como una suma

$=x^2+[3+(-4)]x+(3)(-4)$ Se aplica la fórmula 1

$=\mathbf{x^2-x-12}$

Ejemplo 2 Efectúe el producto $(x-3)(x-2)$.

Se procede con los pasos señalados en el ejemplo anterior:

$(x-3)(x-2)=[x+(-3)][x+(-2)]$ Se reescriben los binomios como sumas

$=x^2+[(-3)+(-2)]x+(-3)(-2)$ Se aplica la fórmula 1

$=\mathbf{x^2-5x+6}$

E

Efectúe los siguientes productos aplicando la fórmula 1:

a) $(x+5)(x-7)$ b) $(y+2)(y-3)$ c) $(x-6)(x+4)$

d) $(y-9)(y+5)$ e) $(x-7)(x-6)$ f) $(y-8)(y-5)$

Contenido 3: Producto de dos binomios de la forma $(ax+b)(cx+d)$

P

Efectúe el producto $(2x+1)(x+3)$.

S

Para efectuar el producto $(2x+1)(x+3)$, se multiplica cada término de $2x+1$ por cada término de $x+3$, tal como indican las flechas de la ilustración:

$$\begin{aligned}(2x+1)(x+3) &= 2x^2+6x+x+3\\ &= \mathbf{2x^2+7x+3}\end{aligned}$$

Los coeficientes 2, 7 y 3 se pueden expresar como $2=(2)(1)$, $7=(2)(3)+(1)(1)$, $3=(1)(3)$ sustituyendo en la expresión anterior se tiene

$$(2x+1)(x+3)=(2)(1)x^2+[(2)(3)+(1)(1)]x+(1)(3)=2x^2+7x+3$$

Se observa que el término cuadrático $2x^2$ se obtuvo multiplicando $2x$ por x, el término lineal $7x$, resultado de multiplicar $(2)(3)+(1)(1)$ por x y el término 3, es el producto de 1 por 3.

C

El producto de la forma $(ax+b)(cx+d)$ se desarrolla de la siguiente manera:

Fórmula 2 $\quad (ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

Ejemplo Efectúe los siguientes productos:

a) $(2x+1)(3x-2)$

b) $(3x-2)(2x-1)$

En ambos casos se utiliza la fórmula 2.

a) $$\begin{aligned}(2x+1)(3x-2) &= (2x+1)[3x+(-2)]\\ &= (2)(3)x^2+[(2)(-2)+(1)(3)]x+(1)(-2)\\ &= \mathbf{6x^2-x-2}\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}(3x-2)(2x-1) &= [3x+(-2)][2x+(-1)]\\ &= (3)(2)x^2+[(3)(-1)+(-2)(2)]x+(-2)(-1)\\ &= \mathbf{6x^2-7x+2}\end{aligned}$$

E

Efectúe los siguientes productos utilizando la fórmula 2:

a) $(3x+1)(x+4)$

b) $(2x+3)(4x+1)$

c) $(2x-1)(x+5)$

d) $(2x+3)(3x-5)$

e) $(3x-1)(x-4)$

f) $(2x-3)(3x-4)$

Contenido 4: Cuadrado de la suma de dos términos $(x+a)^2$

P

Efectúe el producto $(x+3)^2$.

S

Dado que $(x+3)^2=(x+3)(x+3)$, entonces $(x+3)^2$ se puede calcular utilizando el producto indicado de la forma $(x+a)(x+b)$ suponiendo que $a=b=3$.

$(x+a)^2 \neq x^2+a^2$

$$\begin{aligned}(x+3)^2&=(x+3)(x+3)\\&=x^2+(3+3)x+(3)(3)\\&=\mathbf{x^2+6x+9}\end{aligned}$$

El producto $(x+3)^2$ es el trinomio x^2+6x+9 que se obtiene elevando al cuadrado a x, luego el término lineal $(2)(3)x=6x$ y el producto $(3)(3)=(3)^2=9$.

C

El producto $(x+a)^2$ se desarrolla de la siguiente forma:

Fórmula 3 $(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$

$(x+a)^2$ se conoce como **cuadrado de un binomio**.

Ejemplo Efectúe los siguientes productos aplicando la fórmula 3:

a) $(x+5)^2$

b) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$

Aplicando la fórmula 3 del cuadrado de un binomio se tiene:

a) $(x+5)^2=x^2+(2)(5)x+(5)^2$

$=\mathbf{x^2+10x+25}$

b) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=x^2+(\cancel{2})\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right)x+\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$=\mathbf{x^2+x+\frac{1}{4}}$

E

Efectúe los siguientes productos aplicando la fórmula 3:

a) $(x+4)^2$

b) $(x+2)^2$

c) $(x+6)^2$

d) $(x+m)^2$

e) $\left(x+\frac{1}{4}\right)^2$

f) $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2$

Contenido 5: Cuadrado de la diferencia de dos términos $(x-a)^2$

P

Efectúe el producto $(x-3)^2$.

S

El producto de la forma $(x-3)^2$ se reescribe como $[x+(-3)]^2$ y se efectúa de acuerdo con la fórmula 3.

$(x-a)^2=[x+(-a)]^2$

$(-a)^2=(-a)(-a)=a^2$

$$\begin{aligned}(x-3)^2&=[x+(-3)]^2\\&=x^2+(2)(-3)x+(-3)^2\\&=\mathbf{x^2-6x+9}\end{aligned}$$

C

El producto $(x-a)^2$ se efectúa siguiendo el procedimiento del cuadrado de la suma de dos términos, resultando que:

Fórmula 4 $(x-a)^2=x^2-2ax+a^2$

$(x-a)^2$ se conoce como **cuadrado de un binomio**.

Ejemplo Efectúe los siguientes productos:

a) $(x-2)^2$

b) $\left(x-\frac{1}{4}\right)^2$

Teniendo en cuenta la fórmula 4, el desarrollo de los productos dados es el siguiente:

a) $(x-2)^2=x^2-(2)(2)x+2^2$
$=\mathbf{x^2-4x+4}$

b) $\left(x-\frac{1}{4}\right)^2=x^2-(2)\left(\frac{1}{4}\right)x+\left(\frac{1}{4}\right)^2$
$=\mathbf{x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}}$

E

Efectúe los siguientes productos aplicando la fórmula 4:

a) $(x-m)^2$

b) $(x-4)^2$

c) $(x-5)^2$

d) $(x-6)^2$

e) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$

f) $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2$

Contenido 6: Producto de la suma por la diferencia de dos binomios $(x+a)(x-a)$

P Efectúe el producto $(x+7)$ $(x-7)$.

S

Se escribe $x-7$ como $x+(-7)$ y se efectúa la multiplicación igual que el producto de la forma $(x+a)(x+b)$.

$$\begin{aligned}(x+7)(x-7) &= (x+7)[x+(-7)]\\ &= x^2+[7+(-7)]x+(7)(-7)\\ &= x^2+(0)x-7^2\\ &= x^2-7^2\\ &= \mathbf{x^2-49}\end{aligned}$$

El resultado de $(x+7)(x-7)$ es igual al cuadrado de x menos el cuadrado de 7.

C

El producto indicado de la forma $(x+a)(x-a)$ da lugar a un binomio que se obtiene de la siguiente manera: se eleva x al cuadrado (x^2), y se resta el cuadrado de a (a^2).

Fórmula 5 $\quad (x+a)(x-a)=x^2-a^2$

$(x+a)(x-a)$ se conoce como **suma por diferencia de binomios**.

Ejemplo Efectúe los siguientes productos usando la fórmula 5:

a) $(x+3)(x-3)$

b) $\left(x+\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)$

Se aplica en ambos casos la fórmula 5.

a) $(x+3)(x-3)=x^2-3^2$

$=\mathbf{x^2-9}$

b) $\left(x+\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)=x^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2$

$=\mathbf{x^2-\frac{1}{16}}$

E

Efectúe los siguientes productos:

a) $(x+4)(x-4)$ b) $(x+m)(x-m)$ c) $(x+5)(x-5)$

d) $(x+6)(x-6)$ e) $\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$ f) $\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)$

Contenido 7: Comprobemos lo aprendido 2

E

1. Efectúe los siguientes productos utilizando la fórmula 1 y 2:

a) $(x+8)(x+3)$

b) $(x+9)(x-5)$

c) $(2x-7)(3x+2)$

d) $(x-4)(x-6)$

e) $\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)$

f) $\left(x-\frac{4}{5}\right)\left(x+\frac{3}{4}\right)$

2. Efectúe los siguientes productos utilizando las fórmulas 3 y 4:

a) $(x+7)^2$

b) $(x-9)^2$

c) $\left(x+\frac{3}{4}\right)^2$

d) $\left(x-\frac{2}{3}\right)^2$

e) $(2x+5)^2$

f) $(4x-3)^2$

3. Efectúe los siguientes productos utilizando la fórmula 5:

a) $(y+7)(y-7)$

b) $(y+6)(y-6)$

c) $\left(y+\frac{3}{4}\right)\left(y-\frac{3}{4}\right)$

d) $(xy+4)(xy-4)$

e) $(2x+5)(2x-5)$

f) $(3x+7)(3x-7)$

Desafío

Cuadrado de un trinomio

P

Desarrolle el producto $(a+b+c)^2$.

S

$(a+b+c)^2 = [(a+b)+c]^2$	Se escribe $a+b+c$ como $(a+b)+c$
$= (a+b)^2 + 2c(a+b) + c^2$	Se utiliza la fórmula 3
$= a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$	Se efectúan los productos $(a+b)^2$ y $2c(a+b)$
$= \mathbf{a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc}$	Se ordena el polinomio

C

El producto indicado de la forma $(a+b+c)^2$ llamado **cuadrado de un trinomio** es igual a la suma de los cuadrados de los sumandos a, b, c más el doble de cada uno de los productos ab, ac, y bc

Fórmula 6 $\quad (a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

Ejemplo Efectúe los siguientes productos utilizando la fórmula 6.

a) $(x+y+3z)^2$ b) $(x+y-z)^2$

Utilizando la fórmula 6, se encuentra que

a) $(x+y+3z)^2 = x^2+y^2+(3z)^2+2xy+2x(3z)+2y(3z)$

$= \mathbf{x^2+y^2+9z^2+2xy+6xz+6yz}$

Se utiliza la fórmula del cuadrado de un trinomio

b) $(x+y-z)^2 = [x+y+(-z)]^2$

$= x^2+y^2+(-z)^2+2xy+2x(-z)+2y(-z)$

$= \mathbf{x^2+y^2+z^2+2xy-2xz-2yz}$

E

Efectúe los siguientes productos utilizando la fórmula 6:

a) $(x+y+3)^2$ b) $(x+y+2z)^2$ c) $(a+b-4)^2$

d) $(x+2y-z)^2$ e) $(3x-y+z)^2$ f) $(2x-y-4z)^2$

Desafío — Productos notables de la forma $(ax+b)(ax+c)$

P

Efectúe el producto

$(3x+1)(3x+2)$.

Cada binomio tiene como primer término $3x$ ¿Se puede realizar este producto de forma similar al producto de la forma $(x+a)(x+b)$?

S

Los dos binomios del producto $(3x+1)(3x+2)$ tienen $3x$ como término común, lo cual nos induce a pensar que estamos frente a una variante del caso $(x+a)(x+b)$. Teniendo esto presente, se puede efectuar el producto dado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}(3x+1)(3x+2) &= (3x)^2+(1+2)(3x)+(1)(2)\\ &= \mathbf{9x^2+9x+2}\end{aligned}$$

C

El producto de la forma $(ax+b)(ax+c)$ se desarrolla de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}(ax+b)(ax+c) &= (ax)^2+(b+c)(ax)+bc\\ &= a^2x^2+(b+c)(ax)+bc\end{aligned}$$

Fórmula 7 $\quad (ax+b)(ax+c)=a^2x^2+(b+c)(ax)+bc$

Ejemplo Efectúe los siguientes productos:

a) $(2x+4)(2x-5)$

b) $(2x-3)(2x-7)$

Se aplica la conclusión anterior

a) $(2x+4)(2x-5)$

$=(2x+4)[2x+(-5)]$

$=(2x)^2+[4+(-5)](2x)+(4)(-5)$

$=4x^2+(-1)(2x)-20$

$=\mathbf{4x^2-2x-20}$

b) $(2x-3)(2x-7)$

$=[2x+(-3)][2x+(-7)]$

$=(2x)^2+[(-3)+(-7)](2x)+(-3)(-7)$

$=4x^2+(-10)(2x)+21$

$=\mathbf{4x^2-20x+21}$

E

Efectúe los siguientes productos:

a) $(2x+1)(2x+8)$

b) $(3x+5)(3x+7)$

c) $(4x+6)(4x-9)$

d) $(5x+7)(5x-4)$

e) $(6x-11)(6x-9)$

f) $(7x-3)(7x-8)$

Desafío

Cubo de un binomio

P

Efectúe los siguientes productos:

a) $(x+y)^3$ b) $(x-y)^3$

S

a) $$\begin{aligned}(x+y)^3 &= (x+y)^2(x+y)\\ &= (x^2+2xy+y^2)(x+y)\\ &= (x^2+2xy+y^2)x+(x^2+2xy+y^2)y\\ &= x^3+2x^2y+xy^2+x^2y+2xy^2+y^3\\ &= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3\end{aligned}$$

Por tanto, $\mathbf{(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3}$.

b) Se aplica el resultado obtenido en a), y resulta:

$$\begin{aligned}(x-y)^3 &= [x+(-y)]^3\\ &= x^3+3x^2(-y)+3x(-y)^2+(-y)^3\\ &= x^3-3x^2y+3xy^2-y^3\end{aligned}$$

En consecuencia, $\mathbf{(x-y)^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3}$.

C

$$(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$
$$(x-y)^3 = x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$$

Ejemplo Efectúe los siguientes productos aplicando las fórmulas de la conclusión :

a) $(x+2)^3$ b) $(x-1)^3$ c) $(2x+y)^3$

a) $(x+2)^3 = x^3+3x^2(2)+3x(2^2)+(2^3)$
$= \mathbf{x^3+6x^2+12x+8}$

b) $(x-1)^3 = x^3-3x^2(1)+3x(1^2)-(1^3)$
$= \mathbf{x^3-3x^2+3x-1}$

c) $(2x+y)^3 = (2x)^3+3(2x)^2y+3(2x)y^2+y^3$
$= \mathbf{8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3}$

E

Efectúe los siguientes productos aplicando las fórmulas de la conclusión:

a) $(x+1)^3$ b) $(x-2)^3$ c) $(x+3)^3$ d) $(x-2y)^3$

Contenido 8: Producto de binomios con radicales

P

Efectúe los siguientes productos:

a) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$ b) $(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$ c) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

S

a) Las fórmulas de los productos notables se pueden aplicar a los casos particulares de los números reales, el producto $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$ se efectúa aplicando la fórmula 3:

$$\begin{aligned}(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 &= (\sqrt{2})^2+(2)(\sqrt{2})(\sqrt{3})+(\sqrt{3})^2\\ &= 2+2\sqrt{6}+3\\ &= \mathbf{5+2\sqrt{6}}\end{aligned}$$

$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

b) La fórmula 4 permite obtener el resultado de $(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$:

$$\begin{aligned}(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2 &= (\sqrt{2})^2-(2)(\sqrt{2})(\sqrt{3})+(\sqrt{3})^2\\ &= 2-2\sqrt{6}+3\\ &= \mathbf{5-2\sqrt{6}}\end{aligned}$$

c) Se aplica la fórmula 5 de los productos notables:

$$\begin{aligned}(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2}) &= (\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2\\ &= 3-2\\ &= \mathbf{1}\end{aligned}$$

C

Las fórmulas 3, 4 y 5 de los productos notables funcionan igualmente para los números reales escritos como productos de binomios cuyos términos son radicales o enteros, adquiriendo las siguientes formas particulares

$$(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})^2 = a\pm 2\sqrt{ab}+b$$
$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = a-b$$
$$(\sqrt{a}+b)(\sqrt{a}-b) = a-b^2$$

E

Efectúe los siguientes productos:

a) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2$ b) $(\sqrt{7}-\sqrt{6})^2$ c) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})$

d) $(\sqrt{3}+2)^2$ e) $(\sqrt{2}-3)^2$ f) $(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)$

Contenido 9: Racionalización del denominador

P

Racionalice el denominador de la fracción

$$\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

El conjugado de $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ es $\sqrt{a}-\sqrt{b}$

El conjugado de $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ es $\sqrt{a}+\sqrt{b}$

S

$$\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)$$

Se multiplican numerador y denominador por $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

$$= \frac{2(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$$

Se indican los productos de los numeradores y denominadores de las fracciones

$$= \frac{(2)(\sqrt{3})-(2)\sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}$$

Se aplica la propiedad distributiva en el producto indicado del numerador y la fórmula 5 en el producto indicado del denominador

$$= \frac{2\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{3-2}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{1}$$

$$= \mathbf{2\sqrt{3}-2\sqrt{2}}$$

C

Si el denominador de una fracción es un binomio formado por la suma o diferencia de las raíces cuadradas de enteros positivos, su racionalización se lleva acabo en los siguientes pasos:

1. Se multiplica el numerador y denominador de la fracción por el conjugado del denominador.
2. Se aplica la propiedad distributiva en el producto indicado del numerador y la **fórmula 5** en el producto indicado del denominador.
3. Se efectúan las operaciones indicadas y se simplifica la fracción resultante.

Ejemplo Racionalice el denominador de la fracción $\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.

$$\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\right)\left(\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\right) = \frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5-3} = \frac{\cancel{2}(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{\cancel{2}} = \mathbf{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$$

E

Racionalice el denominador de las siguientes fracciones:

a) $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ b) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ c) $\frac{2}{\sqrt{3}+1}$

d) $\frac{3}{\sqrt{2}-1}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ f) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

Contenido 10: Comprobemos lo aprendido 3

E

1. Efectúe los siguientes productos usando la fórmula 3:

a) $(\sqrt{2}+\sqrt{5})^2$ b) $(\sqrt{5}+6)^2$ c) $(2\sqrt{3}+1)^2$ d) $(4\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$

2. Efectúe los siguientes productos utilizando la fórmula 4:

a) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$ b) $(\sqrt{5}-3)^2$ c) $(3\sqrt{2}-1)^2$ d) $(2\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$

3. Efectúe los siguientes productos usando la fórmula 5:

a) $(\sqrt{7}+\sqrt{2})(\sqrt{7}-\sqrt{2})$ b) $(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)$

c) $(\sqrt{11}+2)(\sqrt{11}-2)$ d) $(2\sqrt{5}+3)(2\sqrt{5}-3)$

4. Racionalice el denominador de las siguientes fracciones:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ c) $\dfrac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$ d) $\dfrac{5}{\sqrt{3}-1}$

e) $\dfrac{2}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$ f) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ g) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ h) $\dfrac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}-2}$

Sección 3: Factorización

Contenido 1: Factorización de polinomios

P

Factorice el siguiente polinomio aplicando la propiedad distributiva:

$$3x + 6$$

S

Para factorizar la expresión, se representa cada termino del polinomio en forma de multiplicación.

$$3x = 3 \cdot x \quad \text{y} \quad 6 = (3)\,(2).$$

Se aplica la propiedad distributiva:

$$\begin{aligned} 3x + 6 &= 3 \cdot x + (3)(2) \\ &= 3(x + 2) \end{aligned}$$

Recuerde: Propiedad distributiva

$$a(b + c) = ab + ac$$
$$ab + ac = a(b + c)$$

Por ejemplo, el polinomio $3x + 6$ se factoriza como el producto de $3(x + 2)$; a las expresiones 3 y $x + 2$ del producto se les da el nombre de factores.

C

La **factorización** es el proceso inverso de la multiplicación de expresiones algebraicas.

Factorizar

$$3x + 6 = 3(x + 2)$$

Desarrollar

E

Factorice los siguientes binomios:

a) $3x + 9$

b) $4x + 12$

c) $8x + 12$

d) $2x - 10$

e) $3x - 30$

f) $12x - 15$

Contenido 2: Factor común monomio

P

Factorice el binomio x^2+3x.

¿Qué tienen en común los monomios x^2 y $3x$?

S

Los términos del binomio x^2+3x son x^2 y $3x$, cuya única descomposición en factores es

$$x^2=x \cdot x$$
$$3x=3 \cdot x$$

En ambas expresiones aparece el monomio x y de acuerdo con la propiedad distributiva:

$$\begin{aligned} x^2+3x &= x \cdot x+3 \cdot x \\ &= \mathbf{x(x+3)} \end{aligned}$$

C

Un binomio de la forma, $Ma+Mb$, se factoriza así:

$$Ma+Mb=M(a+b)$$

M se llama **factor común** de Ma y Mb.

Ejemplo Factorice el binomio $2x^2-6xy$.

$$2x^2=(2)x \cdot x=2x(x)$$
$$6xy=(2)(3)xy=2x(3y)$$

Luego, se extrae el factor común y se factoriza el binomio:

$$\begin{aligned} 2x^2-6xy &= 2x(x)-2x(3y) \\ &= \mathbf{2x(x-3y)} \end{aligned}$$

El factor común de los coeficientes es el máximo común divisor de ellos.

E

Factorice los siguientes binomios:

a) x^2+2x b) x^2+5x c) x^2-4x d) x^2-x

e) $3a^2-9a$ f) $2m^2-6m$ g) $15a^2-15a$ h) $3x^2+6xy$

Contenido 3: Factor común polinomio

P

Factorice el polinomio $a(x+1)+b(x+1)$.

S

Los factores de $a(x+1)$ y $b(x+1)$ son a y $x+1$, b y $x+1$, por esa razón $x+1$ es el factor común.
Luego, haciendo uso de la distributividad se obtiene que

$$a(x+1)+b(x+1)= (x+1)(a+b)$$

siendo esta la factorización del polinomio dado.

Recuerde escribir la expresión $x+1$ entre paréntesis.

C

Las expresiones de la forma $a(x+y)+b(x+y)$ se pueden factorizar de la siguiente manera:
Se escribe primero el factor común $x+y$, multiplicándolo por otro polinomio que es la suma de los factores que acompañan a $x+y$:

$$a(x+y)+b(x+y)= (x+y)(a+b)$$

Ejemplo Factorice el polinomio $n(x+2)-(x+2)$

Se identifica a $x+2$ como el factor común y se multiplica con el binomio formado por los factores n y -1, luego

$$n(x+2)-(x+2)= \mathbf{(x+2)(n-1)}$$

E

Factorice los siguientes polinomios:

a) $x(n-3)+y(n-3)$

b) $2(x-1)+y(x-1)$

c) $x(a-2)-(a-2)$

d) $m(3a+b)-(3a+b)$

e) $3x(a-b)+2(a-b)$

f) $4x(a+b-2)-5(a+b-2)$

Contenido 4: Diferencia de cuadrados

P

Factorice el binomio x^2-4 estableciendo relación con uno de los productos notables.

S

Se ha visto en un contenido anterior que aplicando la distributividad al producto indicado $(x+2)(x-2)$ resulta la igualdad

$$(x+2)(x-2)=x^2-2^2$$

Esto nos sugiere que para encontrar los factores de x^2-4, se extrae las raíces cuadradas de x^2 y 4, que resultan ser x y 2; luego se forman los binomios $x+2$ y $x-2$ y se escriben como el producto indicado $(x+2)(x-2)$. Así se tiene

$$x^2-4=\mathbf{(x+2)(x-2)}$$

C

Los factores de la **diferencia de cuadrados** x^2-a^2 se encuentran extrayendo las raíces cuadradas de x^2 y a^2, formando a continuación el producto notable $(x+a)(x-a)$, es decir:

$$x^2-a^2=(x+a)(x-a)$$

Si el término en x de la diferencia de cuadrados tiene coeficiente con raíz cuadrada exacta, se procede similarmente.

Ejemplo Factorice las siguientes diferencias de cuadrados:

a) $x^2-\frac{1}{4}$

b) $9x^2-4$

a) Se observa que el primer término de $x^2-\frac{1}{4}$ es el cuadrado de x y el segundo término es el cuadrado de $\frac{1}{2}$, entonces:

$$\begin{aligned} x^2-\frac{1}{4} &= x^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \mathbf{\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)} \end{aligned}$$

b) El primer término de $9x^2-4$ es el cuadrado de $3x$ y el segundo término es el cuadrado de 2, entonces:

$$\begin{aligned} 9x^2-4 &= (3x)^2-2^2 \\ &= \mathbf{(3x+2)(3x-2)} \end{aligned}$$

E

Factorice las siguientes diferencias de cuadrados:

a) x^2-9

b) x^2-16

c) $x^2-\frac{1}{9}$

d) $x^2-\frac{1}{16}$

e) $4x^2-9$

f) $9x^2-25$

Contenido 5: Comprobemos lo aprendido 4

E

1. Factorice en cada caso extrayendo factor común monomio.

a) m^2+mn b) a^2-ab c) $2ax-3ay$ d) $4ax+2a$

e) $ax+bx+cx$ f) $ab+4a^2b^2$ g) $8a^2b-4b^2$ h) $3x^2-12xy+6y$

2. Factorice utilizando factor común polinomio.

a) $x(a+b)+y(a+b)$ b) $a(n+2)+(n+2)$ c) $x(a+1)-(a+1)$

d) $x(a+5)-3(a+5)$ e) $2x(n-1)+3y(n-1)$ f) $4a(x+y)-5b(x+y)$

3. Factorice cada una de las siguientes diferencias de cuadrados:

a) x^2-36 b) x^2-100 c) $x^2-\frac{4}{9}$

d) $x^2-\frac{9}{16}$ e) $4x^2-25$ f) $9x^2-49$

Contenido 6: Trinomio cuadrado perfecto

P

Factorice el polinomio $x^2 + 2x + 1$ aplicando la idea de producto notable.

S

Un producto notable de la forma $(x + a)^2$ se desarrolla:

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

En el polinomio $x^2 + 2x + 1$, se observa que:

Los términos x^2 y 1 son cuadrados perfectos, es decir sus raíces cuadradas son x y 1.
El termino $2x$ es el doble del producto $(x)(1)$, es decir $(2)(x)(1)$.

Entonces:

$$x^2 + 2x + 1 = x^2 + (2)(1)x + 1^2 = \mathbf{(x + 1)^2}$$

C

Para comprobar que un **trinomio** es **cuadrado perfecto**, primero se debe ver que este tenga dos cuadrados perfectos, y que el otro término sea más o menos el doble del producto de las raíces cuadradas de estos.

Se factoriza como el cuadrado de un binomio formado por la suma o diferencia de las raíces cuadradas de los cuadrados perfectos, de acuerdo con el signo del segundo término:

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$$
$$x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$$

Ejemplo

Factorice el polinomio $x^2 - 6x + 9$.

$-6x = (2)(-3)x, \qquad 9 = (-3)^2$

Como el segundo término es negativo, entonces:

$$x^2 - 6x + 9 = \mathbf{(x - 3)^2}$$

E

Factorice los siguientes trinomios cuadrados perfectos:

a) $x^2 + 10x + 25$ b) $x^2 + 14x + 49$ c) $x^2 + 18x + 81$

d) $x^2 - 8x + 16$ e) $x^2 - 12x + 36$ f) $x^2 - 16x + 64$

Contenido 7: Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ (1)

P

Factorice el polinomio $x^2 + 3x + 2$ aplicando la idea de producto notable.

S

Un producto notable de la forma $(x + p)(x + q)$ se desarrolla:

$$(x + p)(x + q) = x^2 + \underbrace{(p + q)}_{\text{Suma de } p \text{ y } q}x + \underbrace{pq}_{\text{Producto de } p \text{ y } q}$$

Para factorizar el trinomio $x^2 + 3x + 2$ se buscan dos números cuya suma sea $+3$ y producto $+2$.

Las posibilidades se presentan en la siguiente tabla:

Pareja	Producto	Suma
1 y 2	$(1)(2) = 2$	$1 + 2 = 3$
-1 y -2	$(-1)(-2) = 2$	$-1 - 2 = -3$

Por lo tanto, $p = 2$, $q = 1$, entonces $x^2 + 3x + 2 = \mathbf{(x + 2)(x + 1)}$

C

La factorización del trinomio $x^2 + bx + c$ es el producto indicado

$$(x + p)(x + q), \text{ donde } p + q = b \text{ y } pq = c.$$

E

Factorice los siguientes polinomios:

a) $x^2 + 5x + 6$

b) $x^2 + 7x + 12$

c) $x^2 + 8x + 15$

d) $y^2 + 9y + 18$

e) $y^2 + 9y + 14$

f) $x^2 + 7x + 10$

Contenido 8: Trinomio de la forma x^2+bx+c (2)

P

Factorice el polinomio $x^2-7x+12$ siguiendo la pauta de la conclusión en el contenido anterior.

S

En este caso, el coeficiente de x es el número negativo -7. Por ello, se buscan dos números cuyo producto sea $+12$ y cuya suma sea -7. Como la suma es un número negativo y el producto es un positivo, entonces ambos números deben ser negativos. Las posibilidades aparecen en la tabla siguiente:

Pareja	Producto	Suma
-1 y -12	12	-13
-2 y -6	12	-8
-3 y -4	12	-7

Puede efectuar el producto indicado $(x-3)(x-4)$ para comprobar que la factorización encontrada es correcta.

Entonces, los números que cumplen con la condición son los de la última fila, -3 y -4. Luego,

$$\begin{aligned} x^2-7x+12 &= [x+(-3)][x+(-4)] \\ &= \mathbf{(x-3)(x-4)} \end{aligned}$$

C

Para factorizar el trinomio x^2+bx+c con $b<0$ y $c>0$ se puede expresar como el producto de dos binomios que tienen a x como término común, y para encontrar las constantes o términos independientes se buscan dos números negativos cuyo producto sea $+c$ y cuya suma sea $-b$.

Si el trinomio es de la forma x^2+bx-c o x^2-bx-c con $b>0$ y $c>0$, se buscan dos números, uno positivo y otro negativo, cuyo producto sea $-c$ y cuya suma sea $+b$ o $-b$, según sea el caso.

Ejemplo Factorice el polinomio x^2-3x-4.

Se observa que el polinomio dado es un trinomio de la forma x^2-bx-c, por lo tanto se buscan dos números cuyo producto sea -4 y cuya suma sea -3. Como el producto es negativo y la suma es negativa, entonces uno de ellos debe ser positivo y el otro negativo. Las posibilidades aparecen en la siguiente tabla:

Pareja	Producto	Suma
-1 y 4	-4	3
-2 y 2	-4	0
1 y -4	-4	-3

Entonces, los números que cumplen la condición son 1 y -4. Luego,

$$\begin{aligned} x^2-3x-4 &= (x+1)[x+(-4)] \\ &= \mathbf{(x+1)(x-4)} \end{aligned}$$

E

Factorice los siguientes trinomios:

a) x^2-6x+8 b) $x^2-11x+18$ c) x^2+x-6

d) $x^2+2x-15$ e) x^2-x-12 f) $x^2-5x-14$

Contenido 9: Trinomio de la forma ax^2+bx+c (1)

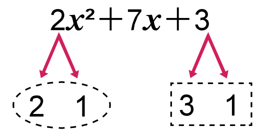
P

Factorice el trinomio $2x^2+7x+3$.

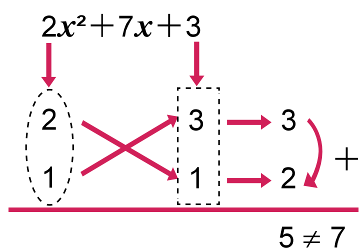
S

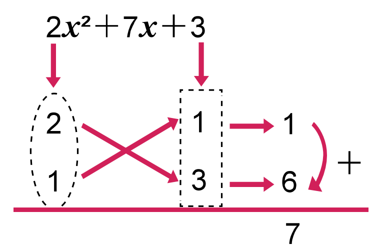
Para factorizar el trinomio $2x^2+7x+3$ se siguen los siguientes pasos:

1. Se descomponen en factores el coeficiente del término cuadrático y el término independiente.



2. Se colocan en forma vertical, los factores obtenidos, se multiplican en cruz, se suman estos productos y se comprueba si el número obtenido es igual al coeficiente del término lineal del trinomio. Si eso no ocurre, se cambian de posición los factores hasta obtener el resultado.





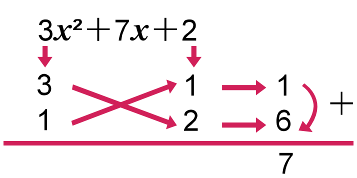
3. Se forman los binomios $2x+1$ y $x+3$ a partir de los números que están en forma horizontal.
   Por lo tanto,
   $$2x^2+7x+3=\mathbf{(2x+1)(x+3)}$$

C

Para factorizar el trinomio de la forma ax^2+bx+c, con $a>1$ se realizan los siguientes pasos:

1. Se descomponen en factores a y c.
2. Se colocan los factores de a y c en dos columnas.
3. Se multiplican en cruz los factores encontrados y se suman los dos productos obtenidos. Si el resultado es igual a b, los coeficientes de los factores serán los números que están de forma horizontal.
4. Se escribe la factorización con los factores del paso anterior.

Ejemplo Factorice el trinomio $3x^2+7x+2$.



Se forman los binomios $3x+1$ y $x+2$ a partir de los números que están de forma horizontal. Por lo tanto,

$$3x^2+7x+2=\mathbf{(3x+1)(x+2)}$$

E

Factorice cada uno de los siguientes trinomios:

a) $3x^2+8x+5$ b) $7x^2+10x+3$ c) $4x^2+5x+1$

d) $2x^2+7x+6$ e) $3x^2+8x+4$ f) $6x^2+11x+3$

Contenido 10: Trinomio de la forma ax^2+bx+c (2)

P

Factorice el polinomio $2x^2-5x+3$.

S

$$
\begin{array}{llll}
2x^2-5x+3 & & & \\
2 & -3 & \rightarrow & -3 \\
1 & -1 & \rightarrow & -2 \\
\hline
 & & & -5
\end{array}
$$

Se descomponen en factores el coeficiente del término de segundo grado 2 y el término independiente 3; se colocan estos en forma vertical y se multiplican en cruz, luego se suman estos productos. Se comprueba si el número obtenido es igual a -5, el coeficiente del término de primer grado.

Por lo tanto, $2x^2-5x+3=\mathbf{(2x-3)(x-1)}$

C

Para factorizar el trinomio ax^2-bx+c con $b>0$ y $c>0$, se descomponen en factores a y c, procurando que los factores de c sean negativos, se colocan en forma vertical los números obtenidos, se multiplican en cruz y se suman los productos. El resultado debe ser igual a $-b$.

Ejemplo Factorice el trinomio $2x^2-x-3$.

$$
\begin{array}{llll}
2x^2-x-3 & & & \\
2 & -3 & \rightarrow & -3 \\
1 & +1 & \rightarrow & +2 \\
\hline
 & & & -1
\end{array}
$$

Se descomponen en factores los coeficientes del término de segundo grado 2 y el término independiente -3; se colocan estos en columna y se multiplican en cruz, luego se suman estos productos:

$$(2)(1)+(1)(-3)=2-3=-1$$

El número obtenido, -1, es igual al coeficiente del término de primer grado $-x$.

Por lo tanto, $2x^2-x-3=\mathbf{(2x-3)(x+1)}$.

E

Factorice cada uno de los siguientes trinomios:

a) $2x^2-3x+1$

b) $2x^2-5x+2$

c) $3x^2+x-2$

d) $3x^2+2x-5$

e) $5x^2-2x-3$

f) $6x^2-x-2$

Contenido 11: Comprobemos lo aprendido 5

E

1. Factorice los siguientes trinomios cuadrados perfectos:

a) x^2+4x+4 b) $x^2+12x+36$ c) $x^2+20x+100$

d) x^2-6x+9 e) $x^2-10x+25$ f) $x^2-14x+49$

2. Factorice los siguientes trinomios de la forma x^2+bx+c:

a) $x^2+9x+20$ b) $x^2+10x+24$ c) $x^2-11x+28$

d) $x^2-10x+21$ e) $x^2+4x-12$ f) $x^2-3x-28$

3. Factorice cada uno de los siguientes trinomios de la forma ax^2+bx+c:

a) $5x^2+7x+2$ b) $7x^2+15x+2$ c) $3x^2-10x+7$

d) $2x^2-9x+7$ e) $4x^2+x-3$ f) $7x^2-2x-5$

4. Factorice los siguientes polinomios:

a) $6x^2-24$ b) $3x^2-48$ c) $2ax^2+12ax+18a$

d) $3ax^2+15ax+18a$ e) $2nx^2-2nx-24n$ f) $6ax^2+21ax+9a$

Desafío

Combinación de casos de factorización

P

Descomponga los siguientes polinomios en factores de primer grado y constantes, en cada uno es posible usar más de un caso de factorización. Se sugiere iniciar con la aplicación de factor común.

a) $5x^2-20$

b) $-2x^2y+8xy-8y$

c) $3x^2-6x-9$

S

a) $5x^2-20=5(x^2-4)$

$=5(x+2)(x-2)$

Se extrae el factor común 5 de los dos términos.

Luego, $5x^2-20=\mathbf{5(x+2)(x-2)}$

b) $-2x^2y+8xy-8y=-2y(x^2-4x+4)$

$=-2y(x-2)^2$

Se extrae el factor común $-2y$ de los términos del trinomio.

Luego, $-2x^2y+8xy-8y=\mathbf{-2y(x-2)^2}$

c) $3x^2-6x-9=3(x^2-2x-3)$

$=3(x-3)(x+1)$

Se extrae el factor común 3 de los términos del trinomio.

Luego, $3x^2-6x-9=\mathbf{3(x-3)(x+1)}$

C

Para descomponer en factores constantes y de primer grado un polinomio que requiere de varios casos de factorización se aplican los siguientes pasos:

1. Se investiga si tiene algún factor común monomio, de ser así, se expresa el polinomio como un producto del factor común por otro polinomio.
2. Se factoriza este último polinomio utilizando los casos estudiados.
3. El producto indicado de todos los factores encontrados es la factorización del polinomio dado.

E

Descomponga en factores de primer grado y constantes los siguientes polinomios:

a) $2x^2-18$

b) $3x^2-12$

c) $2m^2n-8mn+8n$

d) $3x^2+9x+6$

Desafío

Suma o diferencia de cubos

P

a) Efectúe el producto $(x+y)(x^2-xy+y^2)$ para verificar que es igual a x^3+y^3.
b) Efectúe el producto $(x-y)(x^2+xy+y^2)$ para verificar que es igual a x^3-y^3.

S

a) $$\begin{aligned}(x+y)(x^2-xy+y^2) &= x(x^2-xy+y^2)+y(x^2-xy+y^2)\\ &= x^3-x^2y+xy^2+x^2y-xy^2+y^3\\ &= x^3+y^3\end{aligned}$$

Por tanto, $\mathbf{(x+y)(x^2-xy+y^2)=x^3+y^3}$.

b) $$\begin{aligned}(x-y)(x^2+xy+y^2) &= x(x^2+xy+y^2)-y(x^2+xy+y^2)\\ &= x^3+x^2y+xy^2-x^2y-xy^2-y^3\\ &= x^3-y^3\end{aligned}$$

En consecuencia, $\mathbf{(x-y)(x^2+xy+y^2)=x^3-y^3}$.

C

Productos notables	**Factorización**
$(x+y)(x^2-xy+y^2)=x^3+y^3$	$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$
$(x-y)(x^2+xy+y^2)=x^3-y^3$	$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$

Ejemplo Efectúe el producto o factorice según corresponda:

a) $(x+1)(x^2-x+1)$ b) x^3+8 c) x^3-1

a) $$\begin{aligned}(x+1)(x^2-x+1) &= (x+1)[x^2-x(1)+1]\\ &= x^3+1^3\\ &= \mathbf{x^3+1}\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}x^3+8 &= x^3+2^3\\ &= (x+2)(x^2-2x+2^2)\\ &= \mathbf{(x+2)(x^2-2x+4)}\end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned}x^3-1 &= x^3-1^3\\ &= (x-1)(x^2+x+1^2)\\ &= \mathbf{(x-1)(x^2+x+1)}\end{aligned}$$

E

Efectúe el producto o factorice según corresponda:

a) $(x+2)(x^2-2x+4)$ b) x^3-8 c) x^3+27 d) $64x^3-y^3$

Unidad 2

Ecuaciones de Segundo Grado

Sección 1: Introducción a las ecuaciones de segundo grado

Contenido 1: Ecuaciones de primer grado

P

Resuelva las siguientes ecuaciones de primer grado en una variable:

a) $2x+3=-5$ b) $-3x-5=10$ c) $\frac{x}{3}-5=2$

S

a) $2x+3=-5$

$2x=-5-3$ Se transpone el $+3$

$2x=-8$

$\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}}=-\frac{8}{2}$ Se divide por 2

$\boldsymbol{x=-4}$

b) $-3x-5=10$

$-3x=10+5$ Se transpone el -5

$-3x=15$

$\frac{\cancel{-3}x}{\cancel{-3}}=\frac{15}{-3}$ Se divide por -3

$\boldsymbol{x=-5}$

c) $\frac{x}{3}-5=2$

$\frac{x}{3}=2+5$ Se transpone el -5

$\frac{x}{3}=7$

$\frac{x}{\cancel{3}}(\cancel{3})=7(3)$ Se multiplica por 3

$\boldsymbol{x=21}$

C

Para resolver una ecuación de primer grado en una variable se realizan los siguientes pasos:

1. Si algún término con la variable x aparece en el lado derecho, se transpone al lado izquierdo; si hay constantes en este se transponen al lado derecho.
2. Se reducen términos semejantes hasta convertir la ecuación a la forma $ax=b$ o $\frac{1}{a}x=b$.
3. Si $ax=b$, se dividen ambos lados de la ecuación, por a obteniendo la solución $x=\frac{b}{a}$, si $\frac{1}{a}x=b$, se multiplican ambos lados por a, obteniendo $x=ab$.

E

1. Complete los espacios en blanco.

a) $3x+7=13$

$3x=13-\square$

$3x=\square$

$x=\frac{\square}{3}$

$x=\square$

b) $-5x-3=12$

$-5x=12+\square$

$-5x=\square$

$x=\frac{\square}{-5}$

$x=\square$

c) $\frac{x}{4}-2=3$

$\frac{x}{4}=3+\square$

$\frac{x}{4}=\square$

$x=\square\,(4)$

$x=\square$

2. Resuelva las siguientes ecuaciones de primer grado:

a) $x+5=6$ b) $2x-8=4$ c) $\frac{x}{2}+7=5$

Contenido 2: Ecuaciones con términos de segundo grado

P

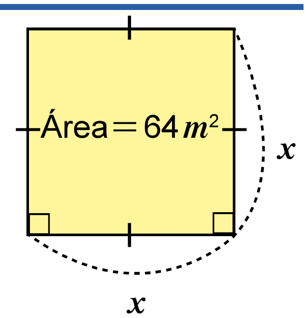
Don Pedro quiere cultivar maíz en un terreno cuadrado de su propiedad que tiene un área 64 m^2. Escriba la ecuación que representa el área del terreno.

El área del cuadrado es:
Área $= l^2$, donde l es la longitud del lado del cuadrado.

S

Sea x la longitud de un lado del cuadrado, que tiene un área de 64 m^2, entonces la ecuación referida es

$$x^2 = 64$$



Si se transpone 64 al lado izquierdo, se obtiene otra expresión de la ecuación original:

$$\mathbf{x^2 - 64 = 0}$$

C

Si $a > 0$, la ecuación $x^2 = a$ se puede expresar en la forma $x^2 - a = 0$, que es una ecuación de **segundo grado o cuadrática**.

La forma general de la ecuación de segundo grado es $ax^2 + bx + c = 0$; con $a \neq 0$.

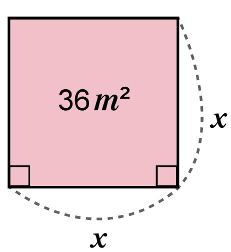
Ejemplo Identifique las ecuaciones que representan una ecuación de segundo grado.

a) $x^2 = 25$ b) $x + 5 = 8$ c) $x^2 + 2x - 15 = 0$

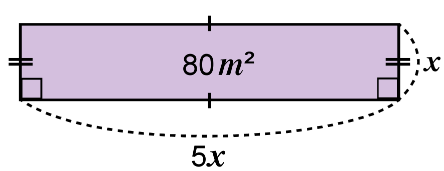
Las ecuaciones de los incisos a) y c) son de segundo grado, por tener una variable con exponente dos (elevada al cuadrado). La ecuación del inciso b) es de primer grado.

E

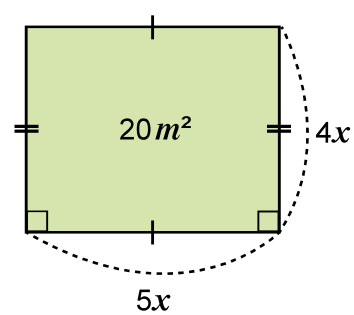
1. Don René tiene tres terrenos con áreas 36m^2, 80m^2 y 20m^2 para cultivar únicamente maíz en el primero, frijoles en el segundo y tomates en el tercero. Escriba una ecuación que represente el área de cada terreno.



Maíz



Frijoles



Tomates

2. Identifique las ecuaciones que son de segundo grado.

a) $x^2 = 16$ b) $x + 3 = 7$ c) $4x^2 - 100 = 0$

d) $3x - 5 = 10$ e) $x^2 + 6x - 16 = 0$ f) $12 - 5x = 22$

Contenido 3: Soluciones de una ecuación de segundo grado

P

Determine mediante sustitución cuáles de los números, -2, -1, y 2 satisfacen cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $x^2+2x+1=0$ b) $x^2-x-2=0$

S

a) Al sustituir $-2, -1$ y 2 en el lado izquierdo de la ecuación se obtiene:

Para $x=-2$ $x^2+2x+1=(-2)^2+2(-2)+1$ $=4-4+1$ $=1\neq0$ -2 no satisface a).	Para $x=-1$ $x^2+2x+1=(-1)^2+2(-1)+1$ $=1-2+1$ $=0$ -1 satisface a).	Para $x=2$ $x^2+2x+1=(2)^2+2(2)+1$ $=4+4+1$ $=9\neq0$ 2 no satisface a).

El único número que satisface la ecuación $x^2+2x+1=0$ es $-$**1**.

b) Al sustituir -2, -1 y 2 en el lado izquierdo de la ecuación se tiene:

Para $x=-2$ $x^2-x-2=(-2)^2-(-2)-2$ $=4+2-2$ $=4\neq0$ -2 no satisface b).	Para $x=-1$ $x^2-x-2=(-1)^2-(-1)-2$ $=1+1-2$ $=0$ -1 satisface b).	Para $x=2$ $x^2-x-2=(2)^2-2-2$ $=4-2-2$ $=0$ 2 satisface b).

Los números **$-$1** y **2** satisfacen la ecuación de segundo grado $x^2-x-2=0$ porque anulan la expresión x^2-x-2.

C

Un número que al sustituirlo en la expresión ax^2+bx+c da cero se llama **solución de la ecuación** $ax^2+bx+c=0$.

E

Determine mediante sustitución cuáles de los números $-3, -2$, 2 y 3 satisfacen cada una de las siguientes ecuaciones:

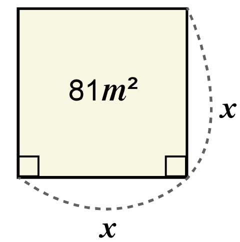
a) $x^2-9=0$ b) $2x^2-8=0$ c) $x^2-6x+9=0$ d) $x^2+4x+4=0$

Contenido 4: Soluciones de una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2-c=0$, con $a>0$ y $c>0$

P

Don Pedro tiene un terreno cuadrado con área de $81m^2$ para cultivar frijoles. Determine la longitud del lado del terreno.

S



En la figura se representa el terreno con un área de $81m^2$ y con x la longitud de uno de sus lados, entonces se puede plantear la ecuación, $x^2=81$.

Para determinar el valor de x se encuentran las dos raíces cuadradas de 81, es decir, $x=\pm 9$.

Por tanto, como $x>0$ la longitud del lado del terreno que Don Pedro tiene es **$9m$**.

C

Para resolver ecuaciones de segundo grado de la forma $ax^2-c=0$, con $a>0$ y $c>0$:

1. Se transpone el término $-c$ al lado derecho para obtener la ecuación $ax^2=c$.
2. Se dividen ambos lados de la ecuación anterior por a, quedando expresada en la forma $x^2=\frac{c}{a}$.
3. Se resuelve la ecuación determinando las raíces cuadradas $x=\sqrt{\frac{c}{a}}$ y $x=-\sqrt{\frac{c}{a}}$.

Ejemplo Resuelva la ecuación de segundo grado $3x^2-48=0$

$3x^2-48=0$	
$3x^2=48$	Se transpone -48
$x^2=\frac{48}{3}$	Se divide por 3 ambos lados
$x^2=16$	Se simplifica
$x=\pm\sqrt{16}$	Se extrae raíz cuadrada
$\boldsymbol{x=\pm 4}$	

Las soluciones de la ecuación $3x^2-48=0$ son $\boldsymbol{x=4}$, $\boldsymbol{x=-4}$.

E

1. Luis quiere cercar con alambre un terreno cuadrado que tiene un área de $64m^2$. Encuentre la longitud de un lado del terreno.

2. Resuelva las siguientes ecuaciones de segundo grado:

a) $x^2-9=0$ b) $x^2-5=0$ c) $2x^2-32=0$

Contenido 5: Soluciones de una ecuación de segundo grado de la forma $(x+p)^2=q$ con $q > 0$

P

Resuelva la ecuación de segundo grado $(x+2)^2=9$.

S

Se extrae raíz cuadrada en ambos lados de la ecuación así,

$$x+2=\pm 3$$

Luego,

$$\begin{aligned} x+2&=3 \\ x&=3-2 \\ \boldsymbol{x}&=\mathbf{1} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x+2&=-3 \\ x&=-3-2 \\ \boldsymbol{x}&=\mathbf{-5} \end{aligned}$$

La ecuación $(x+2)^2=9$ tiene las soluciones $\boldsymbol{x=1}$, $\boldsymbol{x=-5}$.

C

Para resolver ecuaciones de segundo grado de la forma $(x+p)^2=q$, con $q>0$ se realizan los siguientes pasos:

1. Se extrae raíz cuadrada a ambos lados de la ecuación anterior, obteniendo
$$x+p=\sqrt{q} \text{ y } x+p=-\sqrt{q}$$
2. Se resuelven las ecuaciones anteriores obteniendo las soluciones
$$x=-p+\sqrt{q} \text{ y } x=-p-\sqrt{q}$$

Ejemplo Resuelva la ecuación de segundo grado $(x-1)^2-2=0$.

$(x-1)^2=2$ Se transpone -2 al lado derecho

$(x-1)=\pm\sqrt{2}$, Se extrae raíz cuadrada

$x-1=\sqrt{2}$, $\quad x-1=-\sqrt{2}$

$x=1+\sqrt{2}$, $\quad x=1-\sqrt{2}$ Se transpone -1 al lado derecho

Las soluciones de la ecuación $(x-1)^2-2=0$ son $\boldsymbol{x=1+\sqrt{2}}$, $\boldsymbol{x=1-\sqrt{2}}$

E

Resuelva las siguientes ecuaciones de segundo grado:

a) $(x+1)^2=4$ b) $(x-2)^2=9$ c) $(x+5)^2=3$

d) $(x-3)^2-16=0$ e) $(x+4)^2-25=0$ f) $(x-6)^2-5=0$

Contenido 6: Comprobemos lo aprendido 1

E

1. Resuelva las siguientes ecuaciones de segundo grado:

a) $x^2-4=0$

b) $2x^2-50=0$

c) $4x^2-25=0$

d) $x^2-8=0$

2. Resuelva las siguientes ecuaciones de segundo grado

a) $(x-1)^2=9$

b) $(x+1)^2-4=0$

c) $(x-3)^2=5$

d) $(x+3)^2-15=0$

3. Una cancha de Voleibol tiene un área de 162m^2 y su largo es el doble de su ancho. Encuentre sus dimensiones.

4. Una persona, al donar parte de su terreno de forma cuadrada encuentra que su posesión restante es otro cuadrado de área 49m^2 y lado 2m menos que el original. ¿Cuánto mide un lado del original?

Sección 2: Solución de ecuaciones de segundo grado

Contenido 1: Completación de cuadrados en polinomios de la forma x^2+bx+c

P

Transforme el polinomio $x^2+6x+10$ a la forma $(x+p)^2+q$.

S

$x^2+6x+10 = (x^2+6x)+10$ Se agrupan los términos x^2 y $6x$

Cuadrado de la mitad de 6

$= \left[x^2 + 6x + \underbrace{\left(\frac{6}{2}\right)^2}_{\text{suma}}\right] - \underbrace{\left(\frac{6}{2}\right)^2}_{\text{resta}} + 10$ Se suma y resta el cuadrado de la mitad del coeficiente de $6x$

$=(x^2+6x+9)-9+10$ Se agrupan los términos que forman el trinomio cuadrado perfecto x^2+6x+9

$= (x+3)^2-9+10$ Se factoriza el trinomio cuadrado perfecto x^2+6x+9

$= (x+3)^2+1$

Recuerde:
$x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$
$x^2-2ax+a^2=(x-a)^2$

Por lo tanto, $x^2+6x+10=$ **$(x+3)^2+1$**.

C

Para transformar polinomios del tipo x^2+bx+c a la forma $(x+p)^2+q$:

1. Se agrupan los dos términos del trinomio o binomio que tienen la variable x.
2. Se suma a los términos agrupados el cuadrado de la mitad de b, $\left(\frac{b}{2}\right)^2$, y se resta el mismo número después del paréntesis.
3. Se factoriza el trinomio cuadrado perfecto que está dentro del paréntesis.
4. Se reducen las constantes.

A este proceso se le conoce como **completación de cuadrados**.

E

Transforme los siguientes polinomios a la forma $(x+p)^2+q$ utilizando completación de cuadrados:

a) x^2+2x+5 b) $x^2+10x-7$ c) x^2-4x-1 d) x^2+4x

Contenido 2: Completación de cuadrados en polinomios de la forma ax^2+bx+c con $a>1$

P

Transforme el polinomio $2x^2+8x+5$ a la forma $a(x+p)^2+q$ utilizando completación de cuadrados.

S

$2x^2+8x+5=(2x^2+8x)+5$ — Se agrupan los términos $2x^2$ y $8x$

$=2(x^2+4x)+5$ — Se extrae 2 como factor común de $2x^2+8x$

Cuadrado de la mitad de 4

$=2\left[x^2+4x+\underbrace{\left(\frac{4}{2}\right)^2}_{\text{suma}}-\underbrace{\left(\frac{4}{2}\right)^2}_{\text{resta}}\right]+5$ — Se suma y resta el cuadrado de la mitad del coeficiente del término $4x$

$=2[x^2+4x+2^2-2^2]+5$

$=2[x^2+4x+4-4]+5$

$=2[(x^2+4x+4)-4]+5$ — Se agrupan los tres primeros términos en el corchete

$=2[(x+2)^2-4]+5$ — Se factoriza el trinomio cuadrado perfecto x^2+4x+4

$=2(x+2)^2-(2)(4)+5$ — Se aplica la propiedad distributiva

$=2(x+2)^2-8+5$

$=2(x+2)^2-3$

Por lo tanto, $2x^2+8x+5=\mathbf{2(x+2)^2-3}$.

C

Para transformar un polinomio ax^2+bx+c, con $a>1$, a la forma $a(x+p)^2+q$:

1. Se agrupan ax^2 y bx, los términos de segundo y primer grado (en ese orden).
2. Se extrae como factor común de los términos agrupados al número a.
3. Se suma y se resta a los términos agrupados, x^2 y $\frac{b}{a}x$, el cuadrado de la mitad de $\frac{b}{a}$.
4. Se factoriza el trinomio cuadrado perfecto.
5. Se aplica la propiedad distributiva en la expresión resultante del paso anterior.
6. Se efectúan las operaciones indicadas entre números.

E

Transforme los siguientes polinomios a la forma $a(x+p)^2+q$ utilizando completación de cuadrados:

a) $2x^2+4x+3$

b) $3x^2+6x+5$

c) $4x^2-8x+7$

d) $5x^2-10x+6$

e) $2x^2-8x-9$

f) $3x^2-12x-8$

Contenido 3: Solución de ecuaciones de segundo grado por completación de cuadrados (1)

P

Resuelva la ecuación de segundo grado $x^2+4x-5=0$ utilizando completación de cuadrados.

S

$$x^2+4x=5$$

Cuadrado de la mitad de 4

$x^2+4x+\underbrace{\left(\frac{4}{2}\right)^2}_{\text{suma}}-\underbrace{\left(\frac{4}{2}\right)^2}_{\text{resta}}=5$	Se suma y resta $\left(\frac{4}{2}\right)^2$, que es el cuadrado de la mitad del coeficiente del término $4x$
$x^2+4x+2^2-2^2=5$	Se simplifican las fracciones
$x^2+4x+4-4=5$	Se efectúan las potencias 2^2
$x^2+4x+4=5+4$	Se transpone el -4 al miembro derecho
$x^2+4x+4=9$	Se efectúa la suma indicada $5+4$
$(x+2)^2=9$	Se factoriza el trinomio cuadrado perfecto x^2+4x+4
$x+2=\pm3$	Se extrae raíz cuadrada
$x+2=3,\quad x+2=-3$	Se separan las dos ecuaciones de primer grado
$x=3-2,\quad x=-3-2$	
$x=1,\quad x=-5$	

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación $x^2+4x-5=0$ son $\boldsymbol{x=1}$, $\boldsymbol{x=-5}$.

C

Para resolver una ecuación de la forma $x^2+bx+c=0$ utilizando completación de cuadrados:

1. Se transforma la ecuación $x^2+bx+c=0$ a la forma $(x+p)^2=q$ utilizando completación de cuadrados.
2. Se resuelve la ecuación obtenida en 1. extrayendo primero raíz cuadrada a ambos lados y luego transponiendo p al lado derecho de cada una de las ecuaciones de primer grado resultantes.

E

Resuelva las siguientes ecuaciones de segundo grado por completación de cuadrados:

a) $x^2+2x-8=0$

b) $x^2+4x-12=0$

c) $x^2-8x+15=0$

d) $x^2-2x-1=0$

Contenido 4: Solución de ecuaciones de segundo grado por completación de cuadrados (2)

P

Resuelva la ecuación de segundo grado $2x^2+4x-6=0$ por completación de cuadrados.

S

Se dividen ambos lados de la ecuación por 2, el coeficiente de x^2, $\frac{2}{2}x^2+\frac{4}{2}x-\frac{6}{2}=0$, luego resulta $x^2+2x-3=0$.

Se resuelve la ecuación anterior utilizando completación de cuadrados.

$$x^2+2x-3=0$$

$$x^2+2x=3$$

$$\left[x^2+2x+\left(\frac{2}{2}\right)^2\right]-\left(\frac{2}{2}\right)^2=3$$ Se suma y resta $\left(\frac{2}{2}\right)^2$

$$(x^2+2x+1^2)-1^2=3$$ Se simplifican las fracciones

$$x^2+2x+1=3+1$$

$$(x+1)^2=4$$ Se factoriza el trinomio cuadrado perfecto x^2+2x+1

$$x+1=\pm 2$$ Se extrae raíz cuadrada

$$x+1=2, \qquad x+1=-2$$ Se separan las dos ecuaciones de primer grado

$$x=2-1, \qquad x=-2-1$$

$$x=1, \qquad x=-3$$

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación $2x^2+4x-6=0$ son $\boldsymbol{x=1}$, $\boldsymbol{x=-3}$.

C

Para resolver una ecuación de la forma $ax^2+bx+c=0$, con $a>1$, se dividen ambos lados por a y se resuelve la ecuación resultante por completación de cuadrados.

E

Resuelva las siguientes ecuaciones de segundo grado por completación de cuadrados:

a) $2x^2+8x-10=0$

b) $3x^2+12x-36=0$

c) $2x^2-28x-30=0$

d) $5x^2-10x-15=0$

Desafío

Solución de ecuaciones de segundo grado por completación de cuadrados (3)

P

Resuelva la ecuación de segundo grado $4x^2+8x-1=0$ por completación de cuadrados.

S

$4x^2+8x-1=0$

$x^2+2x-\frac{1}{4}=0$ — Se divide ambos lados de la ecuación por 4

$x^2+2x=\frac{1}{4}$ — Se transpone el término independiente al lado derecho de la ecuación

$x^2+2x+\left(\frac{2}{2}\right)^2-\left(\frac{2}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ — Se suma y se resta en el lado izquierdo de la ecuación el cuadrado de la mitad del coeficiente del término $2x$

$x^2+2x+1^2-1^2=\frac{1}{4}$

$x^2+2x+1-1=\frac{1}{4}$

$x^2+2x+1=\frac{1}{4}+1$ — Se transpone el término -1 al miembro derecho de la ecuación

$x^2+2x+1=\frac{5}{4}$

$(x+1)^2=\frac{5}{4}$ — Se factoriza el trinomio cuadrado perfecto

$x+1=\sqrt{\frac{5}{4}}, \quad x+1=-\sqrt{\frac{5}{4}}$ — Se extrae raíz cuadrada y se separa en 2 ecuaciones de primer grado

$x+1=\frac{\sqrt{5}}{2}, \quad x+1=-\frac{\sqrt{5}}{2}$

$$\boldsymbol{x=-1+\frac{\sqrt{5}}{2},\ x=-1-\frac{\sqrt{5}}{2}}$$

E

Resuelva las siguientes ecuaciones de segundo grado por completación de cuadrados:

a) $2x^2+8x-3=0$

b) $3x^2+12x-1=0$

Contenido 5: Solución de ecuaciones de segundo grado, utilizando la fórmula general

Fórmula General:

Para resolver una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2+bx+c=0$ con $a\neq 0$, se puede utilizar la fórmula:

$$\boldsymbol{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

A esta fórmula se le conoce como **fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado**. Para encontrar las soluciones de una ecuación de segundo grado se sustituyen los valores de a, b y c, en la fórmula general.

Ejemplo Resuelva la ecuación $x^2+5x+5=0$ utilizando la fórmula general:

De la ecuación $a=1$, $b=5$ y $c=5$, sustituyendo estos valores en la fórmula general,

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{(5)^2-(4)(1)(5)}}{(2)(1)}=\frac{-5\pm\sqrt{25-20}}{2}=\frac{-5\pm\sqrt{5}}{2}$$

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación $x^2+5x+5=0$ son:

$$\boldsymbol{x=\frac{-5+\sqrt{5}}{2},\ x=\frac{-5-\sqrt{5}}{2}}$$

E

Resuelva las siguientes ecuaciones de segundo grado utilizando fórmula general:

a) $x^2-5x+5=0$

b) $x^2+7x+2=0$

c) $2x^2-5x+1=0$

d) $3x^2-6x+2=0$

Observación

Se puede resolver la ecuación en el ejemplo utilizando completación de cuadrados.

$$x^2+5x+5=0$$

$$\left[x^2+5x+\left(\frac{5}{2}\right)^2\right]-\left(\frac{5}{2}\right)^2+5=0$$

$$\left[x^2+5x+\frac{25}{4}\right]-\frac{25}{4}+5=0$$

$$\left[x^2+5x+\frac{25}{4}\right]-\frac{5}{4}=0$$

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{5}{4}=0$$

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$$

$$x+\frac{5}{2}=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$x=-\frac{5}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{5}}{2}$$

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación $x^2+5x+5=0$ son:

$$\boldsymbol{x=\frac{-5+\sqrt{5}}{2},\ x=\frac{-5-\sqrt{5}}{2}}$$

¿Cuál manera es más fácil, fórmula general o completación de cuadrados?

Desafío

Fórmula general de una ecuación de segundo grado

P Dada la ecuación de segundo grado $ax^2+bx+c=0$ con $a\neq0$, demuestre que sus soluciones están dadas por la fórmula $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Demostración

Se transpone el término independiente, obteniendo:

$$ax^2+bx=-c,$$

y luego, se divide por a ambos lados de la ecuación para obtener:

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

Se completa cuadrado en $x^2+\frac{b}{a}x$. Para ello, se le suma a esta expresión la constante:

$$\left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2,$$

sin embargo, para no alterar la igualdad se debe sumar también esta constante al lado derecho, resultando:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

Observe que el lado izquierdo es un trinomio cuadrado perfecto, así que:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

Se extrae raíz cuadrada a ambos lados de la ecuación anterior y resulta:

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Se despeja la variable:

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación $ax^2+bx+c=0$ están determinadas por la fórmula

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Contenido 6: Solución de ecuaciones de segundo grado por factorización (1)

P

Resuelva las siguientes ecuaciones de segundo grado utilizando factorización:

a) $(x+2)(x-3)=0$ b) $x^2+3x+2=0$

S

a) Se observa que en la ecuación $(x+2)(x-3)=0$ el lado izquierdo está factorizado, luego se siguen los siguientes pasos:

$x+2=0,\ x-3=0$ Se iguala a cero cada factor

$x=-2,\quad x=3$ Se resuelven las dos ecuaciones de primer grado

Por tanto, las soluciones de $(x+2)(x-3)=0$ son $\boldsymbol{x=-2}$, $\boldsymbol{x=3}$.

Para números reales cualesquiera a,b se cumple que:

$a\cdot b=0$

si y solo si

$a=0$ o $b=0$

b) En este caso el lado izquierdo de la ecuación $x^2+3x+2=0$ no está factorizado, luego

$x^2+3x+2=0$

$(x+2)(x+1)=0$ Se factoriza x^2+3x+2

$x+2=0,\quad x+1=0$ Se iguala a cero cada factor

$x=-2,\quad x=-1$ Se resuelven las dos ecuaciones de primer grado

Por tanto, las soluciones de $x^2+3x+2=0$ son $\boldsymbol{x=-2}$, $\boldsymbol{x=-1}$.

C

Para resolver ecuaciones de la forma $x^2+(a+b)x+ab=0$ se realizan los siguientes pasos:
1. Se factoriza el lado izquierdo de la ecuación: $(x+a)(x+b)=0$.
2. Se iguala a cero cada factor: $x+a=0$, $x+b=0$.
3. Se resuelven las ecuaciones de primer grado: $x=-a$, $x=-b$.

E

Resuelva las siguientes ecuaciones de segundo grado utilizando factorización:

a) $(x-2)(x+3)=0$

b) $(x-5)(x-3)=0$

c) $x^2+4x-5=0$

d) $x^2+4x-12=0$

e) $x^2-14x-15=0$

f) $x^2-2x-3=0$

Contenido 7: Solución de ecuaciones de segundo grado por factorización (2)

P

Resuelva las siguientes ecuaciones de segundo grado utilizando factorización:

a) $x^2+2x=0$ b) $x^2+2x+1=0$

S

a) $x^2+2x=0$

$x(x+2)=0$

$x=0, \quad x+2=0$

$\mathbf{x=0}, \quad \mathbf{x=-2}$

En las ecuaciones de la forma $x^2+bx=0$; $x=0$ siempre es solución.

b) $x^2+2x+1=0$

$(x+1)^2=0$

$x+1=0$

$\mathbf{x=-1}$

Las ecuaciones de la forma $x^2+2ax+a^2=0$, $x^2-2ax+a^2=0$ tienen la solución única $x=-a$, $x=a$ respectivamente.

Se observa que $x^2+2x+1=0$ tiene una única solución.

C

Para resolver ecuaciones de la forma $ax^2+bx=0$:

1. Se factoriza el lado izquierdo de la ecuación utilizando factor común monomio resultando la ecuación $x(ax+b)=0$.
2. Se iguala a cero cada factor: $x=0$, $ax+b=0$
3. Se resuelve la segunda ecuación de primer grado, ya que la primera está resuelta.

Para resolver ecuaciones de la forma $x^2+2ax+a^2=0$:

1. Se factoriza el trinomio cuadrado perfecto del lado izquierdo de la ecuación obteniendo $(x+a)^2=0$.
2. Se extrae raíz cuadrada a ambos lados de la ecuación resultando $x+a=0$.
3. Se resuelve la ecuación de primer grado transponiendo a al lado derecho de donde se obtiene la solución $x=-a$.

E

Resuelva las siguientes ecuaciones de segundo grado utilizando factorización:

a) $x^2+5x=0$ b) $x^2-3x=0$ c) $2x^2-6x=0$

d) $x^2+4x+4=0$ e) $x^2+6x+9=0$ f) $x^2-8x+16=0$

Contenido 8: Comprobemos lo aprendido 2

E

1. Resuelva las siguientes ecuaciones de segundo grado por completación de cuadrados:

a) $x^2+8x-20=0$

b) $x^2-4x+2=0$

c) $3x^2+18x-21=0$

d) $2x^2-20+46=0$

2. Resuelva las siguientes ecuaciones utilizando la fórmula general:

a) $3x^2+5x+2=0$

b) $2x^2+x-1=0$

c) $4x^2-6x+1=0$

d) $2x^2-2x-1=0$

3. Resuelva las siguientes ecuaciones de segundo grado por factorización, si es necesario:

a) $(x+2)(x+8)=0$

b) $(x-5)(x+9)=0$

c) $x^2-6x+5=0$

d) $x^2-2x-24=0$

e) $x^2+7x=0$

f) $3x^2-12x=0$

g) $x^2+10x+25=0$

h) $x^2-12x+36=0$

Sección 3: Aplicaciones de las ecuaciones de segundo grado

Contenido 1: Naturaleza de las soluciones de una ecuación de segundo grado

P

Determine cuántas soluciones en los números reales tienen las siguientes ecuaciones de segundo grado.

a) $x^2+4x-1=0$ b) $x^2+4x+4=0$ c) $x^2+4x+5=0$

S

Se sustituyen en la fórmula general los valores respectivos de a, b y c de cada una de las ecuaciones anteriores:

a) En $x^2+4x-1=0$,
$a=1$, $b=4$, $c=-1$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2-(4)(1)(-1)}}{(2)(1)} \\ &= \frac{-4 \pm \sqrt{16+4}}{2} \\ &= \frac{-4 \pm \sqrt{20}}{2} \\ &= \frac{-4 \pm 2\sqrt{5}}{2} \\ &= -2 \pm \sqrt{5} \end{aligned}$$

La ecuación dada tiene **dos soluciones** diferentes en los números reales: $-2+\sqrt{5}$ y $-2-\sqrt{5}$.

b) En $x^2+4x+4=0$,
$a=1$, $b=4$, $c=4$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2-(4)(1)(4)}}{(2)(1)} \\ &= \frac{-4 \pm \sqrt{16-16}}{2} \\ &= \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{2} \\ &= -2 \end{aligned}$$

La ecuación tiene **una solución** en los números reales: -2.

c) En $x^2+4x+5=0$,
$a=1$, $b=4$, $c=5$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2-(4)(1)(5)}}{(2)(1)} \\ &= \frac{-4 \pm \sqrt{16-20}}{2} \\ &= \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} \end{aligned}$$

La ecuación **no tiene solución** en los números reales por que $\sqrt{-4}$ no es un número real.

En conclusión, las ecuaciones de segundo grado pueden tener dos soluciones reales distintas, una solución real o ninguna solución en los números reales.

C

El hecho de que la ecuación $ax^2+bx+c=0$ tenga dos soluciones distintas, una única solución o ninguna solución real depende de la cantidad $D=b^2-4ac$, llamada **discriminante**, que aparece en el radical de la fórmula general

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Discriminante} \\ D=b^2-4ac\end{array}}$$

1. Si D es positivo, la ecuación de segundo grado tiene **dos soluciones** distintas en los números reales.
2. Si $D=0$, la ecuación de segundo grado tiene **una solución** en los números reales.
3. Si D es negativo, la ecuación de segundo grado **no tiene solución** en los números reales, debido a que la raíz cuadrada de números negativos no es un número real.

Ejemplo Utilice el valor del discriminante para saber el número de soluciones de las siguientes ecuaciones de segundo grado en los números reales.

a) $2x^2+5x+3=0$ b) $x^2-6x+9=0$ c) $3x^2+2x+1=0$

Se sustituye en la expresión $D=b^2-4ac$ de la fórmula general los valores a, b y c de cada ecuación.

a) $2x^2+5x+3=0$

$a=2$, $b=5$, $c=3$

$D=5^2-(4)(2)(3)$

$=25-24$

$=1$

Como $D=1>0$, la ecuación tiene **dos soluciones distintas en los números reales.**

b) $x^2-6x+9=0$

$a=1$, $b=-6$, $c=9$

$D=(-6)^2-(4)(1)(9)$

$=36-36$

$=0$

Como $D=0$, la ecuación tiene **una solución en los números reales.**

c) $3x^2+2x+1=0$

$a=3$, $b=2$, $c=1$

$D=2^2-(4)(3)(1)$

$=4-12$

$=-8$

Como $D=-8<0$ la ecuación **no tiene solución en los números reales.**

E

Utilice el valor del discriminante para saber el número de soluciones de las siguientes ecuaciones de segundo grado en los números reales:

a) $x^2+3x-5=0$ b) $x^2+2x+1=0$ c) $x^2+3x+5=0$

d) $2x^2+3x-2=0$ e) $4x^2+12x+9=0$ f) $3x^2-2x+4=0$

Contenido 2: Construcción de una ecuación de segundo grado de la forma $x^2+bx+c=0$, a partir de sus soluciones

P Determine la ecuación de segundo grado $x^2+bx+c=0$ cuyas soluciones son $x=2$, $x=3$.

S

La ecuación de segundo grado cuyas soluciones son 2 y 3, se obtiene de la siguiente manera:

1. Se iguala cada solución de la ecuación de segundo grado a la variable x: $x=2$, $x=3$.
2. Se transponen los números 2 y 3 al lado izquierdo: $x-2=0$, $x-3=0$.
3. Se multiplican lado a lado ambas ecuaciones:
$$(x-2)(x-3)=0$$
4. Se efectúa el producto del lado izquierdo:
$$x^2+(-2-3)x+(-2)(-3)=0$$
$$x^2-5x+6=0$$

Por lo tanto, la ecuación buscada es $\boldsymbol{x^2-5x+6=0}$.

C

Dados los números p y q se puede obtener la ecuación de segundo grado $x^2+bx+c=0$ y las siguientes relaciones entre los coeficientes de estas y los números dados:

$$\boldsymbol{p+q=-b}$$
$$\boldsymbol{pq=c}$$

En palabras:

La suma de los números p y q es igual a $-b$, el opuesto del coeficiente de x.

El producto de p y q es igual al término constante c.

Es claro que la ecuación $x^2+bx+c=0$ queda determinada cuando se conocen sus raíces.

Ejemplo Determine la ecuación de segundo grado $x^2+bx+c=0$ cuyas soluciones son: $x=2+\sqrt{3}$, $x=2-\sqrt{3}$.

Se aplica la conclusión anterior y se encuentra que $(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4$, siendo 4 el opuesto de $b=-4$.

Se efectúa ahora el producto de los dos números dados

$$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=4-3=1$$

Se observa que $c=1$. Por lo tanto, la ecuación buscada es $\boldsymbol{x^2-4x+1=0}$.

E

Determine la ecuación de segundo grado $x^2+bx+c=0$ cuyas soluciones son:

a) $x=3$, $x=4$ b) $x=4$, $x=-5$ c) $x=-3$, $x=-5$

d) $x=\frac{1}{2}$, $x=3$ e) $x=1+\sqrt{2}$, $x=1-\sqrt{2}$ f) $x=-1+\sqrt{2}$, $x=-1-\sqrt{2}$

Contenido 3: Comprobemos lo aprendido 3

E

1. Determine el número de soluciones de las siguientes ecuaciones de segundo grado utilizando exclusivamente el criterio del discriminante:

a) $x^2+3x-10=0$ b) $x^2-4x+4=0$ c) $x^2+3x+7=0$

d) $9x^2+6x+1=0$ e) $5x^2-3x+1=0$ f) $3x^2-4x-1=0$

2. Determine la ecuación de segundo grado $x^2+bx+c=0$ cuyas soluciones son:

a) $x=2$, $x=5$ b) $x=3$, $x=-2$ c) $x=-1$, $x=-4$

d) $x=\frac{1}{3}$, $x=1$ e) $x=1+\sqrt{3}$, $x=1-\sqrt{3}$ f) $x=-1+\sqrt{3}$, $x=-1-\sqrt{3}$

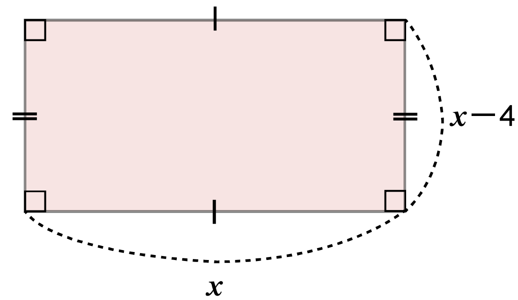
Contenido 4: Aplicación de las ecuaciones de segundo grado (1)

P La casa de Doña María tiene una sala rectangular cuya área es $32\,m^2$ y su largo excede al ancho en $4m$. ¿Cuáles son sus dimensiones?

S

Sea x el largo de la sala, que obviamente es un número positivo.

Como el largo excede en $4m$ al ancho, este se representa por $x-4$, como se sugiere en la figura de la derecha.



Utilizando la fórmula

Área del rectángulo = (largo) × (ancho)

y el valor dado del área se obtiene la ecuación

$$x(x-4)=32$$

que aplicando la propiedad distributiva en el lado izquierdo de la ecuación se transforma en

$$x^2-4x=32$$

Se transpone 32 al lado izquierdo

$$x^2-4x-32=0$$

Se factoriza el trinomio $x^2-4x-32$

$$(x-8)(x+4)=0$$

Entonces

$$x-8=0, \quad x+4=0$$
$$x=8, \quad x=-4$$

Como x representa el largo y este debe ser un número positivo, entonces $x=8$, por lo tanto el ancho de la sala es $x-4=8-4=4$.

Luego, las dimensiones de la sala de doña María son: **8*m* de largo** y **4*m* de ancho.**

E

a) Alicia desea construir en el patio de su casa una piscina cuyo largo exceda a su ancho en $7m$, y el área sea $60\,m^2$.¿Cuáles deben ser las dimensiones de la piscina?

b) Calcule las dimensiones de un terreno rectangular, si se sabe que este tiene $5\,m$ más de largo que de ancho y un área de $84\,m^2$.

c) La base de un rectángulo mide $5\,cm$ más que su altura. Si se disminuye su altura en $2\,cm$, el rectángulo obtenido tiene un área de $60\,cm^2$. Calcule los lados del rectángulo original.

Contenido 5: Aplicación de las ecuaciones de segundo grado (2)

Ejemplo 1 Un número entero positivo es el triple de otro y la diferencia de sus cuadrados es 72. ¿Cuáles son los números?

Sea x uno de los números, entonces su cuadrado es x^2; el otro número es $3x$ y como es un entero positivo, x debe ser positivo.
Dado que la diferencia de sus cuadrados es igual a 72, podemos plantear la ecuación de segundo grado siguiente:

$$(3x)^2-x^2=72$$
$$9x^2-x^2=72$$
$$8x^2=72$$
$$x^2=\frac{72}{8}$$
$$x^2=9$$
$$x=\pm 3$$

Como los números buscados son enteros y positivos entonces el número menor es 3, y el otro es $(3)(3)=9$. Por lo tanto, los números son **3** y **9**.

Se observa que se ha descartado el valor -3 para x por que se está tratando con enteros positivos.

E1

a) Un número entero positivo es el doble de otro y la diferencia de sus cuadrados es 48. ¿Cuál es este número?

b) Halle dos números enteros consecutivos tales que la suma de sus cuadrados sea 145.

Ejemplo 2 Dentro de 11 años la edad de Pedro será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 13 años. Calcule la edad actual de Pedro.

Si x es la edad actual de Pedro, dentro de 11 años su edad será $x+11$ y hace 13 años tenía $x-13$.
Entonces

$$x+11=\frac{(x-13)^2}{2}$$
$$(x+11)(2)=(x-13)^2$$
$$2x+22=x^2-26x+169$$
$$x^2-26x-2x+169-22=0$$
$$x^2-28x+147=0$$
$$(x-21)(x-7)=0$$
$$x-21=0, \qquad x-7=0$$
$$x=21, \qquad x=7$$

Por las condiciones del problema, $x=7$ no es solución. Por lo tanto, la edad de Pedro es **21 años**.

E2

a) La suma de dos números positivos es 10 y la suma de sus cuadrados es 58. Halle ambos números.

b) Si al cuadrado de la edad de una persona se le resta el triple de la misma, se obtiene nueve veces su edad. ¿Cuántos años tiene la persona?

Desafío

Más aplicaciones de las ecuaciones de segundo grado

E

a) Si duplicamos el lado de un cuadrado, su área aumenta en $147 cm^2$. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado?

b) Un terreno rectangular ocupa $128 m^2$. Calcule sus dimensiones sabiendo que un lado es el doble del otro.

c) El largo de una sala rectangular es tres metros mayor que el ancho. ¿Cuál debe ser la longitud del ancho para que su área sea $40 m^2$?

d) ¿Qué número multiplicado por tres es 40 unidades menor que su cuadrado?

e) Si al cuadrado de un número se le resta su triple, se obtiene como resultado 130. ¿Cuál es el número?

f) Encuentre un número tal que dos veces su cuadrado exceda al propio número en 45.

g) Un triángulo tiene un área de $24 cm^2$. Si la altura mide $2 cm$ más que la base, ¿cuánto mide la altura?

h) Si al cuadrado de un número se le suma su cuádruple, se obtiene como resultado 32. ¿Cuáles son los números?

Unidad 3

Funciones de Segundo Grado

Sección 1	Introducción a las funciones de segundo grado
Sección 2	Función de segundo grado
Sección 3	Valor máximo o mínimo de una función de segundo grado y su aplicación

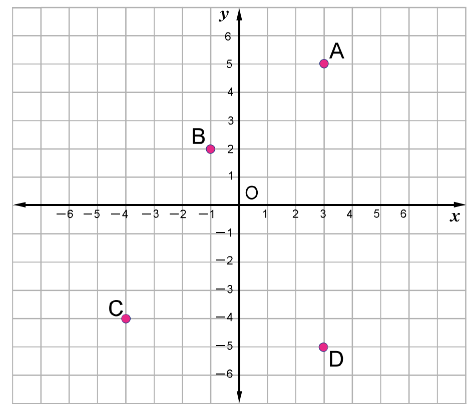
Sección 1: Introducción a las funciones de segundo grado

Contenido 1: Cuadrantes del plano cartesiano

P

Dados los puntos A, B, C y D en el plano cartesiano, determine sus coordenadas e indique el signo que toma cada una de ellas.

Recuerde que:
Un punto P del plano tiene coordenadas (x, y). A x se le llama abscisa y a y se le llama ordenada.



S

Las coordenadas del punto A son (3, 5). Ambas coordenadas son positivas.

Las coordenadas del punto B son (−1, 2). Su abscisa −1 es negativa y su ordenada 2 es positiva.

Las coordenadas del punto C son (−4, −4). Ambas coordenadas son negativas.

Las coordenadas del punto D son (3, −5). Su abscisa 3 es positiva y su ordenada −5 es negativa.

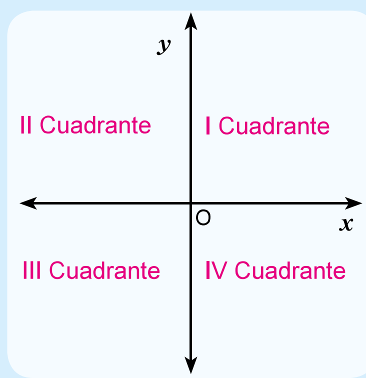
C

El plano cartesiano está dividido en cuatro cuadrantes contados en sentido antihorario a como se muestra en la figura de la derecha.

Todo punto que se ubique en el:

- ✓ I Cuadrante tiene abscisa y ordenada positiva.
- ✓ II Cuadrante tiene abscisa negativa y ordenada positiva.
- ✓ III Cuadrante tiene abscisa y ordenada negativa.
- ✓ IV Cuadrante tiene abscisa positiva y ordenada negativa.

Los puntos sobre los ejes x y y no se incluyen en ningún cuadrante.



Ejemplo

Determine el cuadrante en el que se ubica cada uno de los siguientes puntos:

a) A(−3, 2) b) B(1, −4)

a) El punto A está en el II Cuadrante, porque la abscisa es negativa y la ordenada es positiva.

b) El punto B está en el IV Cuadrante, porque la abscisa es positiva y la ordenada es negativa.

E

Determine el cuadrante en el que se ubica cada uno de los siguientes puntos:

a) A(2, 3) b) B(−3, −1) c) C(2, 5) d) D(−1, 4)

e) E(−2, −5) f) $F\left(3, -\frac{1}{2}\right)$ g) $G\left(-3, \frac{1}{2}\right)$ h) $H\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$

Contenido 2: Función de primer grado

P

a) Complete la siguiente tabla para la función $y=2x+3$ a partir de los valores de la función $y=2x$:

x	-2	-1	0	1	2
$2x$	-4	-2	0	2	4
$2x+3$					

b) Trace la gráfica de las funciones $y=2x$ y $y=2x+3$ en el mismo plano cartesiano.

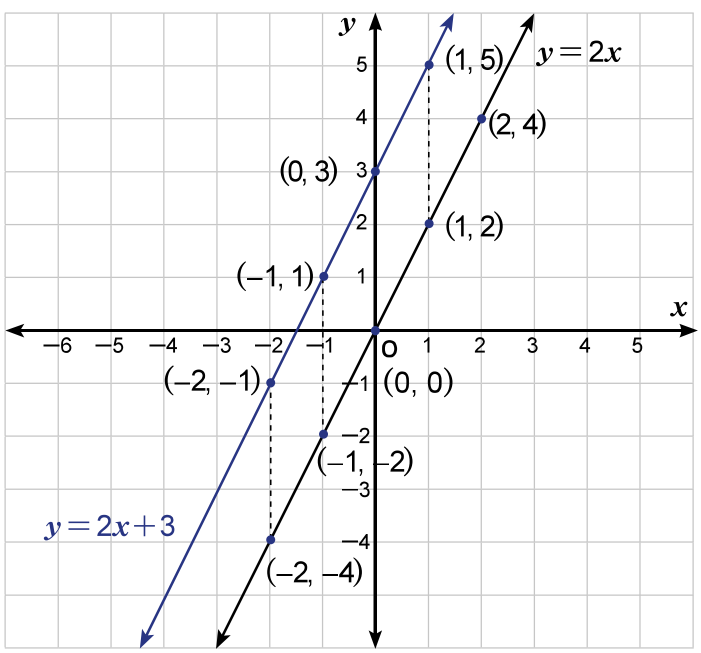
S

a) Cada valor de la función $y=2x+3$ se obtiene sumándole 3 unidades a cada valor de $y=2x$.

x	-2	-1	0	1	2
$2x$	-4	-2	0	2	4
$2x+3$	**-1**	**1**	**3**	**5**	**7**

$+3$

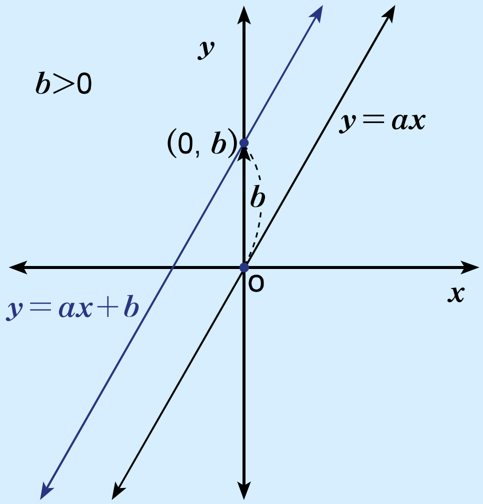
b)

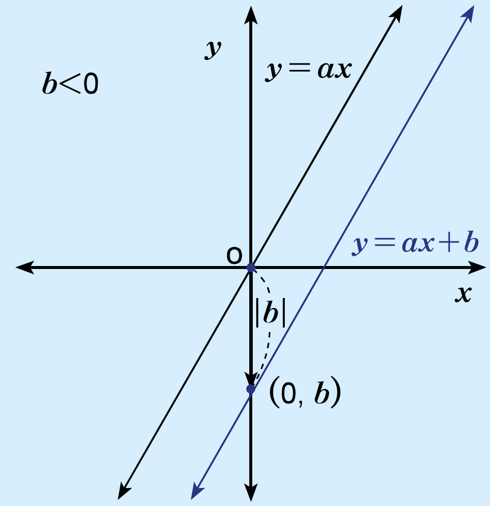


Se observa que la gráfica de $y=2x+3$ pasa por (0, 3), y esta se obtiene de trasladar verticalmente hacia arriba 3 unidades la gráfica de $y=2x$.

C

La gráfica de la función de primer grado $y=ax+b$, con $a\neq 0$, es una recta que se obtiene al trasladar la gráfica de $y=ax$ verticalmente b unidades hacia arriba, si $b>0$, y $|b|$ unidades hacia abajo cuando $b<0$. Dicha recta pasa por el punto $(0, b)$.

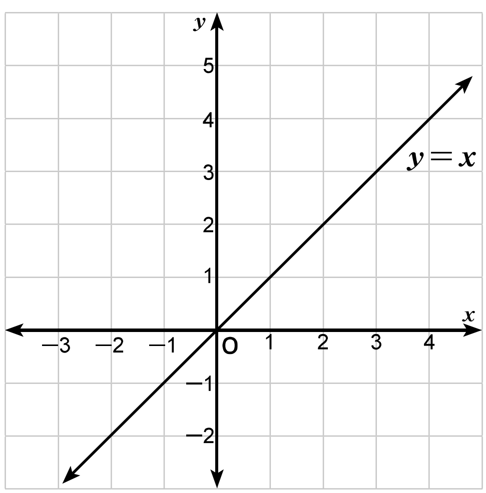




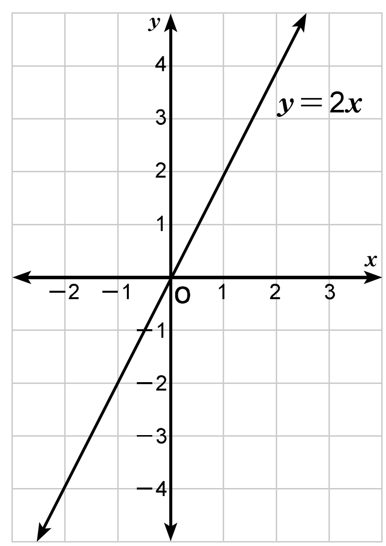
E

1. Trace la gráfica de cada función que se propone a partir de la gráfica dada:

a) $y=x+3$



b) $y=2x-2$



2. Trace la gráfica que corresponde a cada una de las siguientes funciones de primer grado:

a) $y=x-3$

b) $y=-2x+3$

Contenido 3: Gráfica y características de la función $y = x^2$

P

a) Complete la siguiente tabla utilizando la función $y = x^2$.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y							

b) Ubique en el plano cartesiano los puntos formados en la tabla y trace la gráfica.

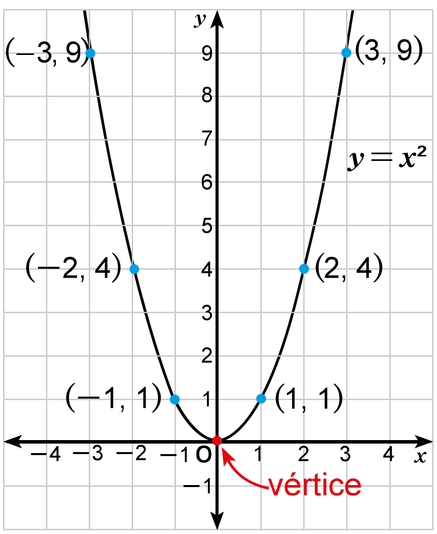
S

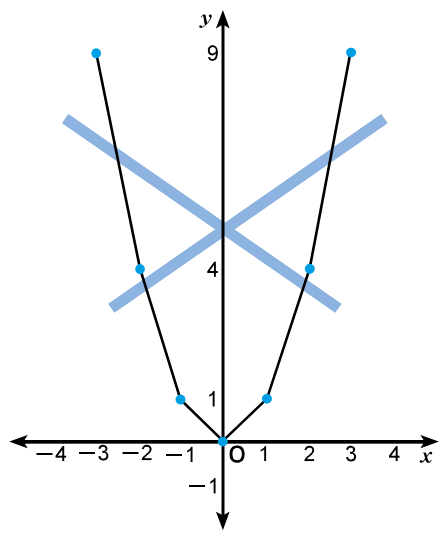
a) Cada valor de y se obtiene elevando al cuadrado el valor dado de x, por ejemplo:

Para $x = -2$, $y = (-2)^2 = (-2)(-2) = 4$
Para $x = 2$, $y = 2^2 = (2)(2) = 4$

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	**9**	**4**	**1**	**0**	**1**	**4**	**9**

b) Se traza la gráfica en el plano cartesiano a partir de los valores de la tabla anterior. Se observa que la línea que une esos puntos debe ser curva, la posibilidad de que sea uniendo segmentos se descarta por la figura de la derecha.





C

La función de segundo grado o cuadrática $y = x^2$, tiene las siguientes características:

- ✓ Su dominio, los valores que toma x, está formado por todos los números reales (positivos y cero).
- ✓ Su rango, o los valores que toma y, está constituido por los números reales no negativos (positivos y cero).
- ✓ La gráfica que le corresponde es una **parábola** situada en los dos primeros cuadrantes, con vértice en el origen (0, 0), es simétrica respecto a la parte positiva del eje y y se abre hacia arriba (cóncava hacia arriba).

E

Calcule los valores de y en la función $y = x^2$ para $x = -5, -4, 4, 5$.

Contenido 4: Gráfica y características de la función $y = ax^2$ con $a > 0$

P

a) Complete la siguiente tabla para la función $y = 2x^2$ a partir de los valores de $y = x^2$.

x	-2	-1	0	1	2
x^2	4	1	0	1	4
$2x^2$					

b) Trace la gráfica de las funciones $y = x^2$ y $y = 2x^2$ en el mismo plano cartesiano, auxiliándose con la tabla.

c) ¿Qué relación existe entre los valores de y para ambas funciones cuando $x = -1$ o $x = 2$?

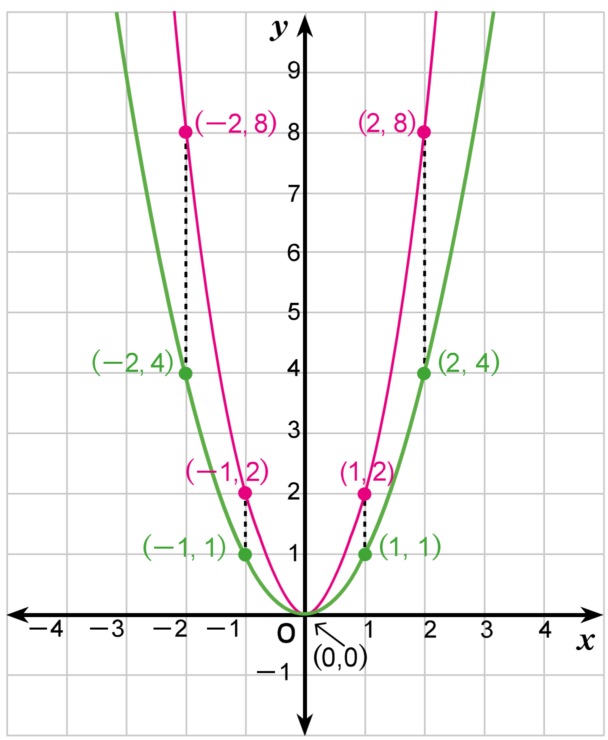
S

a) Cada valor de la función $y = 2x^2$ se obtiene al multiplicar por 2 los valores de $y = x^2$. La tabla para algunos valores de x es la siguiente:

x	-2	-1	0	1	2
x^2	4	1	0	1	4
$2x^2$	**8**	**2**	**0**	**2**	**8**

×2

b) Se ubican en el plano cartesiano los puntos obtenidos de la tabla para ambas funciones y luego se trazan sus gráficas.

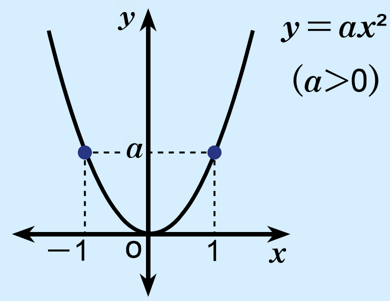


c) Puede observarse, por ejemplo, que $(-1, 1)$ se halla en la gráfica de $y = x^2$, mientras que $(-1, 2)$ pertenece a la otra parábola; también, $(2, 4)$ está en la primera, mientras que $(2, 8)$ se aloja en la segunda, etc. Es decir, el valor de y en la función $y = 2x^2$ es el doble del valor correspondiente de $y = x^2$.

C

La función de segundo grado $y = ax^2$ con $a > 0$, tiene las siguientes características:

- ✓ Su dominio, o los valores de x, está formado por todos los números reales.
- ✓ Su rango, o los valores de y, son los números reales no negativos (positivos y cero).
- ✓ La gráfica que le corresponde es una parábola con vértice en el origen (0, 0), simétrica respecto al eje y y cóncava hacia arriba.



E

a) Complete la siguiente tabla para la función $y = 3x^2$ y trace la gráfica, con ayuda de los puntos obtenidos.

x	-2	-1	0	1	2
$3x^2$					

b) Trace la gráfica de $y = 4x^2$, encuentre el vértice e identifique la dirección de la parábola cóncava.

Contenido 5: Gráfica y características de la función $y = ax^2$ con $a < 0$

P

a) Complete la siguiente tabla para la función $y = -x^2$ a partir de los valores de la función $y = x^2$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$-x^2$							

b) ¿Qué relación existe entre los valores de y para ambas funciones cuando $x = -2$ o $x = 3$?

c) Trace la gráfica de las funciones $y = x^2$ y $y = -x^2$ en el mismo plano cartesiano.

d) Establezca semejanzas y diferencias en las gráficas de $y = x^2$ y $y = -x^2$.

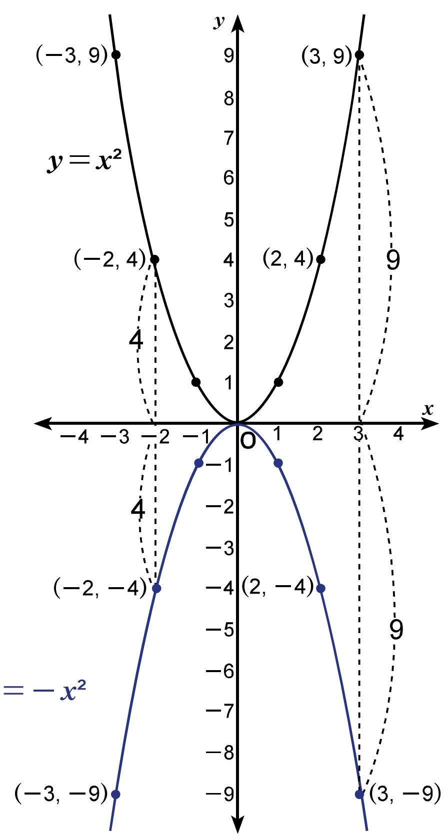
S

a) Cada valor de la función $y = -x^2$ se obtiene al multiplicar por -1 los valores de la función $y = x^2$. De acuerdo a esto se completa la tabla de la siguiente manera:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	
x^2	9	4	1	0	1	4	9	$\times(-1)$
$-x^2$	**-9**	**-4**	**-1**	**0**	**-1**	**-4**	**-9**	

b) De acuerdo a la tabla anterior, para $x = -2$ o $x = 3$ se tienen los puntos $(-2, 4)$ y $(3, 9)$ en la función $y = x^2$, mientras que para $y = -x^2$ se tienen los puntos $(-2, -4)$ y $(3, -9)$, se observa que las ordenadas de los puntos respectivos son números opuestos.

c) Se ubican en el plano cartesiano los puntos obtenidos en la tabla para ambas funciones y luego se trazan sus gráficas.



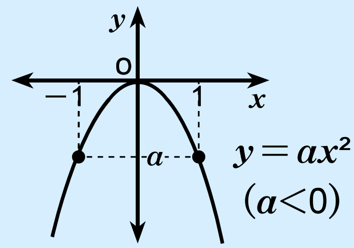
d) **Semejanzas:** Ambas gráficas tocan al eje x en el mismo punto, el vértice $(0, 0)$ y tienen la misma abertura y el mismo eje de simetría.

Diferencias: Una es cóncava hacia abajo y la otra es cóncava hacia arriba.

C

La función de segundo grado $y = ax^2$ con $a < 0$, tiene las siguientes características:

- ✓ Su dominio está formado por todos los números reales.
- ✓ Su rango está constituido por los números reales no positivos.
- ✓ La gráfica asociada es una parábola con vértice en el origen $(0, 0)$, simétrica respecto al eje y y cóncava hacia abajo.



E

Trace las gráficas de las funciones, encuentre el vértice e identifique la dirección de las parábolas cóncavas.

a) $y = -2x^2$

b) $y = -3x^2$

Contenido 6: Comprobemos lo aprendido 1

E

1. Trace la gráfica de las siguientes funciones de primer grado:

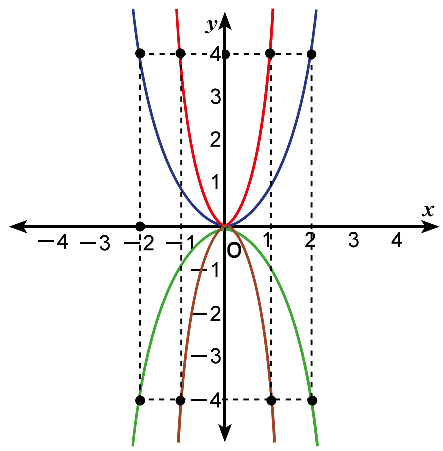
   a) $y = x + 2$ b) $y = 3x$ c) $y = 3x - 2$

2. Determine las características de las siguientes funciones de segundo grado y trace su gráfica:

   a) $y = 3x^2$ b) $y = -5x^2$

3. A cada función de segundo grado dada en los incisos siguientes asocie en el espacio en blanco el color de la gráfica que le corresponde.

   a) $y = -4x^2$ ____________
   b) $y = x^2$ ____________
   c) $y = -x^2$ ____________
   d) $y = 4x^2$ ____________



4. Haga la misma asociación del ejercicio anterior escribiendo en el espacio en blanco un punto que pertenezca a la gráfica correspondiente.

Sección 2: Función de segundo grado

Contenido 1: Gráfica y características de la función $y = ax^2 + c$

P

a) Complete la siguiente tabla para $y = x^2 + 3$ a partir de los valores de la función $y = x^2$.

x	-2	-1	0	1	2
x^2	4	1	0	1	4
x^2+3					

b) Trace la gráfica de las funciones $y = x^2$ y $y = x^2 + 3$ en el mismo plano cartesiano.

c) Establezca semejanzas y diferencias entre las gráficas de las funciones $y = x^2$ y $y = x^2 + 3$.

d) ¿Qué relación existe entre los valores de y para ambas funciones cuando $x = -1$ o $x = 2$?

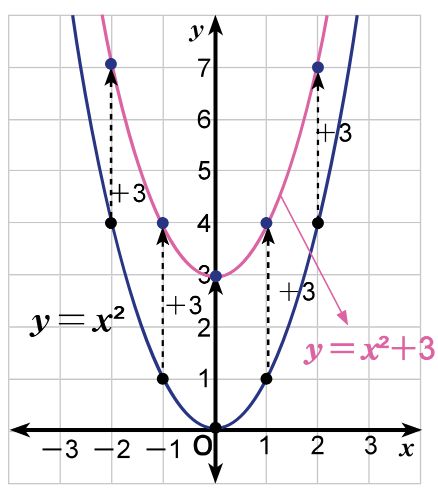
S

a) Cada valor de la función $y = x^2 + 3$ se obtiene sumando 3 unidades al valor x^2 que se logra de $y = x^2$, de manera que la tabla queda completada así:

x	-2	-1	0	1	2
x^2	4	1	0	1	4
x^2+3	**7**	**4**	**3**	**4**	**7**

$+3$

b) Se traza la gráfica de ambas funciones en el mismo plano cartesiano:



c) **Semejanzas:** Ambas son parábolas cóncavas hacia arriba, tienen el mismo eje de simetría.

Diferencias: Tienen distintos vértices y solamente una de ellas toca al eje x.

d) Al observar la tabla se encuentra que para $x = 1$, el valor de $y = x^2 + 3$ es 3 unidades mayor que el valor x^2 de $y = x^2$. Lo mismo ocurre para $x = 2$; en general, cada valor de la función $y = x^2 + 3$ es 3 unidades mayor que el valor de la función $y = x^2$.

C

La función de segundo grado $y = ax^2 + c$, donde $a \neq 0$, tiene las siguientes características:

1. Su dominio está formado por los números reales.
2. Su rango, o los valores de y, es el conjunto de números mayores o iguales a c, si $a > 0$ o el conjunto de los números menores o iguales a c si $a < 0$.
3. La gráfica correspondiente es una parábola con vértice en $(0, c)$, simétrica respecto al eje y y cóncava hacia arriba si $a > 0$ o cóncava hacia abajo si $a < 0$. Dicha parábola se obtiene al trasladar la gráfica de $y = ax^2$ verticalmente c unidades hacia arriba si $c > 0$, y $|c|$ unidades hacia abajo cuando $c < 0$.

E

Trace las gráficas de las funciones, encuentre el vértice e identifique la dirección de las parábolas cóncavas.

a) $y = x^2 + 2$

b) $y = 2x^2 - 1$

c) $y = -2x^2 + 1$

Contenido 2: Gráfica y características de la función $y=a(x-h)^2$

P

a) Complete la siguiente tabla para $y=(x-1)^2$ a partir de los valores de la función $y=x^2$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$(x-1)^2$							

b) Trace la gráfica de las funciones $y=x^2$ y $y=(x-1)^2$ en el mismo plano cartesiano.
c) Establezca semejanzas y diferencias entre las gráficas obtenidas.

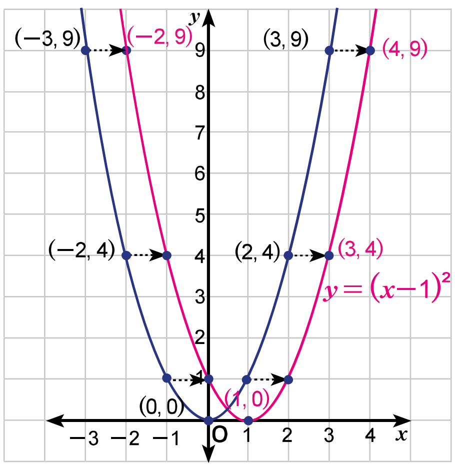
S

a)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$(x-1)^2$	**16**	**9**	**4**	**1**	**0**	**1**	**4**

Se observa que cada valor de la función $y=(x-1)^2$ se obtiene al trasladar 1 unidad a la derecha los valores de x en la función $y=x^2$.

b) Se traza la gráfica de ambas funciones en el mismo plano cartesiano:



Se observa que cada punto de la función $y=(x-1)^2$ se obtiene trasladando cada punto de $y=x^2$ una unidad a la derecha.

Por ejemplo, $(4, 9)$ de la primera función es un traslado de $(3, 9)$; $(-2, 9)$ lo es de $(-3, 9)$, etc.

c) Al comparar las gráficas de ambas funciones se observa lo siguiente:
Semejanzas: Ambas gráficas son parábolas que abren hacia arriba.
Diferencias: Vértice de $y=x^2$ es $(0, 0)$ mientras que el de $y=(x-1)^2$ es el punto $(1, 0)$. El eje de simetría de $y=x^2$ es el eje y, mientras que $y=(x-1)^2$ es simétrica respecto a la recta $x=1$. Además, la gráfica de $y=(x-1)^2$ está trasladada 1 unidad a la derecha de la gráfica de $y=x^2$.

C

La gráfica de la función de segundo grado $y=a(x-h)^2$, siendo $a\neq 0$, es una parábola, con las siguientes características:

1. Vértice es el punto $(h, 0)$.
2. La recta $x=h$ es el eje de simetría de la parábola.
3. Abre hacia arriba si $a>0$ o hacia abajo si $a<0$.
4. Su gráfica se obtiene trasladando h unidades a la derecha $(h>0)$ o $|h|$ unidades a la izquierda $(h<0)$, a partir de la gráfica de la función $y=ax^2$.

E

Trace la gráfica de las siguientes funciones, y escriba en cada caso su vértice:

a) $y=(x-2)^2$ b) $y=(x+2)^2$ c) $y=2(x-3)^2$ d) $y=-2(x+3)^2$

Contenido 3: Comprobemos lo aprendido 2

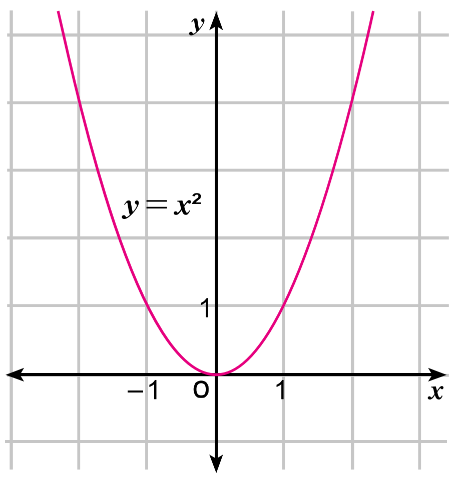
E

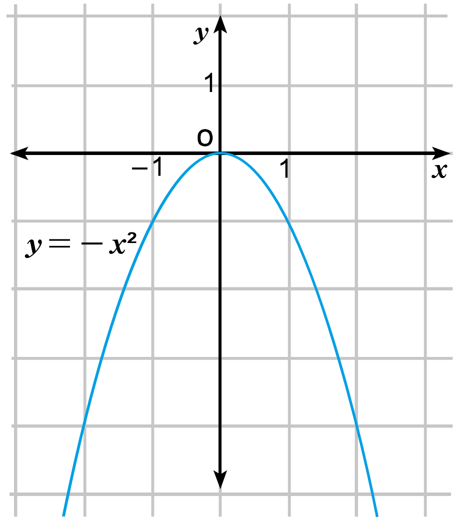
1. Trace la gráfica de las siguientes funciones, y localice en cada una su vértice:

   a) $y=2x^2+1$ b) $y=(x+3)^2$

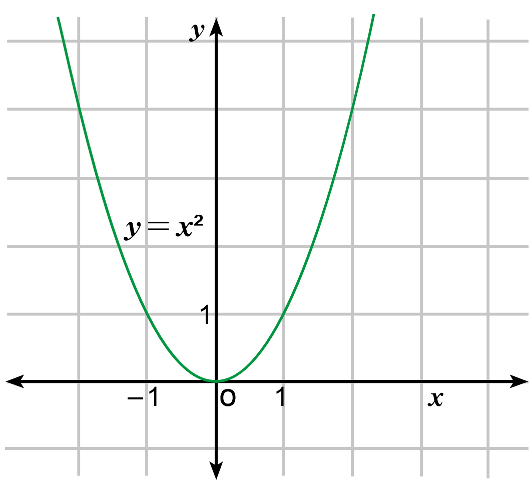
2. Trace la gráfica de cada función trasladando la que se presenta en cada inciso.

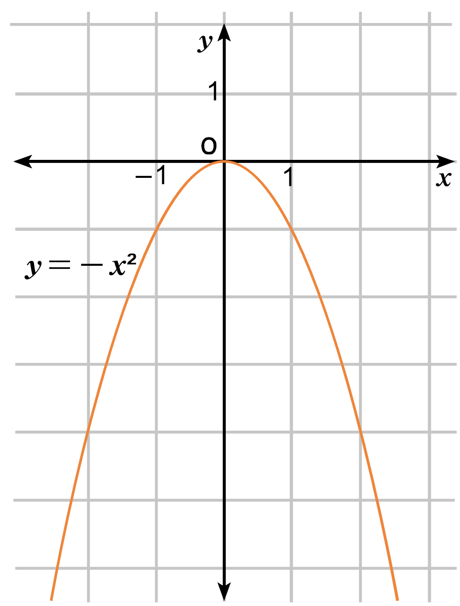
   a) $y=x^2-1$ b) $y=-x^2+3$





   c) $y=(x-3)^2$ d) $y=-(x+1)^2$





Contenido 4: Gráfica y características de la función $y=a(x-h)^2+k$ con $a>0$

P

Obtenga la gráfica de $y=(x-1)^2+2$ a partir de la gráfica de la función $y=x^2$:

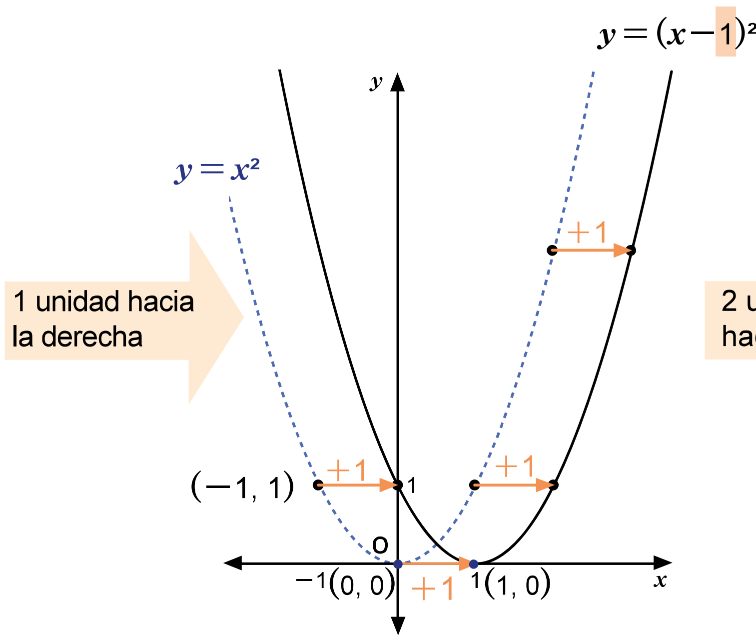
a) Con un desplazamiento horizontal trace la gráfica de $y=(x-1)^2$.

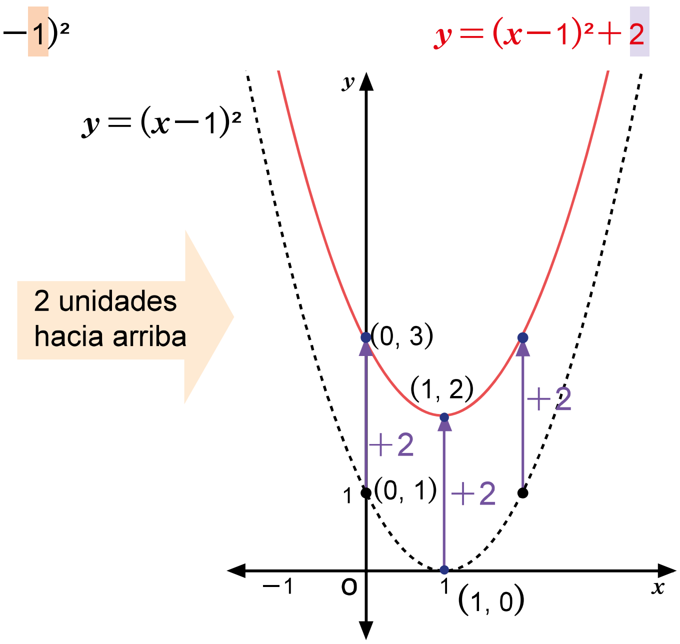
b) A partir de la gráfica de $y=(x-1)^2$ obtenga la de $y=(x-1)^2+2$ mediante un desplazamiento vertical.

S

a) Se traza la gráfica de $y=(x-1)^2$ desplazando horizontalmente una unidad hacia la derecha la gráfica de $y=x^2$.

b) Se desplaza la gráfica de $y=(x-1)^2$ 2 unidades hacia arriba:





La parábola $y=(x-1)^2+2$ tiene vértice (1, 2), es cóncava hacia arriba y es simétrica respecto a a la recta $x=1$.

C

La función de segundo grado $y=a(x-h)^2+k$ con $a>0$, y h cualquier número, tiene las siguientes características:

1. Su dominio está constituido por los números reales.
2. Su rango está formado por los números reales mayores o iguales a k.
3. La gráfica es una parábola con vértice (h, k), simétrica respecto a la recta $x=h$ y cóncava hacia arriba.
4. La gráfica de $y=a(x-h)^2+k$ se obtiene al trasladar la de $y=ax^2$, h unidades a la derecha si $h>0$ o $|h|$ unidades a la izquierda si $h<0$, y luego k unidades hacia arriba si $k>0$ o $|k|$ unidades hacia abajo si $k<0$.

E

Trace la gráfica de las siguientes funciones, y localice en cada caso su vértice:

a) $y=(x-1)^2+1$

b) $y=2(x+1)^2+1$

c) $y=(x-1)^2-2$

d) $y=2(x+1)^2-2$

Contenido 5: Gráfica y características de la función $y = a(x-h)^2 + k$ con $a < 0$

P

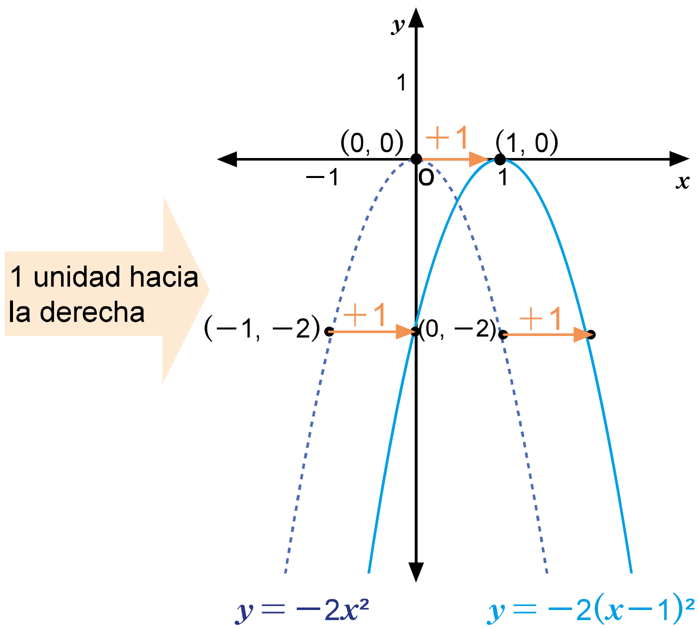
Obtenga la gráfica de $y = -2(x-1)^2 + 1$ a partir de la gráfica de la función $y = -2x^2$:

a) Con un desplazamiento horizontal trace la gráfica de $y = -2(x-1)^2$.

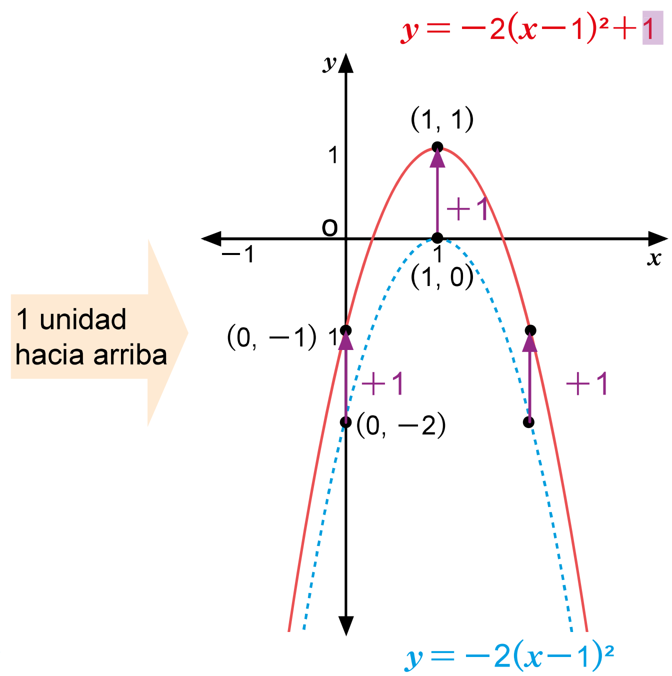
b) A partir de la gráfica de $y = -2(x-1)^2$ obtenga la de $y = -2(x-1)^2 + 1$ mediante un desplazamiento vertical.

S

a) Mediante un desplazamiento horizontal de una unidad hacia la derecha de $y = -2x^2$ (en líneas punteadas) se obtiene la gráfica de $y = -2(x-1)^2$:



b) Ahora se efectúa un desplazamiento vertical de una unidad hacia arriba:



La gráfica de $y = -2(x-1)^2 + 1$ es cóncava hacia abajo, tiene vértice en el punto (1, 1) y es simétrica con respecto a la recta $x = 1$.

C

La función de segundo grado $y = a(x-h)^2 + k$ con $a < 0$, tiene las siguientes características:

1. El dominio está formado por todos los números reales.
2. El rango comprende todos los números reales menores o iguales que k.
3. La gráfica es una parábola con vértice en (h, k), eje de simetría la recta $x = h$; además, es cóncava hacia abajo.
4. La gráfica de $y = a(x-h)^2 + k$ se obtiene al trasladar la gráfica de $y = ax^2$, h unidades a la derecha si $h > 0$ o $|h|$ unidades a la izquierda si $h < 0$, y luego k unidades hacia arriba si $k > 0$ o $|k|$ unidades hacia abajo si $k < 0$.

E

Trace la gráfica de las siguientes funciones y localice en cada caso su vértice:

a) $y = -2(x-2)^2 + 1$

b) $y = -3(x+1)^2 - 1$

Contenido 6: Gráfica y características de la función $y=ax^2+bx+c$ con $a>0$

P

a) Escriba la función $y=x^2+2x-3$ en la forma $y=a(x-h)^2+k$.
b) Trace su gráfica e identifique su vértice, eje de simetría e intercepto con el eje y.

S

a) Se convierte la función $y=x^2+2x-3$ a la forma $y=a(x-h)^2+k$ mediante la completación de cuadrados.

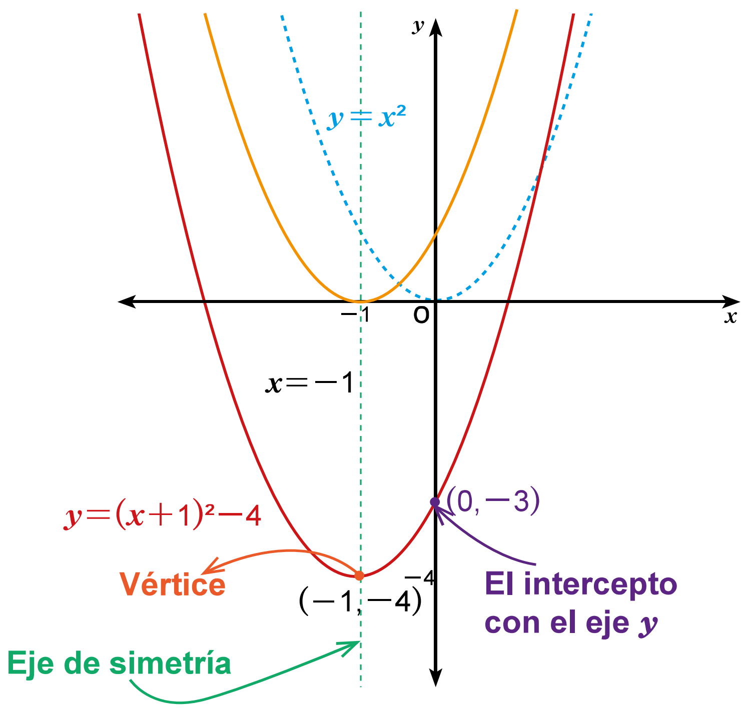
$$
\begin{aligned}
y&=x^2+2x-3\\
&=(x^2+2x)-3\\
&=(x^2+2x+1)-1-3\\
&=(x+1)^2-4
\end{aligned}
$$

Recuerde:

$$
\begin{aligned}
x^2+bx+c&=\left[x^2+bx+\left(\tfrac{b}{2}\right)^2\right]-\left(\tfrac{b}{2}\right)^2+c\\
&=\left(x+\tfrac{b}{2}\right)^2-\left(\tfrac{b}{2}\right)^2+c
\end{aligned}
$$

Luego, se ha podido expresar la función dada en la forma $y=(x+1)^2-4$.

b) La gráfica de $y=(x+1)^2-4$ se obtiene a partir de la de $y=x^2$ (en línea punteada) mediante los siguientes desplazamientos: 1 unidad hacia la izquierda y 4 unidades hacia abajo:



Vértice: $(-1, -4)$

Eje de simetría: $x=-1$

El intercepto con el eje y se encuentra sustituyendo $x=0$ en la expresión $y=x^2+2x-3$

$y=0^2+2(0)-3=-3$

Intercepto con el eje y: $(0, -3)$.

La transformación de $y=x^2+2x-3$ en $y=(x+1)^2-4$ permite identificar el vértice, el eje de simetría de la parábola, y el intercepto con el eje y.

C

La gráfica de la función de segundo grado $y=ax^2+bx+c$ con $a>0$, se obtiene transformando esta expresión a la forma $y=a(x-h)^2+k$, para identificar vértice, eje de simetría e intercepto con el eje y.
Dicha gráfica es una parábola que abre hacia arriba e intercepta el eje y en $(0, c)$.

E

Determine el vértice, eje de simetría, intercepto con el eje y y trace la gráfica de las siguientes funciones:

a) $y=x^2+2x+5$

b) $y=x^2-4x-1$

Desafío

Gráfica y características de la función $y=ax^2+bx+c$ con $a>0$ (Continuación)

Ejemplo Determine el vértice, eje de simetría, intercepto con el eje y y trace la gráfica de la función $y=2x^2-8x+5$.

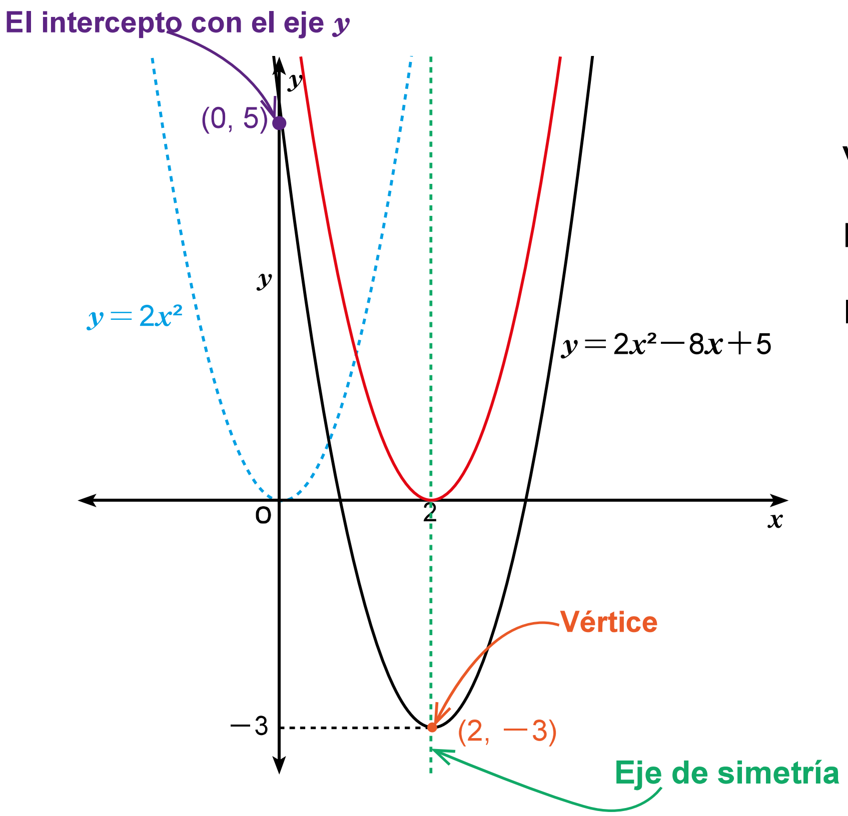
Se convierte la función $y=2x^2-8x+5$ a la forma $y=a(x-h)^2+k$ mediante la completación de cuadrados.

$$
\begin{aligned}
y &= 2x^2-8x+5 \\
&= 2(x^2-4x)+5 \\
&= 2(x^2-4x+\mathbf{4})-(\mathbf{2})(\mathbf{4})+5 \\
&= 2(x-2)^2-3
\end{aligned}
$$

Recuerde:

$$
\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]-a\cdot\left(\frac{b}{2a}\right)^2+c \\
&= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-a\cdot\left(\frac{b}{2a}\right)^2+c
\end{aligned}
$$

Luego, se ha podido expresar la función dada en la forma $y=2(x-2)^2-3$.



Vértice: (2, −3)

Eje de simetría: $x=2$

Intercepto con el eje y: (0, 5).

E

Determine el vértice, eje de simetría, intercepto con el eje y y trace la gráfica de las siguientes funciones:

a) $y=2x^2-8x+4$

b) $y=2x^2+4x+3$

Contenido 7: Gráfica y características de la función $y=ax^2+bx+c$ con $a<0$

P

a) Escriba la función $y=-x^2+4x-3$ en la forma $y=a(x-h)^2+k$.
b) Trace la gráfica de esta e identifique vértice, eje de simetría e intercepto con el eje y.

S

a) Se convierte la función a la forma $y=a(x-h)^2+k$ mediante la completación de cuadrados.

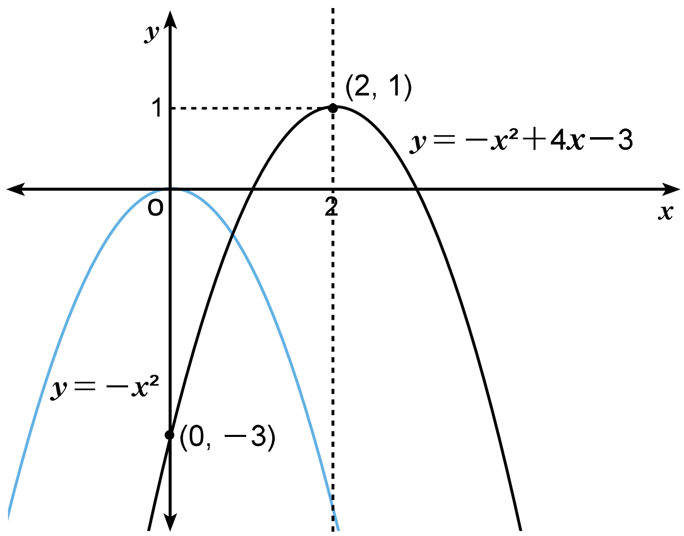
$$\begin{aligned} y &= -x^2+4x-3 \\ &= -(x^2-4x)-3 \\ &= -(x^2-4x+4)+4-3 \\ &= -(x-2)^2+1 \end{aligned}$$

Recuerde:

$$\begin{aligned} -x^2+bx+c &= -\left[x^2-bx+\left(\frac{b}{2}\right)^2\right]+\left(\frac{b}{2}\right)^2+c \\ &= -\left(x-\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2+c \end{aligned}$$

Luego, la función dada es $y=-(x-2)^2+1$.

b) La gráfica de $y=-(x-2)^2+1$ se obtiene a partir de la de $y=-x^2$ mediante los siguientes desplazamientos: 2 unidades a la derecha y 1 unidad hacia arriba:



Vértice: $(2, 1)$

Eje de simetría: $x=2$

Intercepto con el eje y: $(0, -3)$.

La transformación de $y=-x^2+4x-3$ en $y=-(x-2)^2+1$ permite reconocer las siguientes características de su gráfica: el vértice (2, 1), el eje de simetría, el tipo de concavidad, y el intercepto con el eje y. Además, es fácil ver que el rango de la función está constituido por todos los números reales menores o iguales que 1.

C

La transformación algebraica de la función de segundo grado $y=ax^2+bx+c$ con $a<0$, a la nueva forma $y=a(x-h)^2+k$ mediante completación de cuadrados permite que en esta se pueda identificar las características de su gráfica: las coordenadas de su vértice (h, k), la ecuación $x=h$ de la recta vertical que sirve como eje de simetría, el intercepto con y, el punto $(0, c)$ y su concavidad hacia abajo.

E

Determine el vértice, eje de simetría, intercepto con el eje y y trace la gráfica de las siguientes funciones:

a) $y=-x^2+6x-5$

b) $y=-x^2-2x+2$

Contenido 8: Comprobemos lo aprendido 3

E

1. Trace la gráfica de las siguientes funciones, y localice en cada una su vértice:

   a) $y=(x+1)^2+3$

   b) $y=-(x+1)^2-2$

   c) $y=2(x-1)^2+4$

   d) $y=-2(x+3)^2-1$

2. Determine el vértice, eje de simetría, intercepto con el eje y y trace la gráfica de las siguientes funciones:

   a) $y=x^2+6x+4$

   b) $y=2x^2+8x+7$

   c) $y=-x^2+6x-5$

Sección 3: Valor máximo o mínimo de una función de segundo grado y su aplicación

Contenido 1: Valor máximo o mínimo de la función $y=a(x-h)^2+k$

P

Determine si la función $y=(x-2)^2+3$ tiene máximo o mínimo.

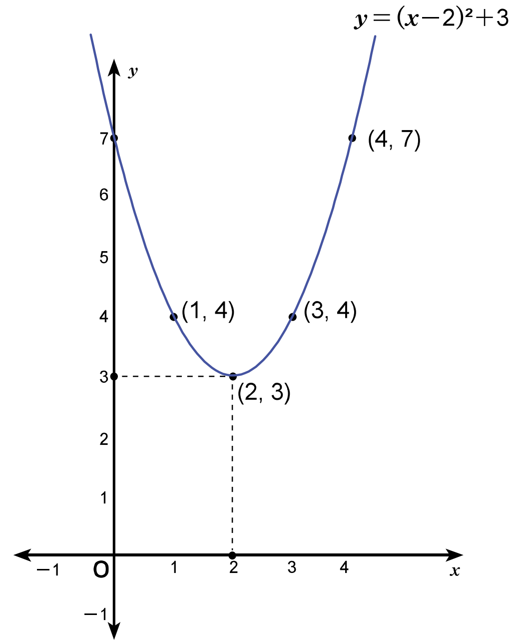
S

En el rango de una función:

- El valor más grande es el **valor máximo** de la función.
- El valor más pequeño es el **valor mínimo** de la función.

La forma dada de la función $y=(x-2)^2+3$ permite saber que su gráfica es una parábola con vértice en (2, 3) y que la concavidad es hacia arriba.

Esto obliga a pensar que el **valor mínimo** alcanzado es $y=3$ y que **no hay máximo** porque para cada punto de la parábola se puede encontrar otro con mayor ordenada.

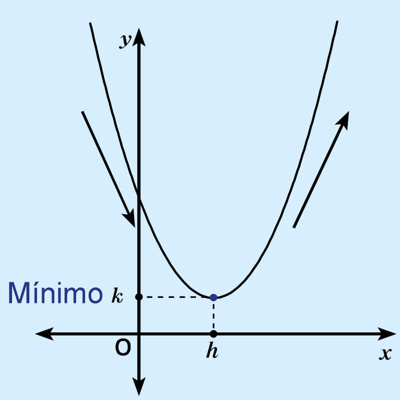


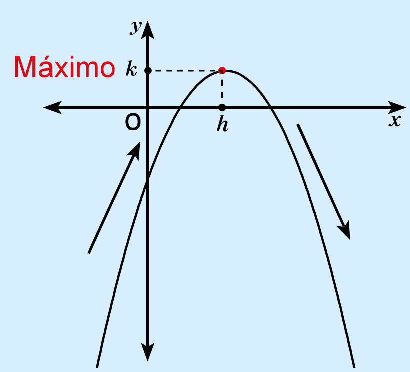
C

En la función de la forma $y=a(x-h)^2+k$, el valor máximo o mínimo de la función es $y=k$, para el cual se debe considerar:

1. Si $a>0$, la parábola abre hacia arriba, entonces el **mínimo** de la función es la coordenada y del vértice, es decir $y=k$. **No tiene máximo.**

2. Si $a<0$, la parábola abre hacia abajo, entonces el **máximo** de la función es la coordenada y del vértice de la parábola, es decir $y=k$. **No tiene mínimo.**



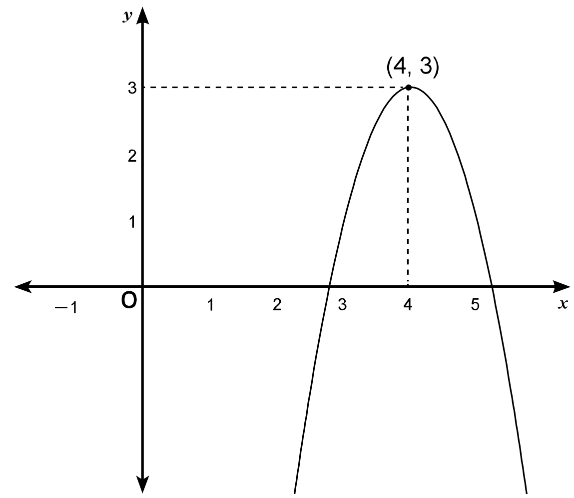


Ejemplo Determine si la función $y=-2(x-4)^2+3$ tiene máximo o mínimo.

De la forma de la función $y=-2(x-4)^2+3$ se puede ver que el vértice de su gráfica es $(4, 3)$ y que la concavidad es hacia abajo porque $a=-2<0$, siendo este el punto de la parábola con mayor ordenada.

Entonces **el máximo** de la función es $\boldsymbol{y=3}$.

No existe un valor mínimo para y.



E

Encuentre el valor máximo o mínimo de las siguientes funciones:

a) $y=(x-1)^2+4$

b) $y=-(x+1)^2-3$

c) $y=2(x-4)^2+1$

d) $y=-2(x+3)^2-2$

Contenido 2: Valor máximo y mínimo de una función de segundo grado, en un intervalo dado, cuando su gráfica es cóncava hacia arriba

P

Encuentre el máximo y el mínimo de la función $y=(x-1)^2+1$ en los siguientes intervalos dados:

a) $-1 \leq x \leq 2$

b) $2 \leq x \leq 4$

S

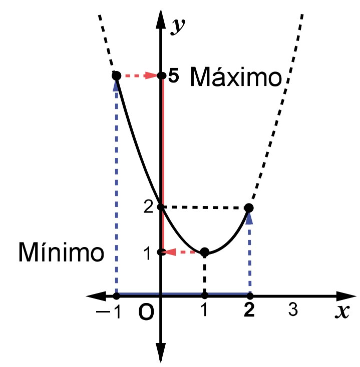
a) Se puede saber por simple inspección que la gráfica de la función $y=(x-1)^2+1$ tiene el vértice (1, 1) como el punto de menor ordenada por ser cóncava hacia arriba, esto se observa en la figura. Luego el mínimo es $y=1$.

En este caso el dominio de la función se ha reducido al intervalo $-1 \leq x \leq 2$, de manera que para reafirmar lo anterior se evalúa la función en los extremos del intervalo:

Si $x=-1$, $y=(-1-1)^2+1=5$

Si $x=2$, $y=(2-1)^2+1=2$

Lo anterior muestra que **el mínimo es $y=1$** y **el máximo $y=5$**.

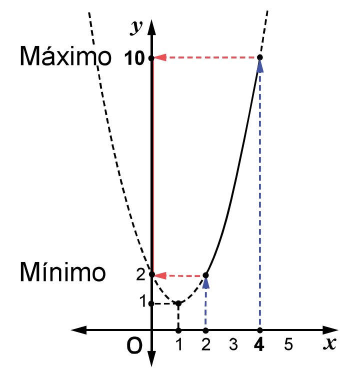


b) Como la abscisa del vértice no está en el intervalo $2 \leq x \leq 4$, se evalúa la función en los extremos de este:

Si $x=2$, $y=(2-1)^2+1=2$

Si $x=4$, $y=(4-1)^2+1=10$

Lo anterior muestra que **el mínimo es $y=2$** y **el máximo $y=10$**.



C

El valor máximo o mínimo de una función $y=a(x-h)^2+k$ en un intervalo dado, cuando $a>0$, se obtiene de la siguiente manera:

- ✓ Si la coordenada h del vértice (h, k) de la parábola está en el intervalo dado, el valor mínimo de esta es la ordenada $y=k$ y el valor máximo será el mayor valor obtenido al evaluar la función en los extremos del intervalo.
- ✓ Si la coordenada h del vértice no está en el intervalo, los valores máximo y mínimo se obtienen al evaluar la función en los extremos del intervalo.

E

Encuentre el máximo y el mínimo de la función $y=(x-1)^2+2$ en los intervalos siguientes:

a) $-1 \leq x \leq 2$

b) $2 \leq x \leq 5$

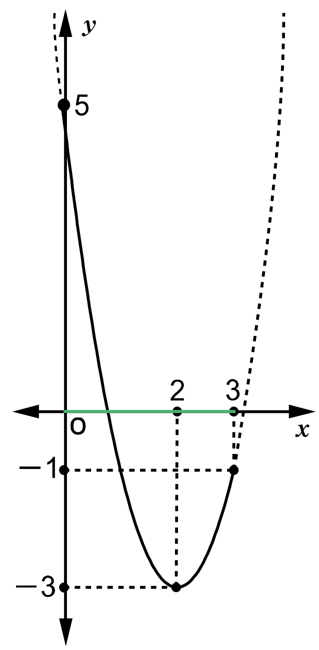
Desafío

Valor máximo y mínimo de una función de segundo grado cuando su gráfica es cóncava hacia arriba (Continuación)

Ejemplo Encuentre el máximo y el mínimo de la función $y=2x^2-8x+5$ en el intervalo $0\leq x\leq 3$.

Se transforma algebraicamente la función $y=2x^2-8x+5$ a la forma $y=a(x-h)^2+k$:

$$\begin{aligned} y &= 2x^2-8x+5 \\ &= 2(x^2-4x)+5 \\ &= 2(x^2-4x+4)-(2)(4)+5 \\ &= 2(x-2)^2-3 \end{aligned}$$



El vértice de la parábola es $(2, -3)$, y $h=2$ está en el intervalo $0\leq x\leq 3$, de modo que el valor mínimo de la función es $y=-3$. Se determina el valor máximo sustituyendo x por 0 y por 3 en $y=2(x-2)^2-3$:

Para $x=0$, $y=2(0-2)^2-3=8-3=5$

Para $x=3$, $y=2(3-2)^2-3=2-3=-1$

Luego, **el valor máximo de la función $y=2x^2-8x+5$ es $y=5$** y **el mínimo es $y=-3$.**

E

Encuentre el máximo y el mínimo de la función $y=2x^2-4x-3$ en cada uno de los intervalos siguientes:

a) $0\leq x\leq 3$

b) $2\leq x\leq 3$

c) $-1\leq x\leq 0$

Contenido 3: Valor máximo y mínimo de una función de segundo grado, en un intervalo dado, cuando su gráfica es cóncava hacia abajo

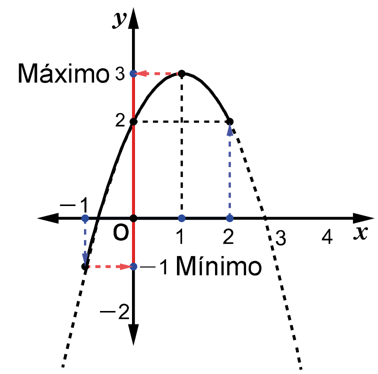
P

Encuentre el valor máximo y el mínimo de la función $y=-(x-1)^2+3$ en cada uno de los siguientes intervalos:

a) $-1\leq x\leq 2$ b) $2\leq x\leq 4$

S

a) La fórmula de la función $y=-(x-1)^2+3$ proporciona la siguiente información sobre su gráfica:



Su vértice es el punto (1, 3).

Su concavidad es hacia abajo porque $a=-1$.

Punto de altura máxima es (1, 3).

Al evaluar la función en los extremos del intervalo se puede decidir sobre los valores máximo y mínimo:

Si $x=-1$, $y=-(-1-1)^2+3=-4+3=-1$

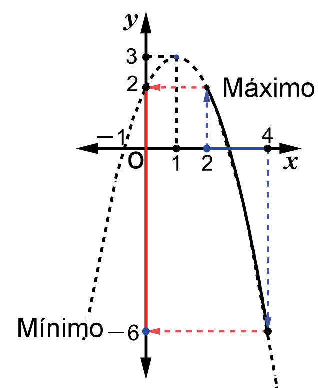
Si $x=2$, $y=-(2-1)^2+3=-1+3=2$

De lo anterior se tiene que:

$y=-1$ es el valor mínimo.

$y=3$ es el valor máximo.

b) La abscisa del vértice no está en el intervalo $2\leq x\leq 4$, luego para determinar el mínimo y máximo se evalúa la función dada en los extremos del intervalo:



Para $x=2$, $y=-(2-1)^2+3=-1+3=2$

Para $x=4$, $y=-(4-1)^2+3=-9+3=-6$

De los resultados anteriores se concluye que

el valor mínimo es $y=-6$ y $y=2$ es el máximo.

C

El valor máximo o mínimo de una función $y=a(x-h)^2+k$, en un intervalo dado, cuando $a<0$, se obtiene de la siguiente manera:

a) Si la coordenada h del vértice (h, k) de la parábola está en el intervalo dado, el valor máximo de esta es la coordenada $y=k$ y el valor mínimo será el menor valor obtenido al evaluar la función en los extremos del intervalo.

b) Si la coordenada h del vértice no está en el intervalo, los valores máximos y mínimos se obtienen al evaluar la función en los extremos del intervalo.

E

Encuentre máximos y mínimos de la función $y=-(x+1)^2+7$ en los intervalos siguientes:

a) $-2\leq x\leq 2$ b) $0\leq x\leq 2$

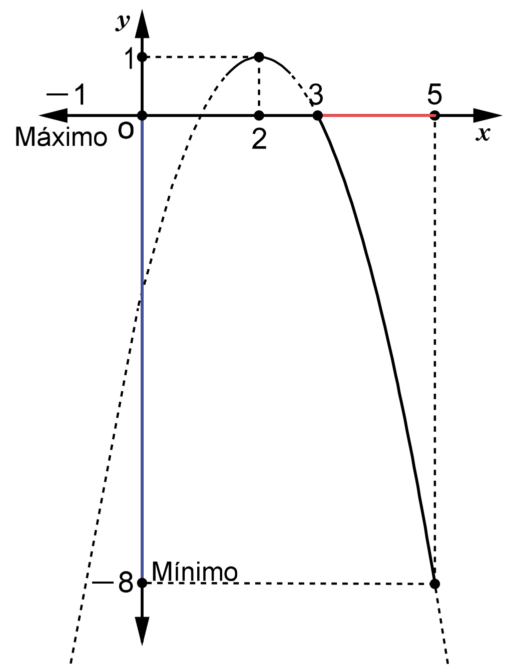
Desafío

Valor máximo y mínimo de una función de segundo grado en un intervalo dado cuando su gráfica es cóncava hacia abajo (continuación)

Ejemplo Encuentre máximos y mínimos de la función $y=-x^2+4x-3$ en el intervalo $3 \leq x \leq 5$

Se transforma $y=-x^2+4x-3$ a la forma $y=a(x-h)^2+k$:

$$\begin{aligned} y &= -x^2+4x-3 \\ &= -(x^2-4x)-3 \\ &= -(x^2-4x+4)+4-3 \\ &= -(x-2)^2+1 \end{aligned}$$



El vértice de la parábola es (2, 1), y como $h=2$ no está en el intervalo dado, se debe evaluar la función en los extremos de esta; aprovechando que la función decrece y la única posibilidad son los extremos de dicho intervalo:

Para $x=3$, $y=-(3-2)^2+1=-1+1=0$
Para $x=5$, $y=-(5-2)^2+1=-9+1=-8$

Luego, los valores mínimo y máximo son:

Mínimo: $y=-8$, Máximo $y=0$

E

Encuentre máximos y mínimos de la función $y=-2x^2+8x-3$ en los intervalos siguientes:

a) $3\leq x\leq 5$

b) $1\leq x\leq 5$

c) $-4\leq x\leq -1$

Contenido 4: Comprobemos lo aprendido 4

E

1. Encuentre el máximo y el mínimo de la función $y=(x+1)^2+3$ en cada uno de los siguientes intervalos:

   a) $-3\leq x\leq -2$ b) $-2\leq x\leq 1$

2. Encuentre el máximo y el mínimo de la función $y=x^2-4x+7$ en cada uno de los siguientes intervalos:

   a) $-1\leq x\leq 3$ b) $4\leq x\leq 6$

3. Encuentre el máximo y el mínimo de la función $y=-(x+2)^2+2$ en cada uno de los siguientes intervalos:

   a) $-4\leq x\leq -3$ b) $-3\leq x\leq 0$

Contenido 5: Aplicación de la función de segundo grado

P

Doña María destinó una porción del terreno rectangular de su jardín para sembrar rosas, y su intención es cercarla con 12 m de malla.

a) Exprese el área del terreno en función de su largo.

b) Determine las dimensiones del terreno que proporcionen la mayor área posible.

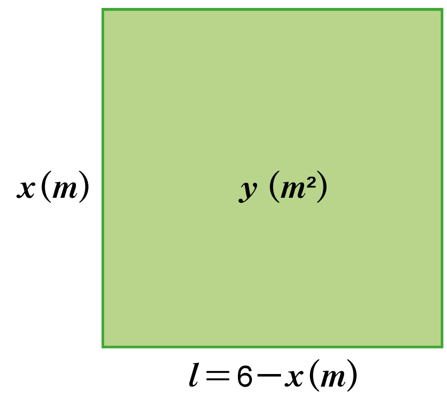
S

a) Si l es largo y x es el ancho del terreno, su perímetro P está dado por

$$P = 2l + 2x,$$

de modo que

$$\begin{aligned} 2l + 2x &= 12 \\ 2(l + x) &= 12 \\ l + x &= \frac{12}{2} = 6 \\ l &= 6 - x \end{aligned}$$



Además, si el área del terreno se representa por y, esta se expresa mediante la fórmula

$$\text{Área} = (\text{largo}) \times (\text{ancho})$$

en

$$y = lx = (6 - x)x = -x^2 + 6x$$

b) La función $y = -x^2 + 6x$ se expresa ahora en la forma $y = a(x - h)^2 + k$ siguiendo el proceso acostumbrado:

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + 6x \\ &= -(x^2 - 6x) \\ &= -(x^2 - 6x + \mathbf{9}) + \mathbf{9} \\ &= -(x - 3)^2 + 9 \end{aligned}$$

Como el coeficiente del término cuadrático es -1, la parábola abre hacia abajo, de modo que $y = 9$ es un valor máximo, el cual se alcanza para $x = 3$. Así, las dimensiones que proporcionan la mayor área posible del terreno son $l = 6 - 3 = \mathbf{3}(m)$ de ancho y $x = \mathbf{3}(m)$ de largo.

E

Joaquín está diseñando los planos de su casa. Si una de las habitaciones de forma rectangular tiene un perímetro de 16 metros.

a) Exprese el área de la habitación en función de su largo.

b) Determine las dimensiones de la habitación para alcanzar su mayor área posible.

Unidad 4

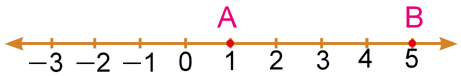
Proporcionalidad Entre Segmentos

Sección 1: Razón entre segmentos

Contenido 1: Distancia entre dos puntos

P

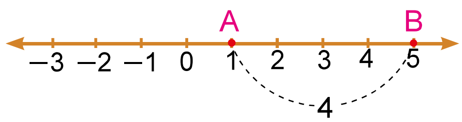
Sean los puntos A y B en la recta numérica, de coordenadas 1 y 5. Encuentre la distancia entre los dos puntos.



En la recta numérica, se representa por $P(a)$ el punto P con coordenada a.

S

Una forma de encontrar la distancia entre A y B es contando las unidades que hay en la figura desde A hasta B, que resulta ser 4. Luego la distancia d entre A y B es 4.



Otra manera de hacer el mismo cálculo es restar la coordenada de A de la coordenada del punto B, así $d = \text{AB} = 5 - 1 = 4$.

Por lo tanto, $d = \mathbf{4}$.

C

Dada una recta con un sistema de coordenadas, la distancia entre dos puntos A y B con coordenadas a y b respectivamente, se define de la siguiente manera:

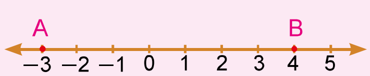
$$d = \text{AB} = (\text{Coordenada mayor}) - (\text{Coordenada menor}) = b - a$$

El número $b-a$ es positivo si A y B son puntos distintos y 0 si A y B son iguales.

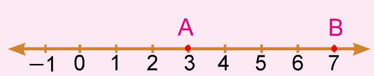
Ejemplo Calcule la distancia d entre los puntos dados.

a) A(-3) y B(4) b) A(3) y B(7) c) A(-8) y B(-2)

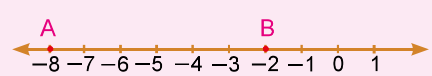
a)
$$d = 4 - (-3)$$
$$= 4 + 3$$
$$= \mathbf{7}$$



b)
$$d = 7 - 3$$
$$= \mathbf{4}$$



c)
$$d = -2 - (-8)$$
$$= -2 + 8$$
$$= \mathbf{6}$$



E

Calcule la distancia d entre los puntos dados.

a) A(2) y B(7) b) A(0) y B(5) c) A(-4) y B(5)

d) A(-3) y B(6) e) A(-8) y B(-4) f) A(-7) y B(-2)

Contenido 2: Razón entre segmentos

P

Calcule el cociente entre AB y CD, si $\text{AB} = 2cm$ y $\text{CD} = 8cm$.

S

$\overline{\text{AB}}$ y $\overline{\text{CD}}$ con sus medidas se muestran a continuación.

El cociente entre las longitudes de $\overline{\text{AB}}$ y $\overline{\text{CD}}$ está dado por

$$\frac{\text{AB}}{\text{CD}} = \frac{2}{8} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}},$$

que también puede escribirse como $1:4$, y se lee "1 es a 4". La longitud del $\overline{\text{AB}}$ es la cuarta parte del $\overline{\text{CD}}$ y al cociente $\frac{1}{4}$ se le llama razón entre $\overline{\text{AB}}$ y $\overline{\text{CD}}$.

C

La **razón** r entre dos segmentos $\overline{\text{AB}}$ y $\overline{\text{CD}}$ se define como el cociente entre sus longitudes, expresadas con la misma unidad de medida, y se representa por el número

$$r = \frac{\text{AB}}{\text{CD}}$$

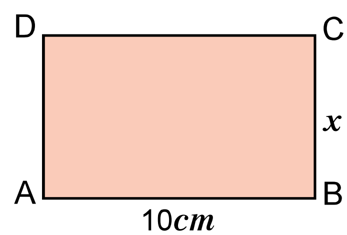
que también puede escribirse como AB : CD, este se lee "AB es a CD".

E1

Calcule la razón entre las parejas de segmentos cuyas longitudes son dadas en cada inciso.

a) $\text{AB} = 5cm$ y $\text{CD} = 15cm$ b) $\text{AB} = 4cm$ y $\text{CD} = 8cm$ c) $\text{AB} = 5cm$ y $\text{CD} = 7cm$

Ejemplo La base y la altura de un rectángulo están en la razón de $5:3$. Si la base mide $10cm$, ¿cuánto mide la altura del rectángulo?



La razón entre la base $\overline{\text{AB}}$ y la altura $\overline{\text{BC}}$ es $r = \frac{\text{AB}}{\text{BC}} = \frac{5}{3}$. Si se sustituye en la expresión anterior, $\text{AB} = 10$ y $\text{BC} = x$, resulta

$$\frac{10}{x} = \frac{5}{3}$$

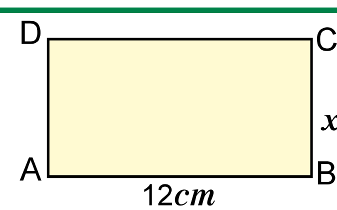
$$5x = (10)(3)$$

$$x = \frac{30}{5} = 6$$

Por lo tanto, la altura del rectángulo es **6 cm**.

E2

La base y la altura de un rectángulo están en la razón $4:3$. Si la base mide $12cm$, ¿cuánto mide la altura del rectángulo?



Contenido 3: Segmentos proporcionales

P

a) Calcule las razones entre los segmentos cuyas longitudes son AB $= 6\,cm$ y CD $= 8\,cm$, EF $= 18\,cm$ y GH $= 24\,cm$.

b) Compare las razones obtenidas en a).

S

a) Las razones entre $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ y $\overline{EF}$ y $\overline{GH}$ son:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \quad \text{y} \quad \frac{EF}{GH} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$$

b) Como $\frac{AB}{CD} = \frac{3}{4}$ y $\frac{EF}{GH} = \frac{3}{4}$, entonces $\mathbf{\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH}}$. En este caso se dice que $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son proporcionales a $\overline{EF}$ y $\overline{GH}$.

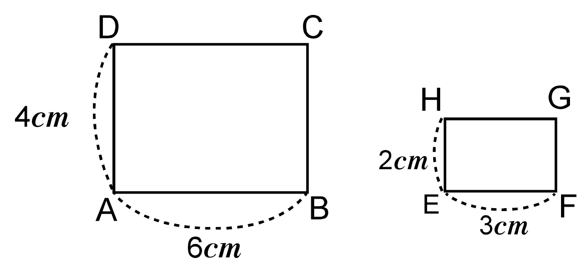
C

Si $\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH}$, entonces $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son proporcionales a $\overline{EF}$ y $\overline{GH}$.

E_1

Calcule las razones entre los segmentos con longitudes AB $= 4\,cm$ y CD $= 12\,cm$, MN $= 8\,cm$ y PQ $= 24\,cm$ y diga si estos son proporcionales.

Ejemplo Determine si en la pareja de rectángulos mostrada a la derecha, la base y la altura de uno son proporcionales a las del otro.



La razón entre las bases es $\frac{AB}{EF} = \frac{6}{3} = 2$ y entre las alturas es $\frac{AD}{EH} = \frac{4}{2} = 2$, de donde se sigue que

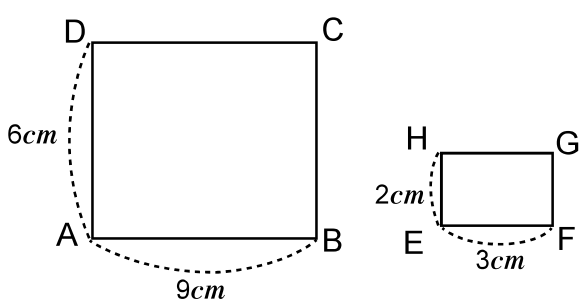
$$\mathbf{\frac{AB}{EF} = \frac{AD}{EH}}$$

Por lo tanto, las bases $\overline{AB}$ y $\overline{EF}$ son proporcionales a las alturas $\overline{AD}$ y $\overline{EH}$.

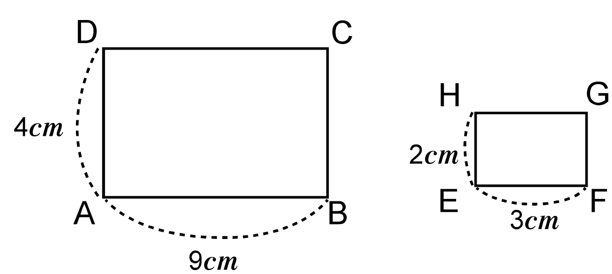
E_2

Determine en cada pareja de rectángulos si la base y la altura de uno son proporcionales a las del otro.

a)



b)



Contenido 4: Comprobemos lo aprendido 1

1. Calcule la distancia entre cada pareja de puntos dados, usando la recta numérica y mediante la fórmula $d = \mathrm{AB} = b - a$.

   a) A(5) y B(11) b) A(-3) y B(0) c) A(-2) y B(3) d) A(-5) y B(-1)

2. Calcule la razón entre cada uno de los siguientes pares de segmentos, cuyas longitudes son dadas.

   a) $\mathrm{AB} = 4cm$ y $\mathrm{CD} = 20cm$ b) $\mathrm{AB} = 3cm$ y $\mathrm{CD} = 9cm$ c) $\mathrm{AB} = 2cm$ y $\mathrm{CD} = 7cm$

3. Calcule las razones indicadas utilizando los datos de la figura:

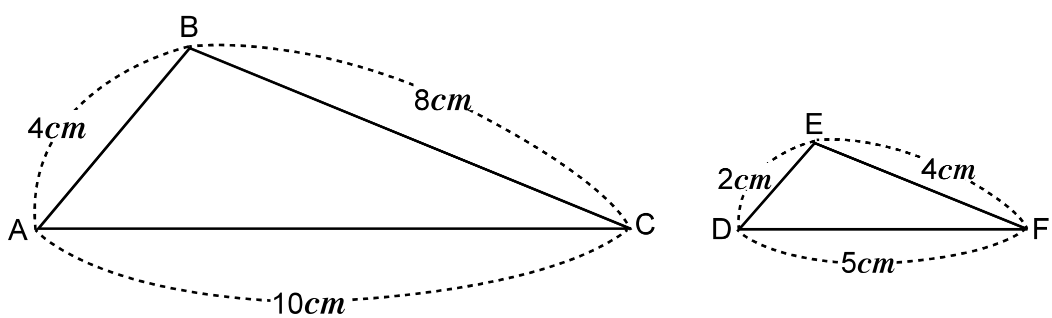
   a) $\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{DE}} = -$

   b) $\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}} = -$

   c) $\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{EF}} = -$

   d) $\dfrac{\mathrm{DE}}{\mathrm{EF}} = -$

   e) $\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{DF}} = -$

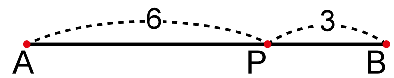


Sección 2: División de un segmento

Contenido 1: Cálculo de la razón en la que un punto divide a un segmento

P

A partir de la figura, calcule la razón $\frac{AP}{PB}$ entre los segmentos siendo P un punto interior del $\overline{AB}$.



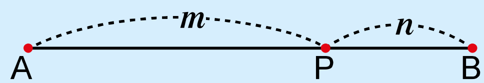
S

P es un punto interior del $\overline{AB}$ y lo divide en dos segmentos $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$, cuyas longitudes son 6 y 3 unidades respectivamente. La razón entre dichos segmentos está dada por

$$\frac{AP}{PB} = \frac{6}{3} = \mathbf{2}$$

C

Dado el $\overline{AB}$ y un punto P en su interior, a como se muestra en la figura:

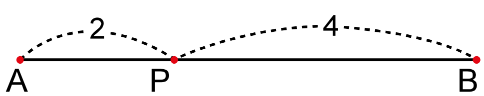


La razón entre los segmentos $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$ en que P divide al $\overline{AB}$ está dada por

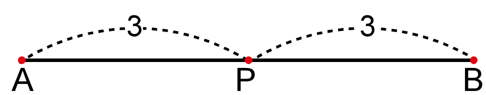
$$\frac{AP}{PB} = \frac{m}{n}$$

Ejemplo Calcule para cada figura, la razón $\frac{AP}{PB}$ entre los segmentos en que el punto P divide al $\overline{AB}$

a)



b)



a) Se realiza el cálculo

$$\frac{AP}{PB} = \frac{2}{4} = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

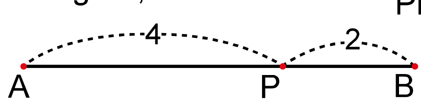
b) En este caso,

$$\frac{AP}{PB} = \frac{3}{3} = \mathbf{1}$$

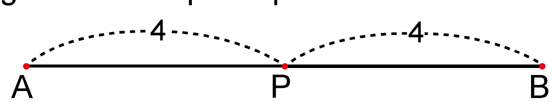
E

1. En cada figura, calcule la razón $\frac{AP}{PB}$ entre los segmentos en que el punto P divide a $\overline{AB}$

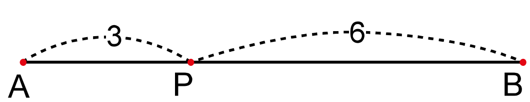
a)



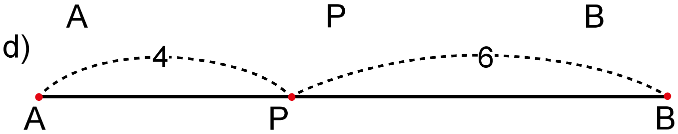
b)



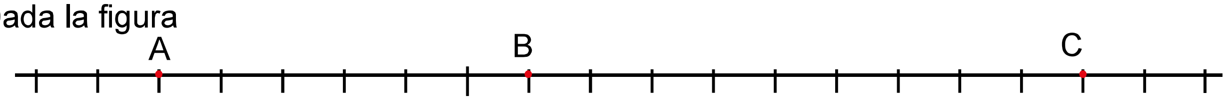
c)



d)



2. Dada la figura

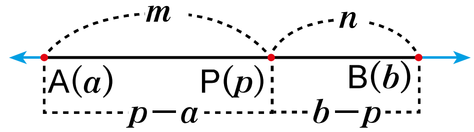


a) Ubique el punto interior M que divide a $\overline{AB}$ en dos segmentos iguales.
b) Ubique el punto interior N que divide a $\overline{BC}$ en dos segmentos iguales.
c) Ubique el punto interior P que divide a $\overline{AB}$ en la razón 2 : 1.
d) Ubique el punto interior Q que divide a $\overline{BC}$ en la razón 1 : 2.

Contenido 2: Coordenada del punto interior

P

Calcule la coordenada p del punto interior P que divide al $\overline{AB}$ en la razón $m:n$, según la figura.



S

De acuerdo con la figura los puntos A, B y P tienen coordenadas a, b y p, respectivamente. El punto interior P divide a $\overline{AB}$ en $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$ y la razón entre $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$ es

$$\frac{AP}{PB} = \frac{m}{n}, \qquad (1)$$

pero $AP = p - a$ y $PB = b - p$, así que $\frac{AP}{PB} = \frac{p-a}{b-p}$. (2)

De (1) y (2) se sigue que

$$\frac{p-a}{b-p} = \frac{m}{n}$$

$$n(p-a) = m(b-p)$$

$$np - na = mb - mp$$

$$mp + np = na + mb$$

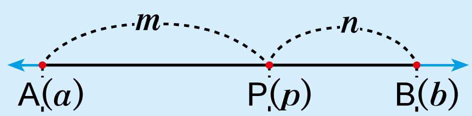
$$(m+n)p = na + mb$$

$$p = \frac{na+mb}{m+n}$$

C

Si en una recta numérica $P(p)$ es un punto interior del segmento cuyos extremos son $A(a)$ y $B(b)$, con la condición de que $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$ están a razón $m:n$, entonces la coordenada de P está dada por la fórmula

$$p = \frac{na + mb}{m + n}$$



Si $m = n$, P es el punto medio del $\overline{AB}$ y con $p = \frac{a+b}{2}$.

Ejemplo Sea $\overline{AB}$ con extremos A(2) y B(8). Calcule la coordenada p del punto interior P tal que:

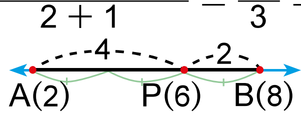
a) P divide a $\overline{AB}$ en la razón 2 : 1

b) P es punto medio de $\overline{AB}$

a) En este caso $a = 2$, $b = 8$, $m = 2$ y $n = 1$, así que

$$p = \frac{na + mb}{m + n} = \frac{(1)(2) + (2)(8)}{2 + 1} = \frac{18}{3} = \mathbf{6}$$

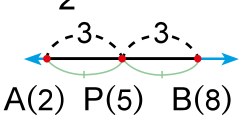
Gráficamente se tiene



b) Aquí $a = 2$, $b = 8$, así que

$$p = \frac{a + b}{2} = \frac{2 + 8}{2} = \frac{10}{2} = \mathbf{5}$$

Gráficamente se tiene



E

Calcule la coordenada p del punto interior P de un segmento, tal que:

a) A(8) y B(4) y P divide a $\overline{AB}$ en la razón 1 : 2.

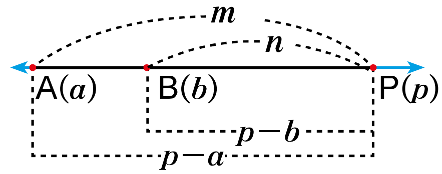
b) C(−2) y D(6) y P divide a $\overline{CD}$ en la razón 3 : 1.

c) D(−5) y F(3) y P es punto medio de $\overline{DF}$.

Contenido 3: Coordenada del punto exterior

P

A partir de la figura, calcule la coordenada p del punto exterior P que divide al $\overline{AB}$ en una razón $m:n$.



S

De acuerdo con la figura, las coordenadas de los puntos A, B y P son a, b y p, respectivamente.

El punto exterior P divide al $\overline{AB}$ en $\overline{AP}$ y $\overline{BP}$ y la razón entre $\overline{AP}$ y $\overline{BP}$ es

$$\frac{AP}{BP}=\frac{m}{n}, \qquad (1)$$

pero AP $=p-a$ y BP $=p-b$, así que

$$\frac{AP}{BP}=\frac{p-a}{p-b}. \qquad (2)$$

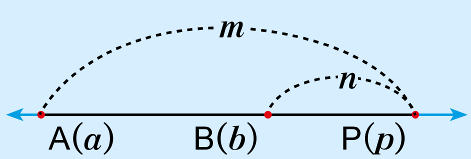
De (1) y (2) se sigue que

$$\frac{p-a}{p-b}=\frac{m}{n}$$
$$n(p-a)=m(p-b)$$
$$np-na=mp-mb$$
$$mp-np=-na+mb$$
$$(m-n)p=-na+mb$$
$$p=\boldsymbol{\frac{-na+mb}{m-n}}$$

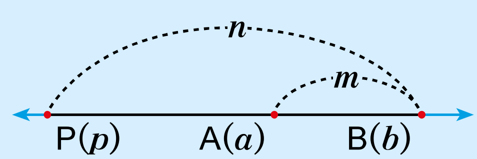
C

Si P(p) es un punto exterior del segmento con extremos A(a) y B(b) tal que P divide al $\overline{AB}$ en $\overline{AP}$ y $\overline{BP}$ en la razón $m:n$, entonces su coordenada p está dada por $p=\dfrac{-na+mb}{m-n}$

Cuando $m>n$



Cuando $m<n$

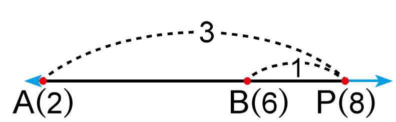


Ejemplo Sea el $\overline{AB}$ con extremos A(2) y B(6). Calcule la coordenada p del punto exterior P tal que P divide al $\overline{AB}$ en la razón 3 : 1.

En este caso $a=2$, $b=6$, $m=3$ y $n=1$, así que

$$p=\frac{-na+mb}{m-n}=\frac{-(1)(2)+(3)(6)}{3-1}=\frac{16}{2}=\mathbf{8}$$

Gráficamente se tiene



E

Calcule la coordenada p del punto exterior P de un segmento, tal que

a) A(3) y B(5) y P divide al $\overline{AB}$ en la razón 2 : 1.

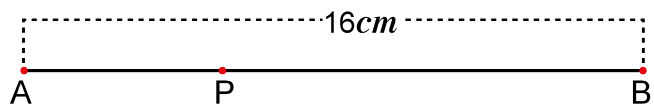
b) D(-5) y F(3) y P divide al $\overline{DF}$ en la razón 3 : 1.

c) C(-2) y D(8) y P divide al $\overline{CD}$ en la razón 1 : 2.

Contenido 4: Longitudes de las partes en las que un punto divide a un segmento en una razón dada

P

Sea $\overline{\text{AB}}$ el segmento de la figura y P un punto en su interior. Si la longitud de $\overline{\text{AB}}$ es 16cm y $\overline{\text{AP}}$ y $\overline{\text{PB}}$ están en la razón 3 : 5, encuentre las longitudes AP y PB.



S

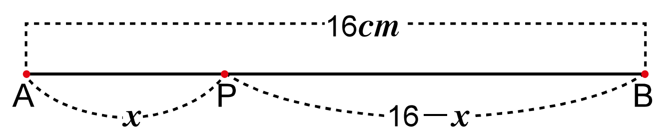
La razón entre $\overline{\text{AP}}$ y $\overline{\text{PB}}$ es

$$\frac{\text{AP}}{\text{PB}} = \frac{3}{5}$$

Si se hace AP $= x$ y PB $= 16 - x$, en la expresión anterior, resulta

$$\frac{x}{16 - x} = \frac{3}{5}$$

de donde



$$\begin{aligned} 5x &= (16 - x)(3) \\ 5x &= 48 - 3x \\ 5x + 3x &= 48 \\ 8x &= 48 \\ \frac{\cancel{8}}{\cancel{8}}x &= \frac{48}{8} \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Luego, se sustituye $x = 6$ en PB $= 16 - x$ para obtener

$$\text{PB} = 16 - x = 16 - 6 = 10.$$

Por lo tanto, **AP = 6 (*cm*)** y **PB = 10 (*cm*)**.

C

Si se conoce la razón en que el punto interior P del $\overline{\text{AB}}$, con longitud conocida, divide a este segmento, es posible conocer las longitudes de $\overline{\text{AP}}$ y $\overline{\text{PB}}$.

E

Sea el $\overline{\text{AB}}$ y P un punto en su interior. Encuentre las longitudes AP y PB:

a) Si la longitud del $\overline{\text{AB}}$ es 27cm y las longitudes de $\overline{\text{AP}}$ y $\overline{\text{PB}}$ están en la razón 2 : 7.

b) Si la longitud del $\overline{\text{AB}}$ es 25cm y las longitudes de $\overline{\text{AP}}$ y $\overline{\text{PB}}$ están en la razón 4 : 1.

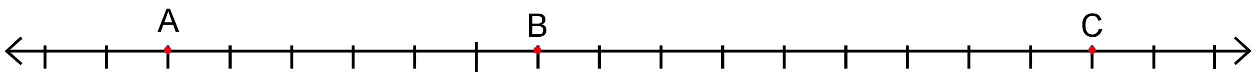
c) Si la diferencia entre las longitudes de $\overline{\text{AP}}$ y $\overline{\text{PB}}$ es 7 y la razón de las longitudes de $\overline{\text{AP}}$ y $\overline{\text{PB}}$ es 4 : 3.

d) Si la diferencia entre las longitudes de $\overline{\text{AP}}$ y $\overline{\text{PB}}$ es 8 y la razón de las longitudes de $\overline{\text{AP}}$ y $\overline{\text{PB}}$ es 3 : 1.

Contenido 5: Comprobemos lo aprendido 2

E

1. Dada la recta numérica



   a) Ubique el punto interior P que divide al $\overline{AB}$ en la razón $1:2$.

   b) Ubique el punto interior Q que divide al $\overline{BC}$ en la razón $2:1$.

2. Calcule la coordenada p del punto interior P de un segmento cuyos extremos son dados, tal que

   a) $A(4)$ y $B(8)$ y P divide al $\overline{AB}$ en la razón $1:3$.

   b) $C(-5)$ y $D(5)$ y P divide al $\overline{CD}$ en la razón $4:1$.

   c) $D(-7)$ y $F(3)$ y P es punto medio del $\overline{DF}$.

3. Calcule la coordenada p del punto exterior P de un segmento, tal que

   a) $A(4)$ y $B(6)$ y P divide al $\overline{AB}$ en la razón $3:1$.

   b) $D(-6)$ y $F(2)$ y P divide al $\overline{DF}$ en la razón $4:1$.

   c) $H(-5)$ y $J(2)$ y P divide al $\overline{HJ}$ en la razón $1:4$.

   d) $C(-3)$ y $D(1)$ y P divide al $\overline{CD}$ en la razón $1:2$.

4. Sea $\overline{AB}$ y P un punto en su interior. Encuentre las longitudes AP y PB

   a) Si la longitud del $\overline{AB}$ es $30cm$, $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$ están en la razón $3:7$.

   b) Si la longitud del $\overline{AB}$ es $18cm$, $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$ están en la razón $5:1$.

   c) Si la diferencia entre las longitudes de $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$ es $4cm$ y la razón entre $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$ es $9:7$.

   d) Si la diferencia entre las longitudes de $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$ es $5cm$ y la razón entre $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$ es $2:1$.

Unidad 5

Semejanza

Sección 1: Criterios de semejanza de triángulos

Contenido 1: Definición de semejanza de triángulos

P

En los triángulos de la derecha,

$\overline{AC} \parallel \overline{DF}$ y $\overline{BC} \parallel \overline{EF}$

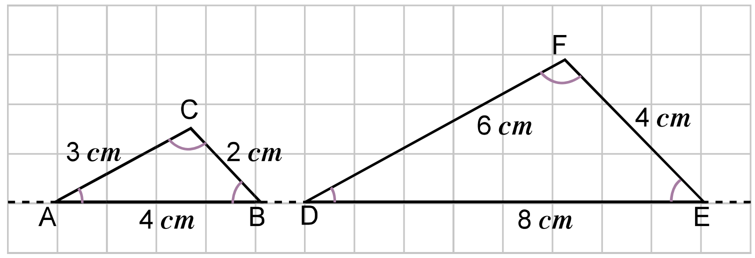
a) Complete:

$\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{\square}{\square}$, $\dfrac{BC}{EF} = \dfrac{\square}{\square}$, $\dfrac{AC}{DF} = \dfrac{\square}{\square}$

¿Son proporcionales los lados correspondientes de los triángulos de la derecha?

b) Justifique por qué $\measuredangle A = \measuredangle D$, $\measuredangle B = \measuredangle E$ y $\measuredangle C = \measuredangle F$.

Dos segmentos son paralelos si las rectas que los contienen son paralelas.



S

a) $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{BC}{EF} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$ y $\dfrac{AC}{DF} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

Dado que la razón entre las medidas de los lados correspondientes de ΔABC y ΔDEF es la misma, entonces los segmentos son proporcionales.

b) $\measuredangle A = \measuredangle D$ por ser correspondientes entre paralelas.

$\measuredangle B = \measuredangle E$ por ser correspondientes entre paralelas.

$\measuredangle C = \measuredangle F$ porque la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es 180°, $\measuredangle A = \measuredangle D$ y $\measuredangle B = \measuredangle E$.

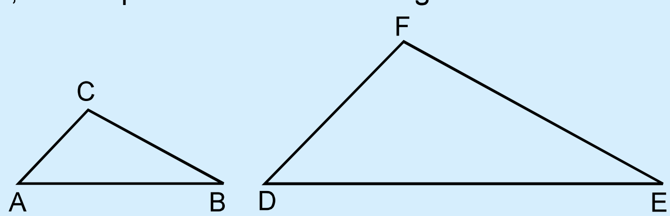
En conclusión, todos los cocientes $\dfrac{AB}{DE}$, $\dfrac{BC}{EF}$ y $\dfrac{AC}{DF}$ son iguales a $\dfrac{1}{2}$ y $\measuredangle A$, $\measuredangle B$, $\measuredangle C$ son iguales a $\measuredangle D$, $\measuredangle E$, $\measuredangle F$ respectivamente, entonces se dice que ΔABC y ΔDEF son semejantes.

C

Si en dos triángulos, por ejemplo los de la derecha, se cumplen las condiciones siguientes:

i) $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AC}{DF}$

ii) $\measuredangle A = \measuredangle D$, $\measuredangle B = \measuredangle E$, $\measuredangle C = \measuredangle F$



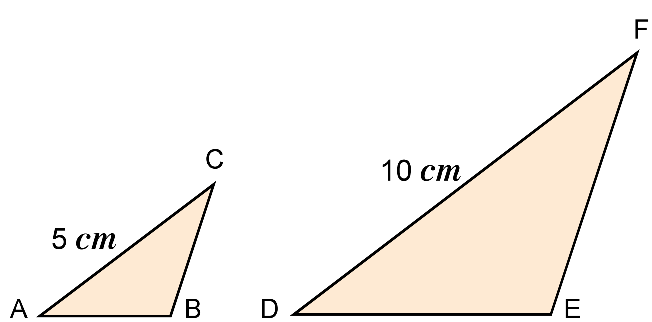
entonces el **ΔABC es semejante al ΔDEF** y se escribe en símbolos $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

E

Si $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, complete los espacios en blanco:

a) $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{\square}{\square}$, $\dfrac{BC}{EF} = \dfrac{\square}{\square}$, $\dfrac{AC}{DF} = \dfrac{\square}{\square}$

b) $\measuredangle A =$ ____, $\measuredangle B =$ ____, ____ $= \measuredangle F$



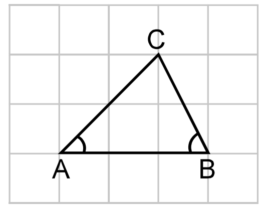
Contenido 2: Criterio de semejanza Ángulo-Ángulo (AA)

P

Dado el triángulo de la figura, construya un ΔDEF, tal que:

1. $DE = 2AB$
2. $\measuredangle D = \measuredangle A$
3. $\measuredangle E = \measuredangle B$

¿Son semejantes ΔABC y ΔDEF?



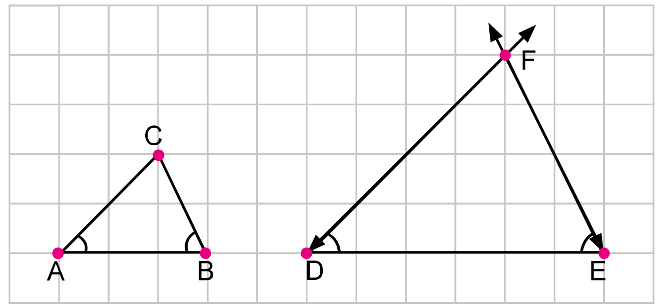
Una recta es paralela a un segmento si la recta que contiene a este es paralela a aquella.

S

Para la construcción del ΔDEF se llevan a cabo los siguientes pasos:

1. Se traza el $\overline{DE}$ de longitud $DE = 2AB$ sobre la línea en la que está $\overline{AB}$.
2. Se traza una recta paralela a $\overline{AC}$ que pase por el punto D. Así $\measuredangle D = \measuredangle A$.
3. Se traza una recta paralela a $\overline{BC}$ que pase por el punto E. Así $\measuredangle E = \measuredangle B$.

Se etiqueta con la letra F el punto donde se intersecan estas rectas.



De 2. y 3. se tiene que $\measuredangle A = \measuredangle D$ y $\measuredangle E = \measuredangle B$, además en un triángulo la suma de las medidas de los ángulos es 180°, entonces $\measuredangle C = \measuredangle F$.

Se observa en la figura que $EF = 2BC$ y $DF = 2AC$. Esto significa que $\dfrac{DE}{AB} = \dfrac{EF}{BC} = \dfrac{DF}{AC} = 2$.

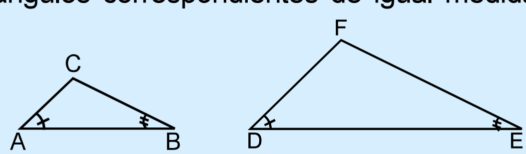
En consecuencia, $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

C

Criterio de semejanza Ángulo-Ángulo (AA)

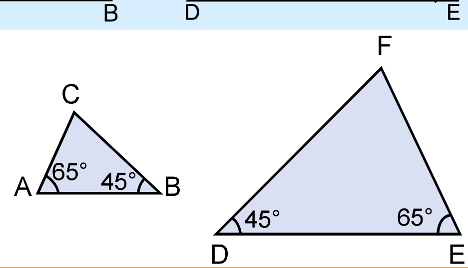
Dos triángulos son semejantes si tienen dos pares de ángulos correspondientes de igual medida. En símbolos:

$$\text{Si } \begin{cases} \measuredangle A = \measuredangle D \\ \measuredangle B = \measuredangle E \end{cases}, \text{ entonces } \Delta ABC \sim \Delta DEF$$



Ejemplo

Investigue si los triángulos de la derecha son semejantes.

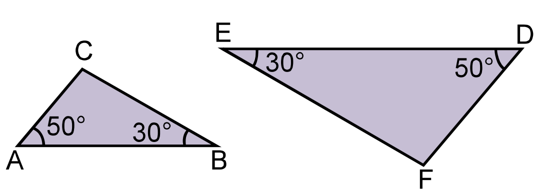


Como $\measuredangle A = \measuredangle E = 65°$ y $\measuredangle B = \measuredangle D = 45°$, entonces $\Delta ABC \sim \Delta EDF$ (por AA).

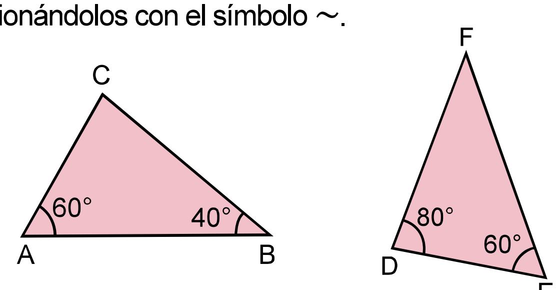
E

1. Investigue si las parejas de triángulos dados en cada inciso son semejantes, Justifique su respuesta.
2. En caso de que lo sean escriba la semejanza entre ellos relacionándolos con el símbolo $\sim$.

a)



b)

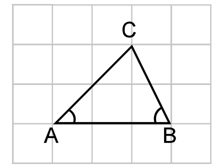


Contenido 3: Criterio de semejanza Lado-Lado-Lado (LLL)

P

Dado el triángulo de la figura, construya un ΔDEF, usando regla, compás y transportador, tal que:

1. DE = 2AB
2. EF = 2BC
3. DF = 2AC



¿Son semejantes ΔABC y ΔDEF?

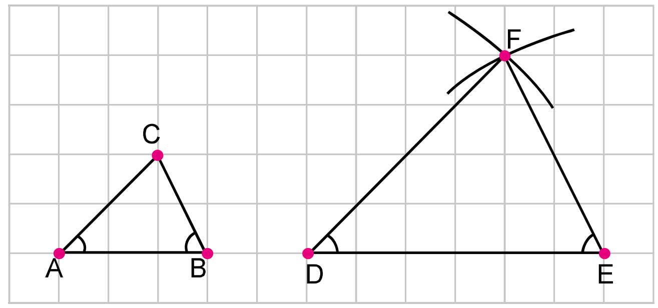
S

La construcción del ΔDEF es posible con los siguientes pasos:

1. Se traza $\overline{DE}$ de longitud DE = 2AB sobre la línea en la que está $\overline{AB}$.
2. Se traza un arco de radio 2BC y centro E.
3. Se traza un arco de radio 2AC y centro D.

Se etiqueta con F el punto donde se intersecan los arcos.

Se une el punto F con los extremos de DE y se forma el ΔDEF.



Con el transportador se verifica que ∡A = ∡D, ∡B = ∡E y ∡C = ∡F.

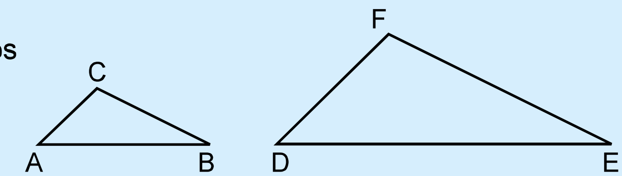
Por tanto, ΔABC∼ΔDEF.

C

Criterio de congruencia Lado-Lado-Lado (LLL)

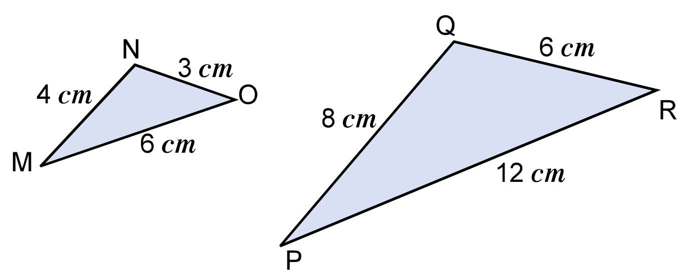
Dos triángulos son semejantes si tienen los lados correspondientes proporcionales. En símbolos:

Si $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$, entonces ΔABC∼ΔDEF.



Ejemplo

Investigue si los triángulos de la derecha son semejantes.

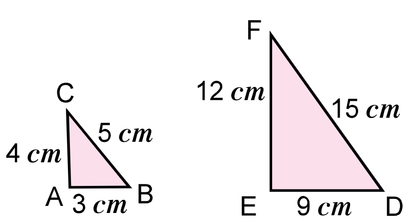


Como $\frac{MN}{PQ} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, $\frac{NO}{QR} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $\frac{MO}{PR} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$, entonces ΔMNO∼ΔPQR (por LLL).

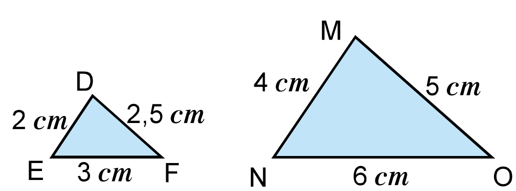
E

1. Investigue si la pareja de triángulos dada en cada inciso son semejantes, justifique su respuesta.
2. En caso de que lo sea escriba la semejanza entre ellos relacionándolos con el símbolo ∼.

a)



b)



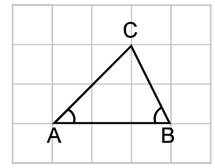
Contenido 4: Criterio de semejanza Lado-Ángulo-Lado (LAL)

P

Dado el triángulo de la figura de la derecha, construya un ΔDEF, haciendo uso de regla, compás y transportador, que cumpla:

1. DE $=$ 2AB
2. $\measuredangle$D $=$ $\measuredangle$A
3. DF $=$ 2AC

¿Son semejantes ΔABC y ΔDEF?

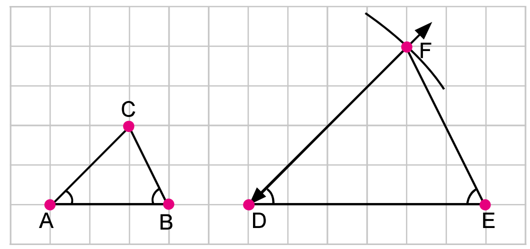


S

La construcción del ΔDEF es posible con los siguientes pasos:

1. Se traza $\overline{\text{DE}}$ de longitud DE $=$ 2AB sobre la línea en la que está $\overline{\text{AB}}$.
2. Se traza una recta paralela a $\overline{\text{AC}}$ que pase por el punto D.
3. Se traza un arco de radio 2AC y centro D.

Se etiqueta con F el punto donde se intersecan estas rectas.
Se une el punto F con el punto E y se forma el ΔDEF.



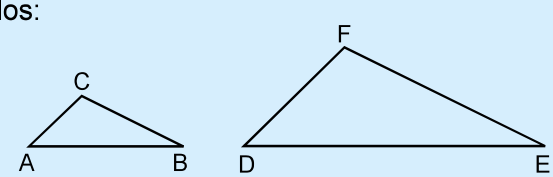
Se observa en la figura que EF $=$ 2BC, entonces ΔABC $\sim$ ΔDEF.

C

Criterio de semejanza Lado-Ángulo-Lado (LAL)

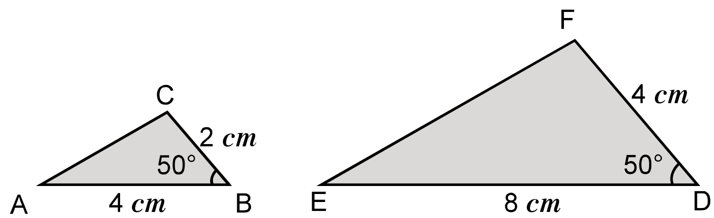
Dos triángulos son semejantes si tienen dos pares de lados correspondientes proporcionales y los ángulos incluidos entre ellos de igual medida. En símbolos:

$$\text{Si} \begin{cases} \dfrac{\text{AB}}{\text{DE}} = \dfrac{\text{AC}}{\text{DF}}, \\ \measuredangle \text{A} = \measuredangle \text{D} \end{cases} \quad \text{entonces } \Delta\text{BAC} \sim \Delta\text{EDF}$$



Ejemplo

Investigue si los triángulos de la derecha son semejantes.

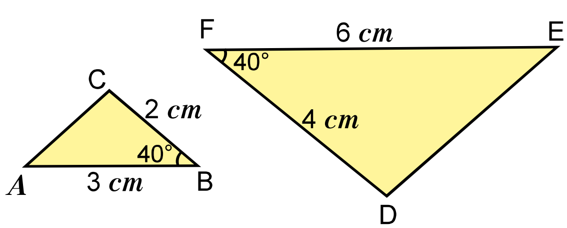


Como $\frac{\text{AB}}{\text{ED}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, $\frac{\text{BC}}{\text{DF}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ y $\measuredangle$B $=$ $\measuredangle$D $=$ 50º, entonces ΔABC $\sim$ ΔEDF (por LAL).

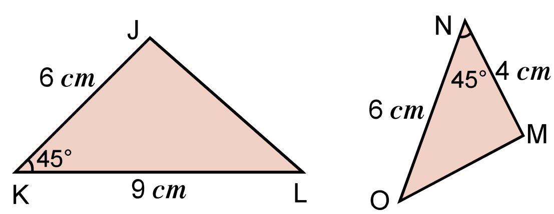
E

1. Investigue si la pareja de triángulos dada en cada inciso son semejantes, justifique su respuesta.
2. En caso de ser semejantes escriba la semejanza entre ellos utilizando el símbolo $\sim$.

a)



b)

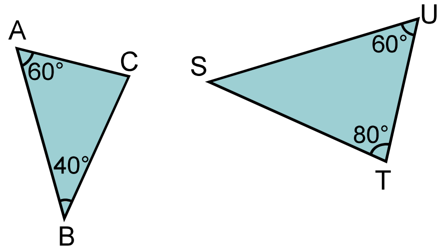


Contenido 5: Comprobemos lo aprendido 1

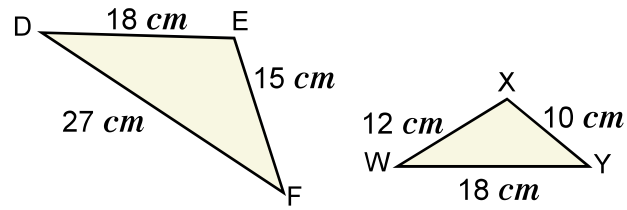
E

1. Dada la pareja de triángulos en cada inciso, investigue si son semejantes e indique el criterio que lo justifica. Exprese la semejanza entre ellos utilizando el símbolo $\sim$.

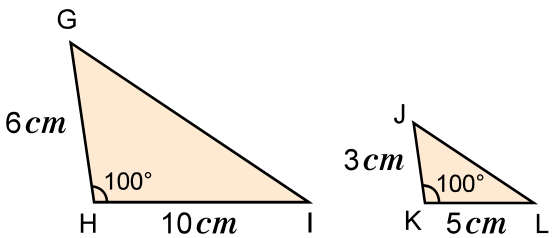
a)



b)

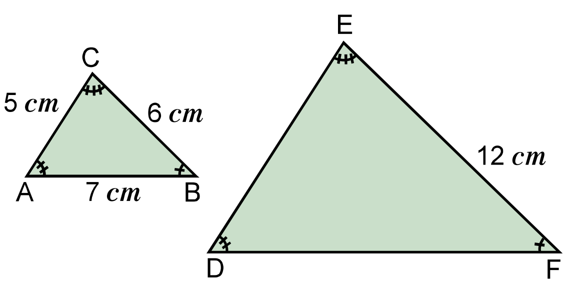


c)

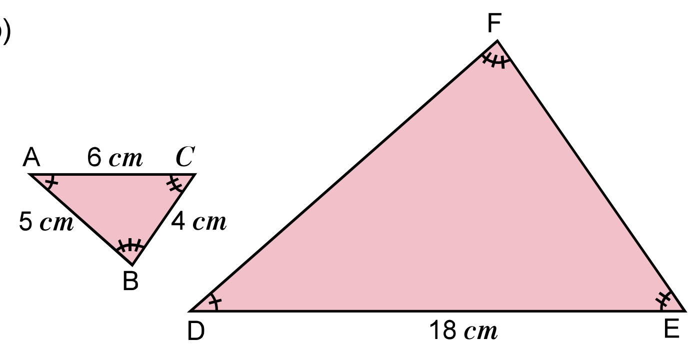


2. En cada inciso los triángulos son semejantes. Calcule las medidas de los otros lados.

a)

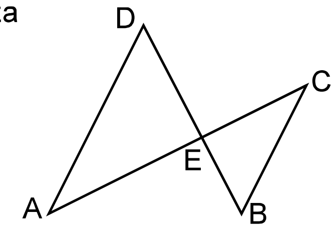


b)



Contenido 6: Demostración de la semejanza de triángulos utilizando AA

Ejemplo En la figura, $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, demuestre usando el criterio de semejanza AA que $\Delta AED \sim \Delta CEB$.



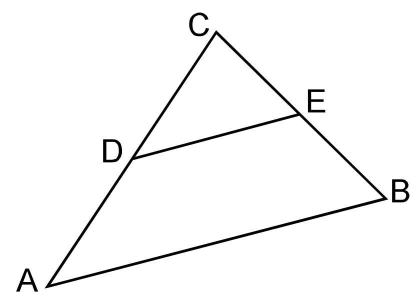
Pasos	Justificación
1) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$	Hipótesis (Suposición o dato)
2) $\measuredangle DAE = \measuredangle BCE$	Por ser alt. int. y paso 1)
3) $\measuredangle AED = \measuredangle CEB$	Por ser opuestos por el vértice
4) $\Delta AED \sim \Delta CEB$	Por el criterio de semejanza AA en pasos 2) y 3)

alt. int.: ángulos alternos internos.

Se concluye entonces que si $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ y $\overleftrightarrow{AC}$ es transversal, entonces $\Delta AED \sim \Delta CEB$.

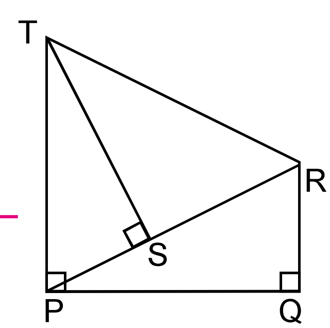
E

1. En la figura, si $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$, entonces $\Delta ACB \sim \Delta DCE$.
   a) Identifique la hipótesis y la tesis.
   b) Complete la demostración.



Pasos	Justificación
1) ______	Hipótesis
2) $\measuredangle A =$ ______	Por ser correspondientes y paso 1)
3) $\measuredangle C = \measuredangle C$	______
4) ______ $\sim$ ______	Por el criterio de semejanza AA en pasos 2) y 3)

2. En la figura, si $\measuredangle TPQ = \measuredangle TSP = \measuredangle Q = 90°$, entonces $\Delta PST \sim \Delta RQP$.
   a) Identifique las hipótesis y la tesis.
   b) Complete la demostración.



Pasos	Justificación
1) ______	Hipótesis
2) ______	Hipótesis
3) $\measuredangle TPS + \measuredangle SPQ = 90°$	______
4) $\measuredangle SPQ + \measuredangle PRQ = 90°$	______
5) $\measuredangle TPS + \measuredangle SPQ = \measuredangle SPQ + \measuredangle PRQ$	Por los pasos 3) y 4)
6) $\measuredangle TPS = \measuredangle PRQ$	______
7) ______ $\sim$ ______	Por el criterio de semejanza AA en pasos 1) y 6)

Contenido 7: Demostración de la semejanza de triángulos utilizando LLL

P

Demuestre: si los ΔABC y ΔDEF son equiláteros, entonces $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

S

Pasos	Justificación
1) ΔABC y ΔDEF son equiláteros	Hipótesis
2) $AB = BC = AC$ $DE = EF = DF$	Definición de triángulo equilátero
3) $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AC}{DF}$	Paso 2)
4) $\Delta ABC \sim \Delta DEF$	Por el criterio de semejanza LLL en paso 3)

C

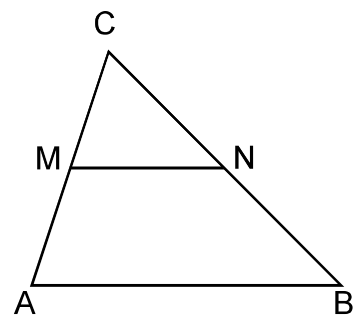
Dos triángulos equiláteros son semejantes entre sí.

E

En la figura, si M y N son los puntos medios respectivos de $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, y $MN = \frac{1}{2}AB$, entonces $\Delta ABC \sim \Delta MNC$.

a) Escriba la hipótesis y la tesis.

b) Llene los espacios en la tabla de abajo para completar la demostración de la proposición anterior.

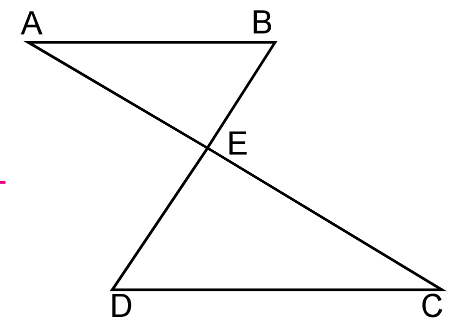


Pasos	Justificación
1)	Hipótesis
2)	Hipótesis
3)	Hipótesis
4) $NC = \frac{1}{2}BC$	
5) $MC = \frac{1}{2}AC$	
6) $\dfrac{MN}{AB} = \dfrac{NC}{BC} = \dfrac{MC}{AC}$	
7) $\Delta ABC \sim \Delta MNC$	

Contenido 8: Demostración de la semejanza de triángulos utilizando LAL

P

En la figura, si $\frac{AE}{CE} = \frac{BE}{DE}$, entonces $\Delta AEB \sim \Delta CED$.
Complete la demostración.



Pasos	Justificación
1) $\frac{AE}{CE} = \frac{BE}{DE}$	Hipótesis
2) $\measuredangle AEB = \measuredangle CED$	$\boxed{}$
3) $\boxed{} \sim \boxed{}$	LAL en pasos 1) y 2)

S

Pasos	Justificación
1) $\frac{AE}{CE} = \frac{BE}{DE}$	Hipótesis
2) $\measuredangle AEB = \measuredangle CED$	Por ser opuestos por el vértice
3) $\boxed{\Delta AEB} \sim \boxed{\Delta CED}$	LAL en pasos 1) y 2)

C

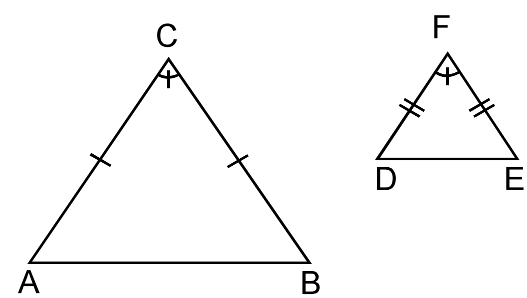
Si ΔAEB y ΔCED tienen los lados $\overline{AE}$ y $\overline{BE}$ proporcionales a $\overline{CE}$ y $\overline{DE}$ respectivamente y el vértice común E, entonces ellos son semejantes.

E

Si en los triángulos de la figura, $AC = BC$, $DF = EF$ y $\measuredangle C = \measuredangle F$, demuestre entonces que $\Delta ACB \sim \Delta DFE$.

a) Escriba la hipótesis y la tesis.

b) Complete la demostración.



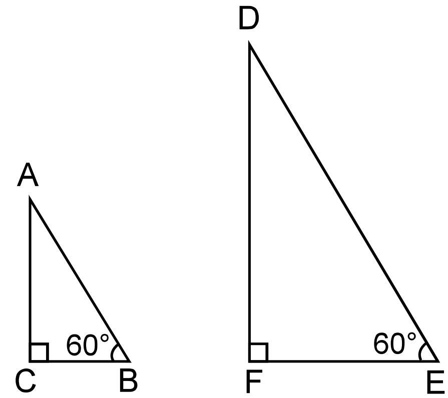
Pasos	Justificación
1) $\boxed{}$	Hipótesis
2) $DF = EF$	$\boxed{}$
3) $\frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$	$\boxed{}$
4) $\boxed{} = \boxed{}$	Hipótesis
5) $\boxed{} \sim \Delta DFE$	Por el criterio de semejanza LAL en pasos 3) y 4)

Sección 2: Semejanza de triángulos rectángulos y paralelismo

Contenido 1: Semejanza de triángulos rectángulos

P

Investigue si los triángulos rectángulos dados son semejantes:



S

ΔABC y ΔDEF tienen dos pares de ángulos con la misma medida,

$$\measuredangle C = \measuredangle F = 90° \quad \text{y} \quad \measuredangle B = \measuredangle E = 60°.$$

Por lo tanto, por AA, $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

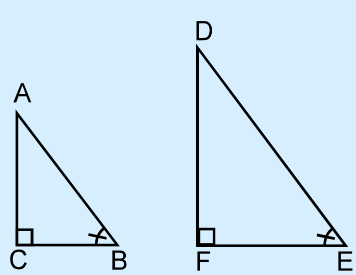
Por tanto, dos triángulos rectángulos con un ángulo de 60º cada uno son semejantes.

C

Dos triángulos rectángulos son semejantes si:

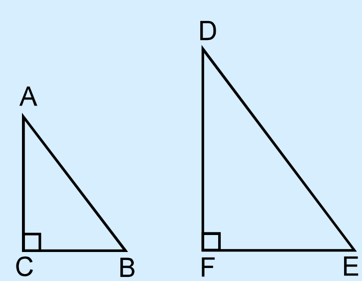
- ✓ Al menos un par de ángulos agudos tienen igual medida. (Ver figura 1)
- ✓ Sus catetos son proporcionales (LAL). (Ver figura 2)
- ✓ Las hipotenusas y un par de catetos son proporcionales (LAL). (Ver figura 3)

Figura 1



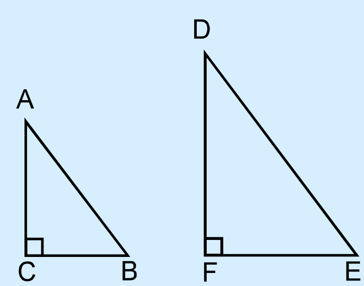
$\measuredangle B = \measuredangle E$

Figura 2



$$\frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$$

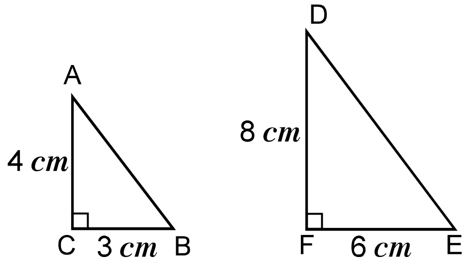
Figura 3



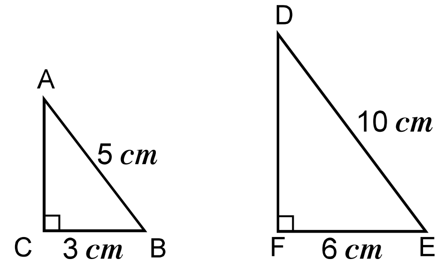
$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$$

Ejemplo Investigue si las siguientes parejas de triángulos rectángulos de cada inciso son semejantes, utilizando los criterios de semejanza de triángulos estudiados.

a)



b)



a) Se calculan las razones $\frac{AC}{DF}$ y $\frac{BC}{EF}$

$$\frac{AC}{DF} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \qquad \frac{BC}{EF} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Como las razones encontradas son iguales, se puede afirmar que los catetos de los triángulos rectángulos son proporcionales. Por tanto, $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

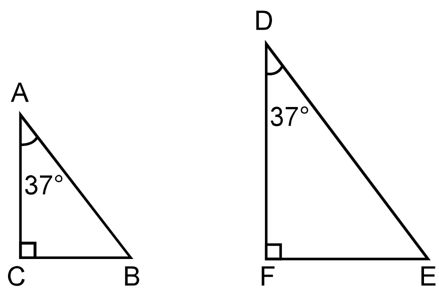
b) Como $\frac{AB}{DE} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ y $\frac{BC}{EF} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, las hipotenusas y un par de catetos son proporcionales.

Por lo tanto, $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

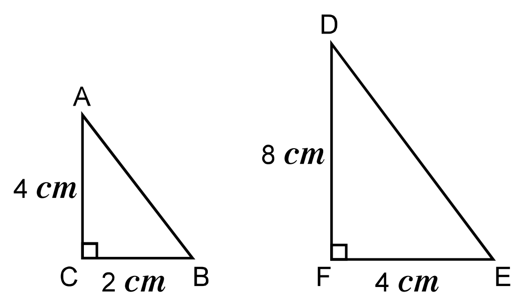
E

Investigue si las siguientes parejas de triángulos rectángulos son semejantes, utilizando los criterios de semejanza de triángulos estudiados.

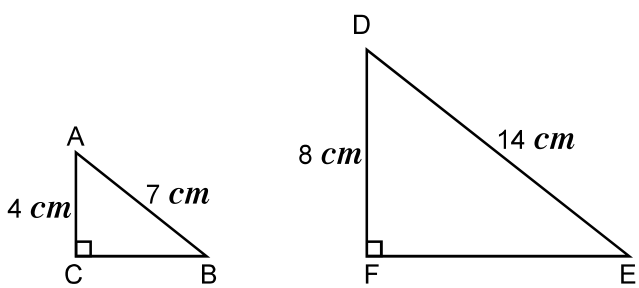
a)



b)



c)



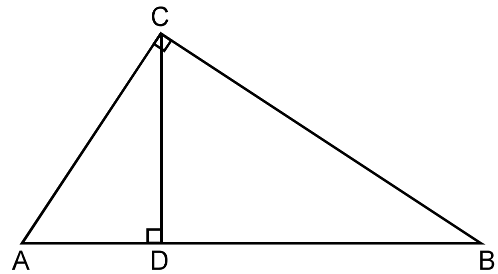
Contenido 2: Teorema del cateto

P

Complete la siguiente demostración para asegurar que: si $\overline{CD}$ es la altura correspondiente a la hipotenusa $\overline{AB}$ del triángulo rectángulo ABC, entonces
$\Delta ACD \sim \Delta ABC$ y $\Delta ABC \sim \Delta CBD$

y en consecuencia

$$AC^2 = (AD)(AB)$$
$$BC^2 = (BD)(AB)$$



Demostración

El $\angle A$ es un ángulo agudo y común para los triángulos rectángulos ΔACD y ΔABC, así que $\Delta ACD \sim$ ________ ①

Similarmente, el $\angle B$ es ángulo agudo y común para los triángulos rectángulos ΔABC y ΔCBD, por lo tanto $\Delta ABC \sim$ ________ ②

Por definición de semejanza en ①, $\frac{AD}{AC} = \frac{\square}{\square}$ ③

de donde, $AC^2 = (\_\_\_\_)(\_\_\_\_)$ ④

Por definición de semejanza en ②, $\frac{BD}{BC} = \frac{\square}{\square}$ ⑤

de donde, $BC^2 = (\_\_\_\_)(\_\_\_\_)$ ⑥

S

① $\Delta ACD \sim \underline{\mathbf{\Delta ABC}}$

② $\Delta ABC \sim \underline{\mathbf{\Delta CBD}}$

③ $\frac{AD}{AC} = \frac{\mathbf{AC}}{\mathbf{AB}}$

④ $AC^2 = (\underline{\mathbf{AD}})\ (\underline{\mathbf{AB}})$

⑤ $\frac{BD}{BC} = \frac{\mathbf{BC}}{\mathbf{BA}}$

⑥ $BC^2 = (\underline{\mathbf{BD}})\ (\underline{\mathbf{AB}})$

C

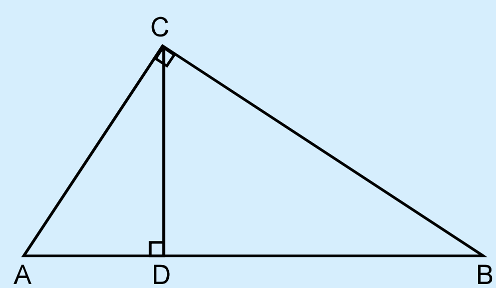
Teorema del cateto

Si $\overline{CD}$ es la altura correspondiente a la hipotenusa $\overline{AB}$ del triángulo rectángulo ABC, entonces

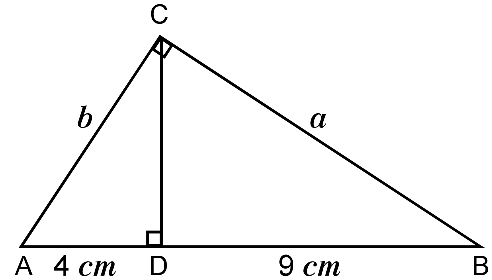
$\Delta ACD \sim \Delta ABC$ y $\Delta ABC \sim \Delta CBD$

y en consecuencia

$AC^2 = (AD)(AB)$
$BC^2 = (BD)(BA)$.



Ejemplo A partir de la figura calcule el valor de b y a.



Se hace la identificación $AC = b$, $CB = a$, $AD = 4$, $DB = 9$ y $AB = 4 + 9 = 13$. Luego,

$$AC^2 = (AD)(AB) \quad ①$$

$$BC^2 = (BD)(BA) \quad ②$$

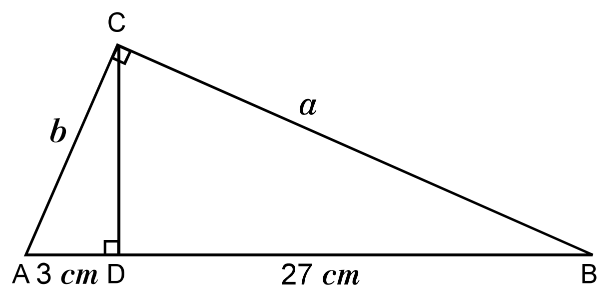
A continuación se sustituyen en ① y ② todos los valores dados

$$b^2 = (4)(13) = 52, \text{ luego} \qquad \boldsymbol{b = 2\sqrt{13}}$$

$$a^2 = (9)(13) = 117, \text{ luego} \qquad \boldsymbol{a = 3\sqrt{13}}$$

E

Calcule el valor de b y a de acuerdo con los datos de la figura adjunta



Contenido 3 : Teorema de la altura

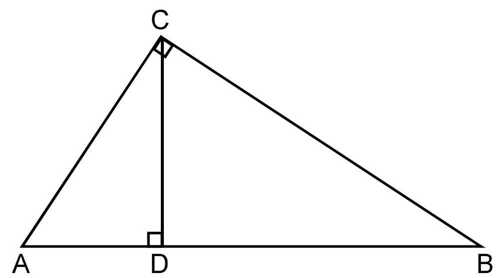
P

Complete la siguiente demostración para asegurar que:
si $\overline{CD}$ es la altura correspondiente a la hipotenusa $\overline{AB}$ del triángulo rectángulo ABC, entonces

$$\Delta ACD \sim \Delta CBD$$

y en consecuencia

$$CD^2 = (AD)(BD)$$



Demostración

Si $\overline{CD}$ es la altura correspondiente a la hipotenusa $\overline{AB}$ del triángulo rectángulo ABC, entonces

$$\Delta ACD \sim \_\_\_\_\_\_\_\_ \quad ①$$

$$\Delta ABC \sim \_\_\_\_\_\_\_\_ \quad ②$$

Por ① y ②, $\Delta ACD \sim \Delta CBD$. Luego, por definición de semejanza.

$$\frac{AD}{CD} = \frac{\square}{\square} \quad ③$$

de donde,

$$CD^2 = (\_\_\_\_)(\_\_\_\_) \quad ④$$

S

Las respuestas enumeradas a continuación llenan los espacios en blanco que completan la demostración.

① $\Delta ACD \sim \underline{\mathbf{\Delta ABC}}$

② $\Delta ABC \sim \underline{\mathbf{\Delta CBD}}$

③ $\dfrac{AD}{CD} = \dfrac{\mathbf{CD}}{\mathbf{BD}}$

④ $CD^2 = \underline{\mathbf{(AD)}}\ \underline{\mathbf{(BD)}}$

C

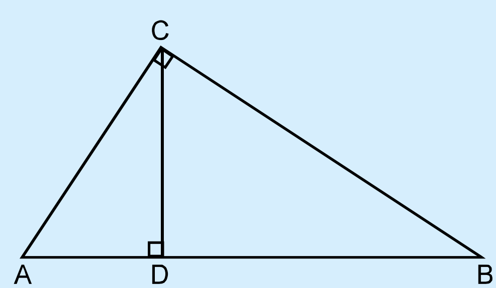
Teorema de la altura

Si $\overline{CD}$ es la altura correspondiente a la hipotenusa $\overline{AB}$ del triángulo rectángulo ABC, entonces

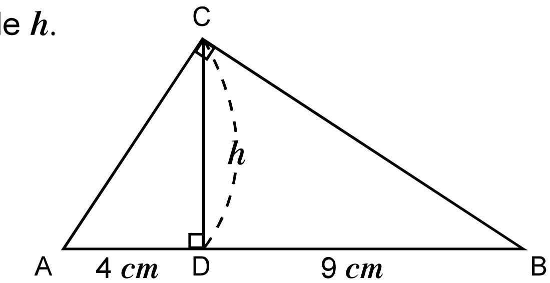
$$\Delta ACD \sim \Delta CBD$$

y en consecuencia

$$CD^2 = (AD)(BD).$$



Ejemplo A partir de la figura de la derecha calcule el valor de h.



Si se hace las identificaciones $CD = h$, $AD = 4$ y $DB = 9$ y se sustituyen en

$$CD^2 = (AD)(BD)$$

se obtiene

$$h^2 = (4)(9) = 36$$

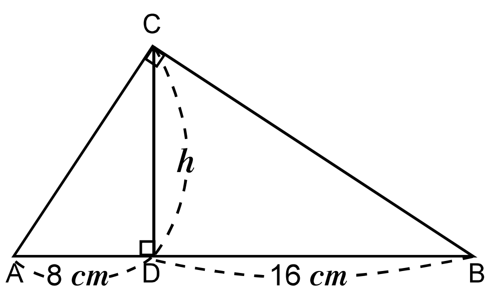
como $h > 0$,

$$\boldsymbol{h = 6\ cm}$$

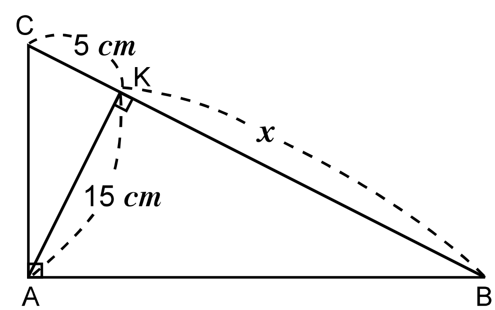
E

Calcule el valor de h y x en el triángulo que le corresponde a partir de los datos proporcionados.

a)



b)



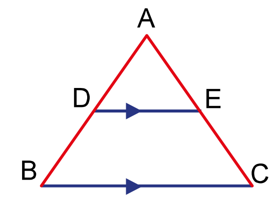
Contenido 4: Rectas paralelas y segmentos proporcionales (1)

P

Complete la siguiente demostración para asegurar que:

si en el ΔABC, $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, D está entre A y B, y E está entre A y C,

entonces $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{DE}{BC}$.



Demostración

Dado que $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, y $\overline{AB}$ es un segmento transversal a estos, por ser ángulos correspondientes entre paralelas,

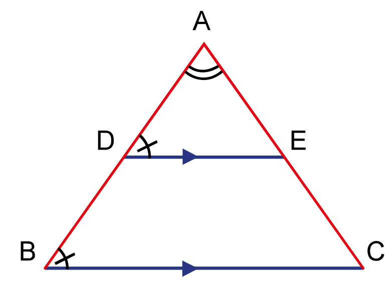
$\measuredangle ADE =$ ________ ①

Además,

$\measuredangle DAE =$ ________ ②

Luego, por el criterio de semejanza AA

$\Delta ADE \sim$ ________ ③



En consecuencia, por ③, la proporcionalidad entre los lados correspondientes es

$$\frac{AD}{AB} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \frac{DE}{BC}$$ ④

S

① $\measuredangle ADE = \underline{\boldsymbol{\measuredangle ABC}}$

② $\measuredangle DAE = \underline{\boldsymbol{\measuredangle BAC}}$

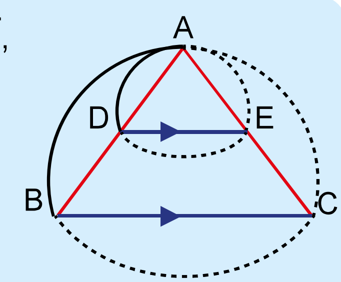
③ $\Delta ADE \sim \underline{\boldsymbol{\Delta ABC}}$

④ $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{\mathbf{AE}}{\mathbf{AC}} = \dfrac{DE}{BC}$

C

Si en el ΔABC, D está entre A y B, E está entre A y C, y $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, entonces

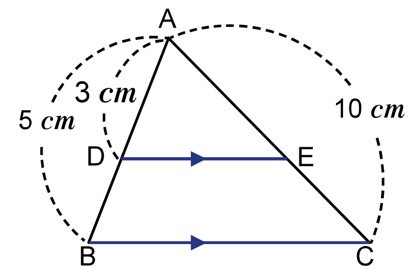
$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$



Ejemplo Si $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, calcule la longitud de $\overline{AE}$.

Dado $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, entonces $\Delta ADE \sim \Delta ABC$ y de acuerdo con la conclusión,

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$



Dado que según la figura $AD = 3$, $AB = 5$ y $AC = 10$, se sustituye en la expresión anterior, resulta

$$\frac{3}{5} = \frac{AE}{10}$$

$$5AE = (3)(10)$$

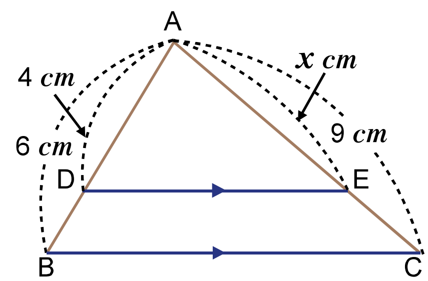
$$AE = \frac{30}{5}$$

$$AE = 6$$

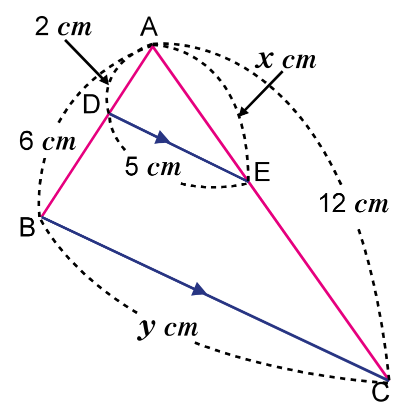
Por lo tanto, la longitud de $\overline{AE}$ es **6 *cm***.

E

a) Si $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, calcule el valor de x con los datos de la figura.



b) Si $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, calcule los valores de x y y con los datos proporcionados por la figura adjunta.

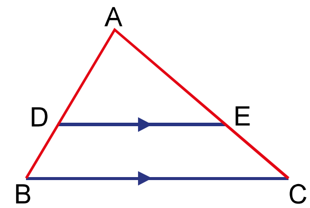


Contenido 5: Rectas paralelas y segmentos proporcionales (2)

P

Complete la siguiente demostración para asegurar que:
en el ΔABC, si $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, D está entre A y B y E está entre A y C, entonces

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}.$$

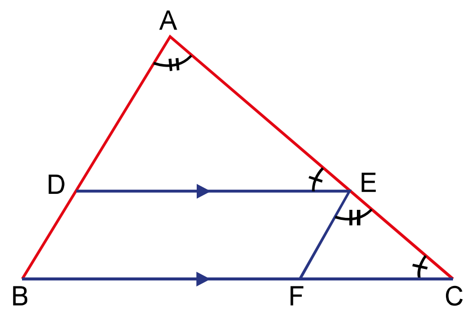


Demostración

Se traza una recta paralela a $\overline{AB}$ que pase por E y corte a $\overline{BC}$ en F.

Como $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ y $\overline{AC}$ es un segmento transversal a estos, por ser ángulos correspondientes entre paralelas,

$\measuredangle AED =$ ________ ①



De igual manera, como $\overline{EF} \parallel \overline{AB}$

$\measuredangle FEC =$ ________ ②

Luego, por el criterio de semejanza AA

$\Delta ADE \sim$ ________ ③

En consecuencia, por la semejanza anterior

$\frac{AD}{EF} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ ④

Como el cuadrilátero DBFE es un paralelogramo, entonces $EF = DB$. Así que, se concluye que

$\frac{AD}{\boxed{}} = \frac{AE}{EC}$ ⑤

S

① $\measuredangle AED = \boldsymbol{\measuredangle ECF}$

② $\measuredangle FEC = \boldsymbol{\measuredangle A}$

③ $\Delta ADE \sim \boldsymbol{\Delta EFC}$

④ $\frac{AD}{EF} = \frac{\mathbf{AE}}{\mathbf{EC}}$

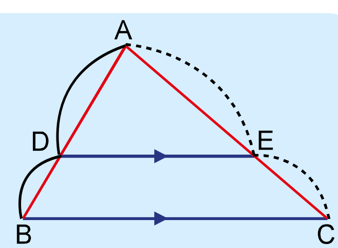
⑤ $\frac{AD}{\mathbf{DB}} = \frac{AE}{EC}$

C

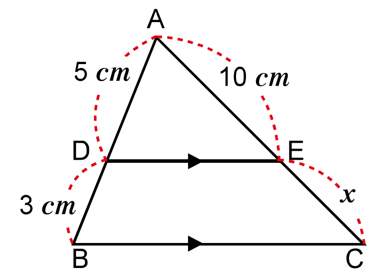
En el ΔABC, si D está entre A y B, E está entre A y C, y $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, entonces,

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

Es decir, $\overline{AD}$ y $\overline{DB}$ son proporcionales a $\overline{AE}$ y $\overline{EC}$ respectivamente.



Ejemplo Con los datos de la figura, si $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, calcule la longitud x de $\overline{EC}$.



Como $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, entonces por la conclusión anterior se tiene que $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$,

pero $AD = 5cm$, $DB = 3cm$, $AE = 10cm$ y $EC = x$, en consecuencia la proporción anterior se convierte en

$$\frac{5}{3} = \frac{10}{x}$$

$$(5)x = (3)(10)$$

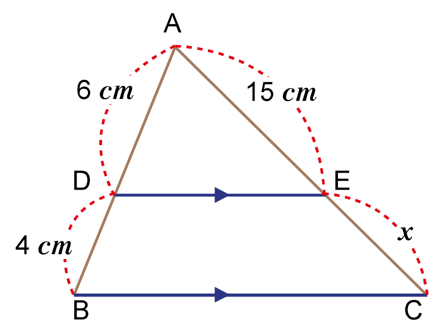
$$x = \frac{30}{5}$$

$$x = 6$$

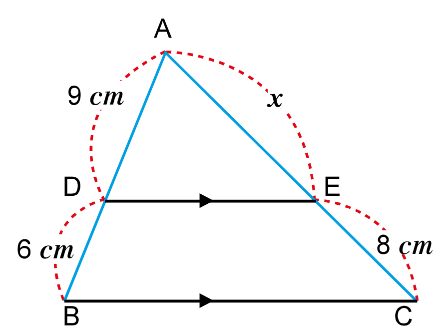
Por lo tanto, la longitud de $\overline{EC}$ es **6 cm**.

E

a) En la figura, si $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ calcule la longitud x de $\overline{EC}$.



b) En la figura, si $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ calcule la longitud x de $\overline{AE}$.



Contenido 6: Rectas paralelas y segmentos proporcionales (3)

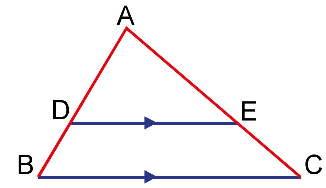
P

Complete los pasos de la demostración propuesta para asegurar la siguiente afirmación:

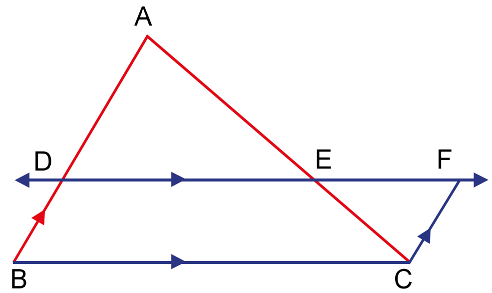
En el ΔABC de la figura, si se cumple que

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

entonces $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.



Demostración



Se traza en el ΔABC dado una recta paralela a $\overline{AB}$ que pase por C. Esta corta a la recta $\overleftrightarrow{DE}$ en F, así que

$$\Delta ADE \sim \text{\_\_\_\_\_\_\_\_} \qquad ①$$

Por la semejanza anterior,

$$\frac{AD}{CF} = \frac{\square}{\square} \qquad ②$$

Por hipótesis,

$$\frac{AD}{DB} = \frac{\square}{\square} \qquad ③$$

De ② y ③ se sigue que

$$\frac{AD}{DB} = \frac{\square}{\square} \qquad ④$$

En consecuencia, $\quad DB = \text{\_\_\_\_\_\_}$ ⑤

Como $DB = CF$ y $\overline{DB} \parallel \overline{CF}$, el cuadrilátero DBCF es un paralelogramo. Así que $\overline{DF} \parallel \overline{BC}$ y por lo tanto,

$$\overline{DE} \parallel \text{\_\_\_\_\_\_} \qquad ⑥$$

S

① $\measuredangle ADE \sim$ **ΔCFE**

② $\frac{AD}{CF} = \frac{\mathbf{AE}}{\mathbf{CE}}$

③ $\frac{AD}{DB} = \frac{\mathbf{AE}}{\mathbf{EC}}$

④ $\frac{AD}{DB} = \frac{\mathbf{AD}}{\mathbf{CF}}$

⑤ $DB =$ **CF**

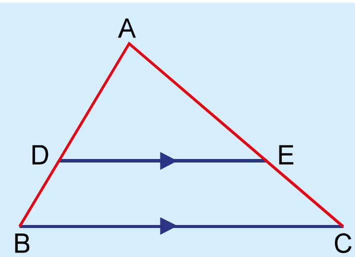
⑥ $\overline{DE} \parallel$ **$\overline{BC}$**

C

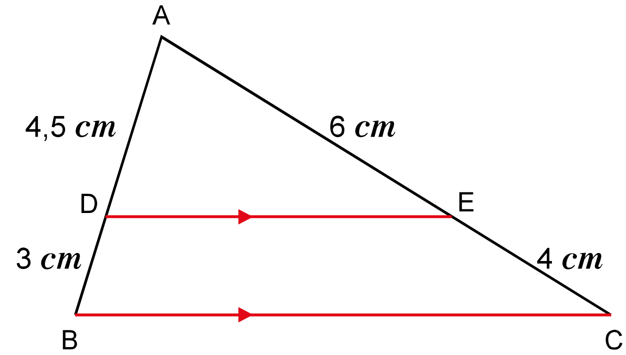
Si en el ΔABC se cumple la proporción $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$,

entonces

$$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$$



Ejemplo Determine, a partir de la figura, si $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.



Se calculan las razones $\frac{AD}{DB}$ y $\frac{AE}{EC}$, así

$$\frac{AD}{DB} = \frac{4,5}{3} = \left(\frac{9}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{2}$$

$$\frac{AE}{EC} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

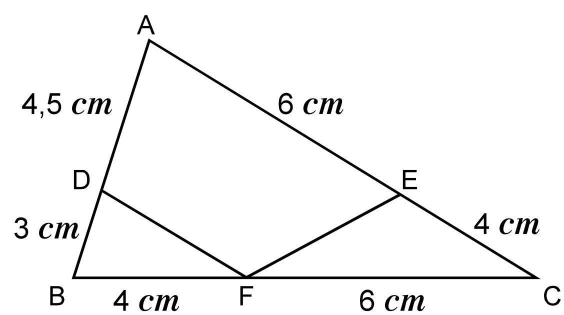
De lo anterior, se puede ratificar que se cumple la proporción

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} = \frac{3}{2},$$

Por lo tanto, $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.

E

Determine si $\overline{EF}$ o $\overline{FD}$ es paralelo a uno de los lados del ΔABC.



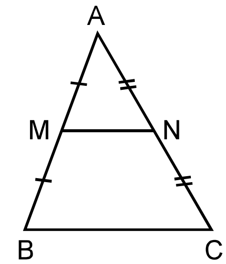
Contenido 7: Teorema de la base media

P

Complete la siguiente demostración para asegurar que si en el ΔABC, M y N son puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente, entonces

a) $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$

b) $MN = \frac{1}{2} BC$



Demostración

a) Por ser M punto medio de $\overline{AB}$ y N punto medio de $\overline{AC}$, se sigue que

$$\frac{AM}{MB} = \square \qquad ①$$

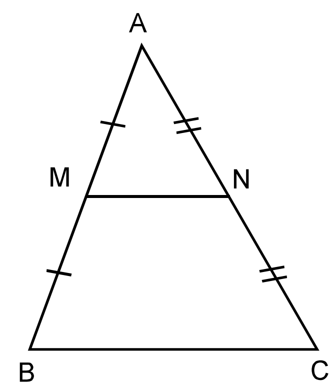
$$\frac{AN}{NC} = \square \qquad ②$$

de donde,

$$\frac{AM}{MB} = \frac{\square}{\square} \qquad ③$$

En consecuencia, $\overline{\mathbf{MN}} \parallel \overline{\mathbf{BC}}$.

El punto medio de un segmento es el punto que divide a este en dos segmentos de igual medida.



b) Como $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$, entonces $\Delta AMN \sim \Delta ABC$, así que

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{\square}{\square} = \frac{1}{2} \qquad ④$$

De $\frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$, se tiene

$$MN = \frac{1}{2}\ \underline{\qquad} \qquad ⑤$$

S

Las soluciones completas de los numerales anteriores son:

a) ① $\frac{AM}{MB} = \mathbf{1}$

② $\frac{AN}{NC} = \mathbf{1}$

③ $\frac{AM}{MB} = \frac{\mathbf{AN}}{\mathbf{NC}}$

b) ④ $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{\mathbf{MN}}{\mathbf{BC}} = \frac{1}{2}$

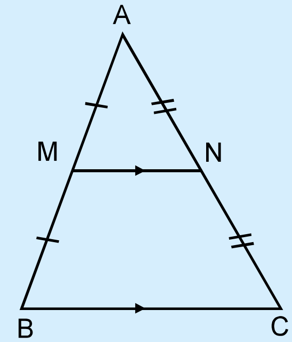
⑤ $MN = \frac{1}{2}\mathbf{BC}$

C

Teorema de la base media

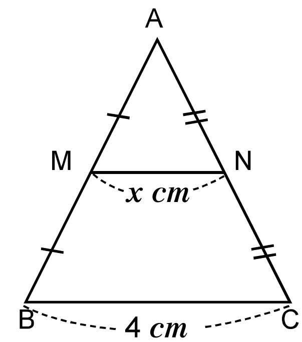
Si en el ΔABC, M y N son puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente,

entonces, $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ y $MN = \frac{1}{2}BC$.



Ejemplo

En la figura, si M y N son los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente, calcule el valor de x, la longitud del lado $\overline{MN}$ en la figura.



Como M y N son puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ en el ΔABC, entonces por la conclusión anterior

es decir,

$$MN = \frac{1}{2}BC$$

$$x = \left(\frac{1}{2}\right)(4)$$

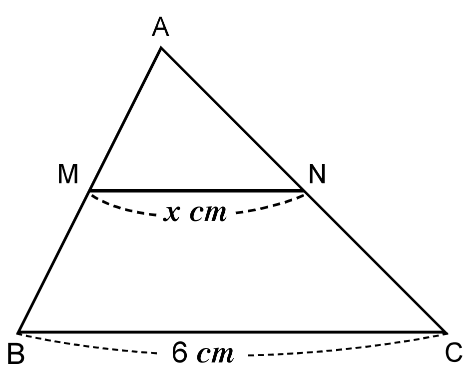
$$= \mathbf{2}$$

Por lo tanto, el valor de x es 2 cm.

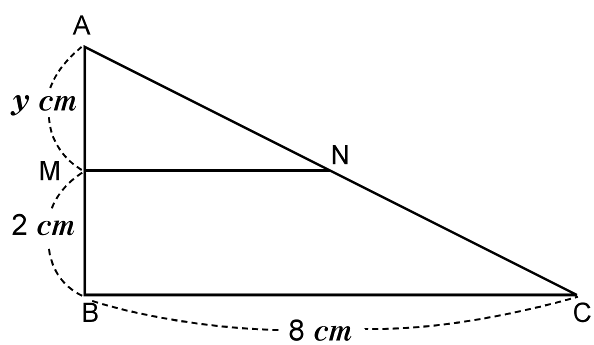
E

En cada ΔABC de los incisos a) y b), M y N son los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente. Calcule el valor de x y y, según corresponda.

a)



b)



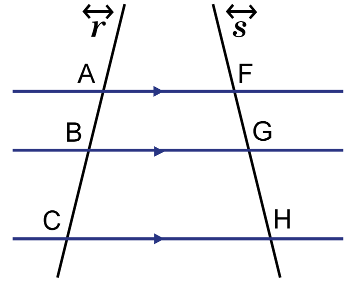
Contenido 8: Teorema de Tales

P

Complete la siguiente demostración para concluir que:

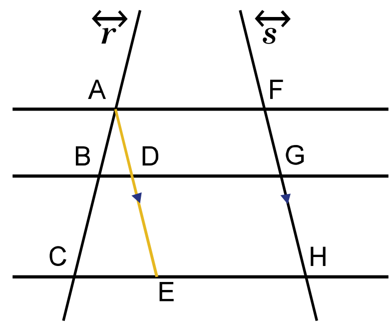
Si las rectas transversales $\overleftrightarrow{r}$ y $\overleftrightarrow{s}$ cortan a tres rectas paralelas, como se muestra en la figura de la derecha, entonces

$$\frac{AB}{BC} = \frac{FG}{GH}$$



Demostración

Desde el punto A se traza el $\overline{AE}$ paralelo a $\overline{FH}$ que intersecte a $\overline{BG}$ y $\overline{CH}$ en los puntos D y E respectivamente.



Como $\overline{BD} \parallel \overline{CE}$ en el ΔACE,

$$\frac{AB}{BC} = \frac{\square}{\square} \qquad (1)$$

Además, los cuadriláteros ADGF y DEHG son paralelogramos, entonces.

$$AD = \_\_\_\_\_ \text{ y } DE = \_\_\_\_\_\_ \qquad (2)$$

Por lo tanto,

$$\frac{AB}{BC} = \frac{\square}{\square} \qquad (3)$$

S

1. $\frac{AB}{BC} = \frac{\mathbf{AD}}{\mathbf{DE}}$

2. AD = **FG** y DE = **GH**

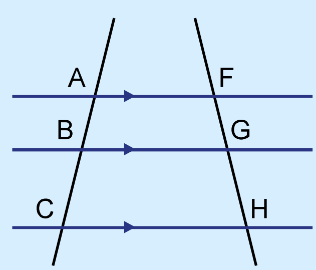
3. $\frac{AB}{BC} = \frac{\mathbf{FG}}{\mathbf{GH}}$

C

Teorema de Tales

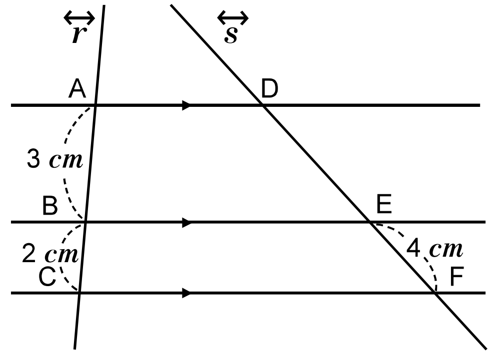
Si tres o más rectas paralelas son cortadas por dos transversales, los segmentos de las transversales determinados por las paralelas, son proporcionales. De acuerdo con la figura de la derecha

$$\frac{AB}{BC} = \frac{FG}{GH}$$



Ejemplo

En la figura $\overleftrightarrow{r}$ y $\overleftrightarrow{s}$ cortan a las tres rectas paralelas. Si AB $= 3\ cm$, BC $= 2\ cm$ y EF $= 4\ cm$, calcule la longitud de $\overline{\text{DE}}$.



Al cumplirse las condiciones del Teorema de Tales se escribe la proporción

$$\frac{\text{AB}}{\text{BC}} = \frac{\text{DE}}{\text{EF}}$$

pero AB $= 3\ cm$, BC $= 2\ cm$ y EF $= 4\ cm$, de aquí que

$$\frac{3}{2} = \frac{\text{DE}}{4}$$

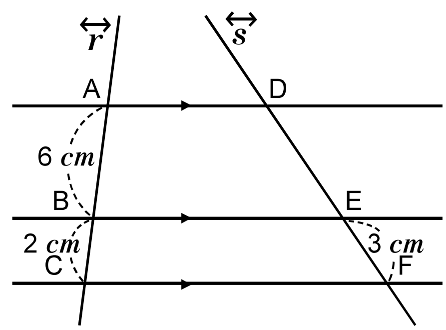
$$(2)\text{DE} = (3)(4)$$

$$\text{DE} = \frac{12}{2} = 6$$

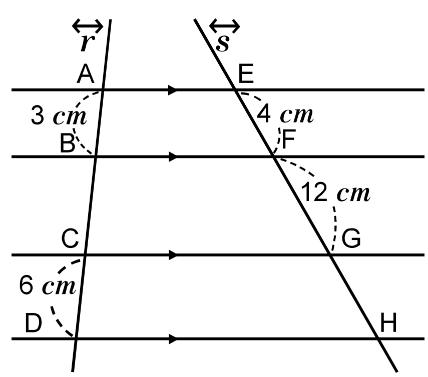
Por lo tanto, la longitud de $\overline{\text{DE}}$ es **6 *cm***.

E

a) En la figura de la derecha, $\overleftrightarrow{r}$ y $\overleftrightarrow{s}$ cortan a las tres rectas paralelas. Si AB $= 6\ cm$, BC $= 2\ cm$ y EF $= 3\ cm$, calcule la longitud de $\overline{\text{DE}}$.



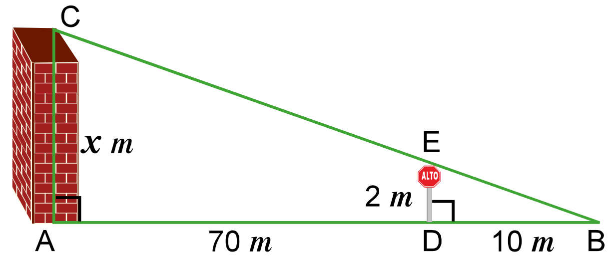
b) En la figura de la derecha, $\overleftrightarrow{r}$ y $\overleftrightarrow{s}$ cortan a las cuatro rectas paralelas. Si AB $= 3\ cm$, CD $= 6\ cm$, EF $= 4\ cm$ y FG $= 12\ cm$, calcule las longitudes de $\overline{\text{BC}}$ y $\overline{\text{GH}}$.



Contenido 9: Aplicación de semejanza

P

Una señal de tránsito de 2 metros de altura proyecta una sombra de 10 metros, al mismo tiempo una pared de un edificio que se encuentra en línea recta con esta señal proyecta una sombra de 80 metros. Calcule la altura de la pared.



S

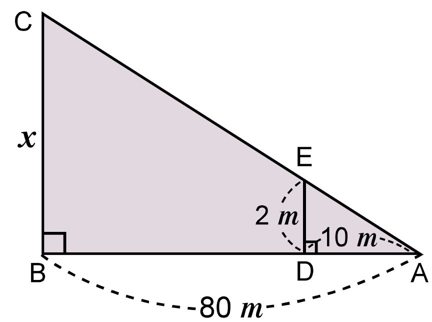
De acuerdo con la situación, ΔADE~ΔABC, así que

$$\frac{10}{2} = \frac{80}{x}$$

$$10x = (2)(80)$$

$$x = \frac{160}{10}$$

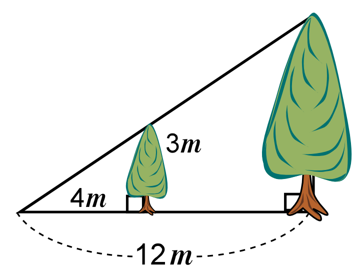
$$x = 16$$



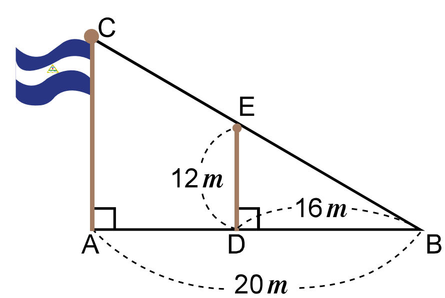
Por lo tanto, la altura de la pared es de **16 *m***.

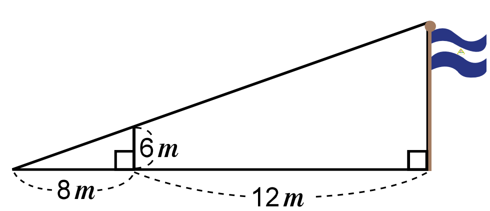
E

a) Calcule la altura de un árbol que proyecta una sombra de 12 metros en el momento en que otro árbol que está en línea recta con el anterior y mide 3 metros proyecta una sombra de 4 metros.



b) En la figura adjunta el mástil $\overline{AC}$ proyecta una sombra de 20 *m* de largo, cuando la sombra de un mástil similar sin bandera $\overline{DE}$ de 12 *m* de alto proyecta una sombra de 16 *m* de largo. Suponiendo que ambos mástiles son verticales y que están sobre el nivel del piso y además ΔABC~ΔDBE. Encuentre la altura del mástil con bandera.





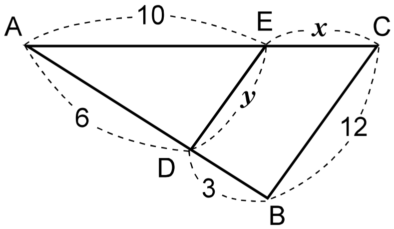
c) ¿Qué altura tiene el asta de la bandera de acuerdo con información dada en la figura?

Contenido 10: Comprobemos lo aprendido 2

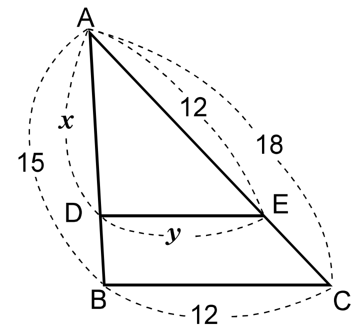
E

1. En el ΔABC, de cada inciso, $\overline{BC} \parallel \overline{DE}$, calcule el valor de x y y.

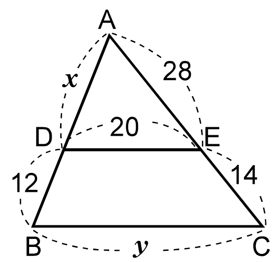
a)



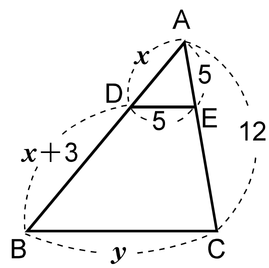
b)



c)

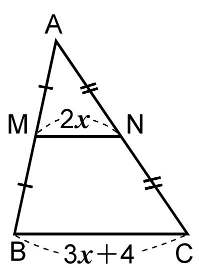


d)

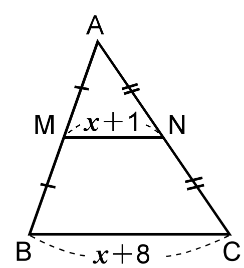


2. En el ΔABC de cada inciso, M y N son los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente. Calcule el valor de x.

a)



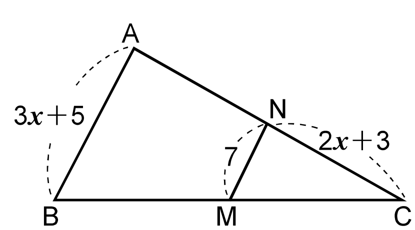
b)



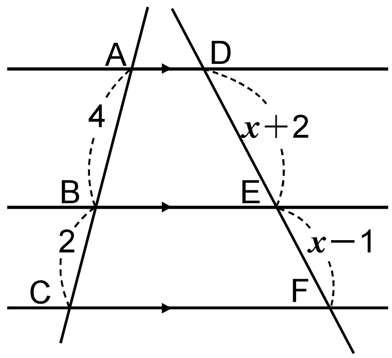
3. En el ΔABC, M es el punto medio de $\overline{BC}$ y $\overline{NM} \parallel \overline{AB}$.

   a) Encuentre la longitud de $\overline{AB}$.

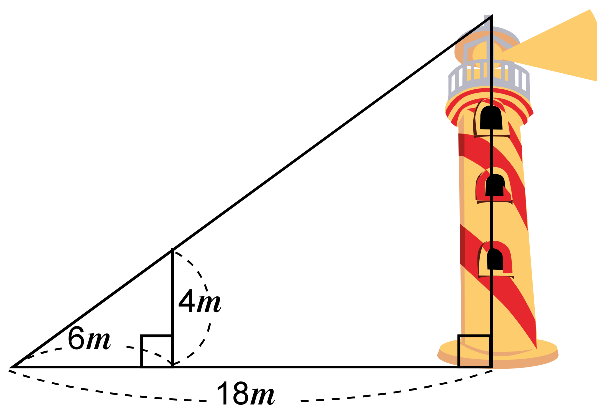
   b) Encuentre la longitud de $\overline{AC}$.



4. En las siguientes figuras $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BE} \parallel \overleftrightarrow{CF}$, calcule el valor de x.



5. De acuerdo con la información suministrada en el dibujo, ¿qué altura tiene el faro?



Unidad 6

Teorema de Pitágoras

Sección 1: Teorema de Pitágoras

Contenido 1: Cálculo de la hipotenusa de un triángulo rectángulo

P

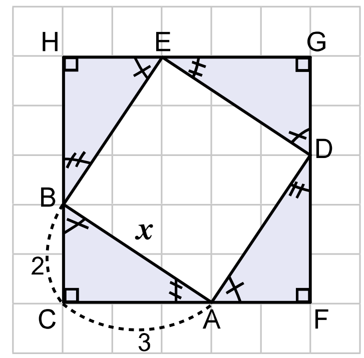
En la figura, el cuadrilátero CFGH es cuadrado y los triángulos ABC, DAF, EDG y BEH son triángulos rectángulos y congruentes.

a) Calcule el área del cuadrado CFGH.

b) Calcule el área del cuadrilátero ADEB.

c) Verifique que el cuadrilátero ADEB es un cuadrado constatando que sus ángulos internos son rectos.

d) Calcule la medida de $\overline{AB}$.



S

a) Como $CF = 2 + 3 = 5$, el área del cuadrado CFGH es $CF^2 = 5^2 = 25$.

b) El área del cuadrilátero ADEB

$= $ (área del cuadrado CFGH) $-$ (4 veces el área de ΔABC)

$$= 25 - (4)\left[\frac{(2)(3)}{2}\right]$$

$= 25 - 12$

$= 13.$

En la figura, los cuatro triángulos sombreados son congruentes, de modo que:

área de ΔACB

$=$ área de ΔAFD

$=$ área de ΔGED

$=$ área de ΔHEB

c) $\measuredangle BAD = 180° - (\measuredangle CAB + \measuredangle DAF)$

$= 180° - (\measuredangle CAB + \measuredangle ABC)$

$= 180° - 90° = 90°.$

De forma similar se obtiene que $\measuredangle ADE = \measuredangle DEB = \measuredangle EBA = 90°$. Por esto, y en vista de que los lados del cuadrilátero ADEB tienen igual medida $AD = DE = EB = BA$, este es un cuadrado.

d) Como el área del cuadrado es AB^2, por el inciso b) se tiene que

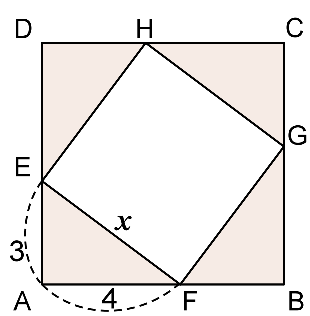
$$AB^2 = 13$$

y en consecuencia, $AB = \sqrt{13}$ por ser la longitud de segmentos un número positivo.

La diferencia entre las áreas de los cuadrados CFGH y ADEB es igual a cuatro veces el área del triángulo rectángulo ACB cuya hipotenusa es $\sqrt{13}$ y sus catetos 2 y 3, es decir $(\sqrt{13})^2 = 2^2 + 3^2$.

E

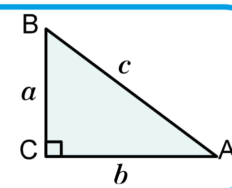
En la siguiente figura, calcule el valor de x:



Contenido 2: Teorema de Pitágoras

P

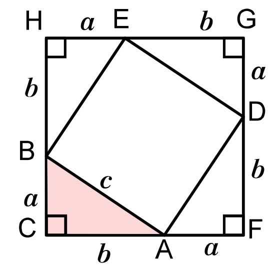
En la figura mostrada a la derecha, el ΔACB es triángulo rectángulo con $\measuredangle$BCA$=90°$, si BC$=a$, AC$=b$, AB$=c$. Demuestre que $a^2+b^2=c^2$.



S

Dado el triángulo rectángulo ACB se construye el cuadrado ADEB sobre la hipotenusa de este.

Se construyen los triángulos BHE, EGD y DFA, prolongando los catetos del ΔACB y trazando segmentos perpendiculares como aparece en la figura. Estos tres triángulos son congruentes con el ΔACB por AAA y además son rectángulos con la misma área igual a: $\frac{1}{2}ab$,



El cuadrado formado CFGH tiene lado $a+b$ y área $(a+b)^2$. Así mismo el cuadrado ADEB tiene lado c y área c^2. También,

Área del cuadrado ADEB $=$ (área del cuadrado CFGH) $-$ (4 veces el área del ΔACB),

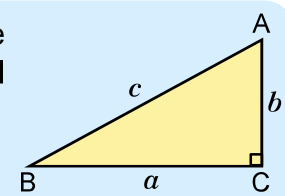
$$c^2=(a+b)^2-(4)\left(\frac{1}{2}ab\right)=(a^2+2ab+b^2)-2ab=a^2+b^2$$

Por tanto, $c^2=a^2+b^2$.

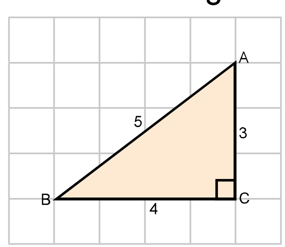
C

Teorema de Pitágoras: En todo triángulo rectángulo se cumple que la suma de los cuadrados de las longitudes de sus catetos es igual al cuadrado de la longitud de la hipotenusa.

$$a^2+b^2=c^2$$



Ejemplo Verifique que se cumple el Teorema de Pitágoras para el triángulo rectángulo de la figura.



En el caso del triángulo dado se tiene que $b=3$, $a=4$ y $c=5$, de modo que

$$c^2=5^2=25$$

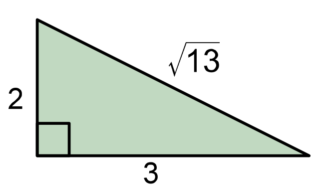
$$a^2+b^2=4^2+3^2=16+9=25$$

Por lo anterior vemos que $\qquad 4^2+3^2=5^2$

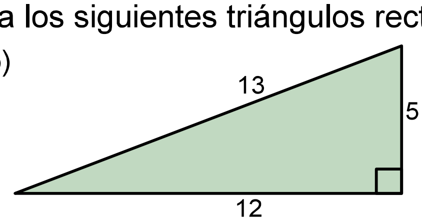
E

Verifique el Teorema de Pitágoras para los siguientes triángulos rectángulos:

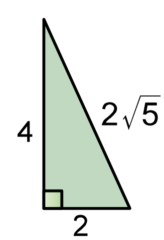
a)



b)

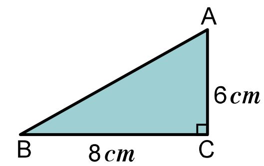


c)



Contenido 3: Cálculo de las longitudes de los catetos e hipotenusa de un triángulo rectángulo

Ejemplo 1 En la figura, $\angle ACB$ es un ángulo recto, calcule la medida de $\overline{AB}$.



Se aplica el Teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} AB^2 &= BC^2 + AC^2 \\ &= 8^2 + 6^2 \\ &= 64 + 36 \\ &= 100 \end{aligned}$$

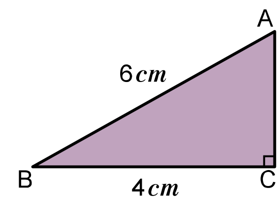
La longitud de un segmento es un número positivo.

Como $AB > 0$,

$$AB = \sqrt{100} = 10$$

Por lo tanto, la longitud de $\overline{AB}$ es **10 *cm***.

Ejemplo 2 En la figura, el $\angle ACB$ es un ángulo recto, calcule la longitud de $\overline{AC}$.



Para encontrar AC se sustituyen los valores en la fórmula del Teorema de Pitágoras, obteniéndose $AB = 6\,cm$, $BC = 4\,cm$.

$$\begin{aligned} AB^2 &= BC^2 + AC^2 \\ 6^2 &= 4^2 + AC^2 \\ 36 &= 16 + AC^2 \\ AC^2 &= 36 - 16 = 20 \end{aligned}$$

Como $AC > 0$,

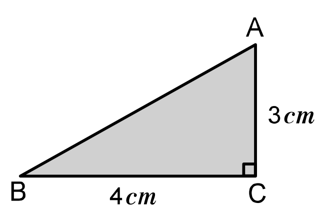
$$AC = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Por lo tanto, la longitud de $\overline{AC}$ es $\mathbf{2\sqrt{5}}$ ***cm***.

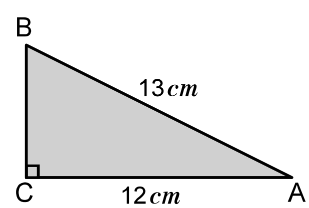
E

1. Calcule la longitud del tercer lado en cada uno de los siguientes triángulos rectángulos:

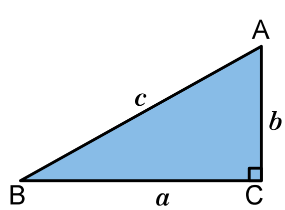
a)



b)



2. Complete la siguiente tabla sabiendo que a y b son las longitudes de los catetos, c la longitud de la hipotenusa de los triángulos rectángulos ①, ②, ③ y ④.

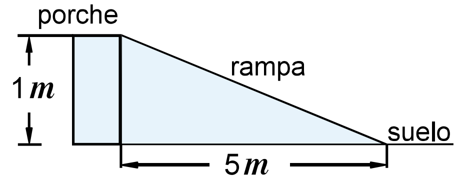


	①	②	③	④
a	6	4	$\sqrt{2}$	$3\sqrt{5}$
b		4		2
c	10		3	

Contenido 4: Aplicación del Teorema de Pitágoras

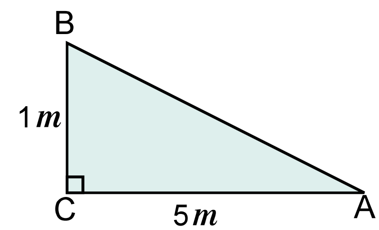
P

Roberto quiere construir una rampa que ascienda del suelo al porche de la entrada de su casa. El porche está a 1 metro sobre el suelo, y debido a regulaciones de construcción, la rampa debe empezar a 5 metros de distancia del porche. ¿Qué tan larga debe ser la rampa?



S

1. Se representa la situación planteada con el triángulo rectángulo de la derecha.



2. Se aplica el Teorema de Pitágoras, para calcular la medida del lado que no se conoce, que es la hipotenusa:

$$\begin{aligned} AB^2 &= BC^2 + AC^2 \\ &= 1^2 + 5^2 \\ &= 1 + 25 \\ &= 26 \end{aligned}$$

Como la distancia es positiva, entonces $AB > 0$,

$$AB = \sqrt{26}$$

Por lo tanto, la rampa tiene $\sqrt{\mathbf{26}}$ ***m*** de largo.

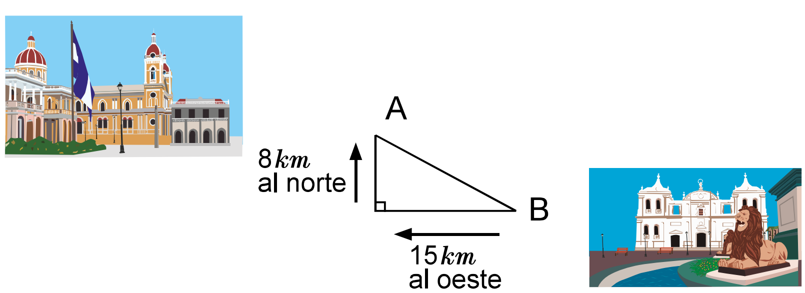
C

Para resolver problemas de situaciones del entorno con ayuda del Teorema de Pitágoras, se realizan los siguientes pasos:

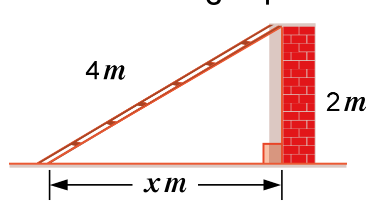
1. Se representa la situación planteada en el problema mediante un triángulo rectángulo.
2. Se aplica el Teorema de Pitágoras, sustituyendo en la fórmula los datos conocidos y resolviendo la ecuación de segundo grado resultante.

E

a) Un carro avanza 15 km al oeste de la ciudad B y luego 8 km al norte para llegar a la ciudad A. ¿Cuál es la distancia (lineal) AB entre las dos ciudades?



b) El extremo superior de una escalera de 4 metros de longitud se apoya sobre el borde superior de una pared cuya altura es de 2 metros. ¿A qué distancia está el pie de la escalera de la base de la pared?

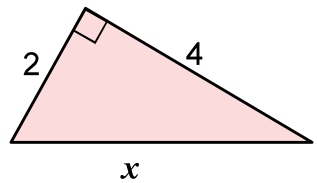


Contenido 5: Comprobemos lo aprendido 1

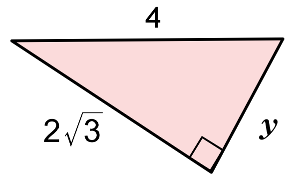
E

1. En los siguientes triángulos rectángulos, encuentre la longitud del tercer lado:

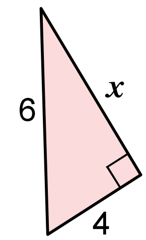
a)



b)



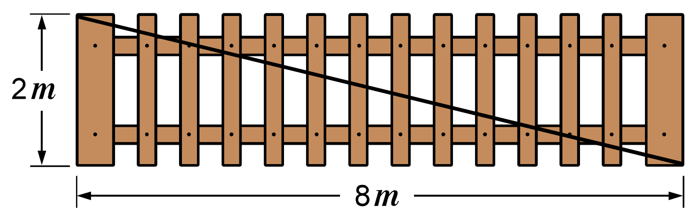
c)



2. Si c es la hipotenusa, a y b son los catetos de un triángulo rectángulo, calcule la longitud del tercer lado.

a) $a = 8cm$, $b = 4cm$ b) $b = 5cm$, $c = 10cm$ c) $a = 6cm$, $c = 8cm$

3. Héctor está construyendo una verja de madera de 2 metros de alto y quiere colocar un soporte diagonal entre los postes, que están a 8 metros de distancia entre sí como lo muestra la figura.



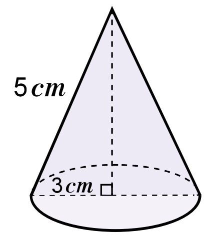
¿Cuánto mide el soporte diagonal?

Sección 2: Aplicaciones del Teorema de Pitágoras en geometría

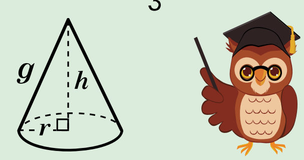
Contenido 1: Cálculo de la altura y volumen de un cono aplicando Teorema de Pitágoras

P

Calcule la altura y el volumen del cono mostrado en la figura, del cual se conoce que el radio de la base es $3\,cm$, y la longitud de su generatriz es $5\,cm$.



El volumen de un cono de radio r y altura h es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$



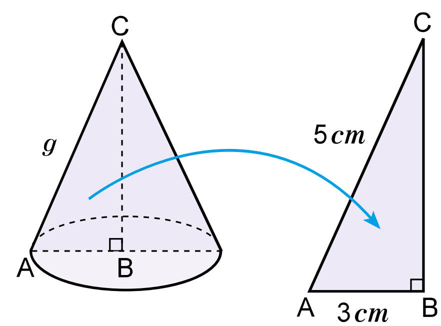
g : generatriz

S

1. Se traza la altura del cono para formar el triángulo rectángulo ABC que se muestra en la figura.
2. Para calcular BC se sustituyen en la fórmula $AC^2 = AB^2 + BC^2$ del Teorema de Pitágoras los datos conocidos:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$5^2 = 3^2 + BC^2$$
$$BC^2 = 25 - 9 = 16$$
$$BC = \sqrt{16} = 4$$

Siendo $BC = 4\,cm$ la altura del cono.



3. Se calcula el volumen del cono sabiendo que $r = AB = 3\,cm$ y $h = BC = 4\,cm$:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(3^2)(4) = 12\pi$$

Por lo tanto, el volumen del cono es $\mathbf{12\pi\,cm^3}$.

C

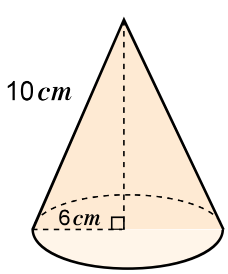
Para calcular la altura y el volumen de un cono, conocidos el radio y la generatriz de este:

1. Se traza la altura del cono para formar un triángulo rectángulo.
2. Se aplica el Teorema de Pitágoras para calcular la altura del cono.
3. Se calcula el volumen del cono a partir de la fórmula.

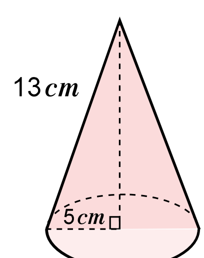
E

Calcule la altura y el volumen de los conos mostrados en las siguientes figuras:

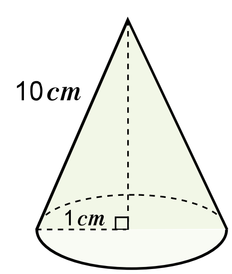
a)



b)



c)

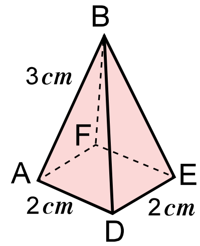


Contenido 2: Cálculo de la altura y volumen de una pirámide de base cuadrada aplicando Teorema de Pitágoras

P

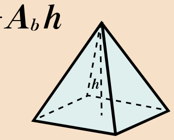
Para la pirámide de base cuadrada mostrada a la derecha, calcule:

a) La longitud de la diagonal del cuadrado que forma la base.
b) La longitud de la altura de la pirámide.
c) El volumen de la pirámide.



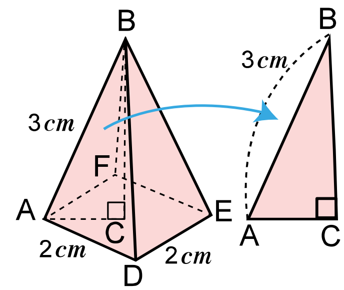
El volumen de una pirámide de base cuadrada cuya altura es h es

$$V = \frac{1}{3}A_b h$$

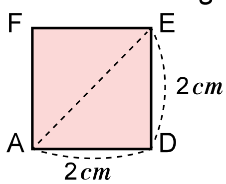


S

Se traza la altura de la pirámide para formar el triángulo rectángulo ABC, del cual solo se conoce la hipotenusa.



a) Se calcula la longitud de la diagonal de la base:



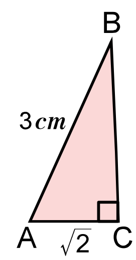
$$AE^2 = AD^2 + DE^2 = 2^2 + 2^2 = 4 + 4 = 8$$
$$AE = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

b) Como $\overline{AC}$ es la mitad de la diagonal $\overline{AE}$, y esta mide $2\sqrt{2}$ cm, entonces

$$AC = \frac{AE}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

Luego, $\overline{AC}$ mide $\sqrt{2}$ cm.

Ahora se calcula la longitud de la medida del $\overline{CB}$, cateto del triángulo rectángulo ABC y altura de la pirámide



$$AB^2 = AC^2 + CB^2$$
$$3^2 = (\sqrt{2})^2 + CB^2$$
$$CB^2 = 9 - 2 = 7$$

Como $CB > 0$,

$$CB = \sqrt{7}$$

Por lo tanto, la altura buscada es $\boldsymbol{\sqrt{7}}$ ***cm***.

c) Para calcular el volumen de la pirámide, se determina primero el área de la base de esta A_b

$$A_b = \text{área del cuadrilátero ADEF} = 2^2 = 4$$

de modo que: $$V = \frac{1}{3}A_b CB = \frac{1}{3}(4)(\sqrt{7}) = \frac{4\sqrt{7}}{3}$$

Por lo tanto, el volumen de la pirámide es $\boldsymbol{\frac{4\sqrt{7}}{3}}$ ***cm³***.

C

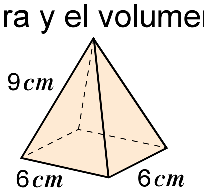
Para calcular la altura y el volumen de una pirámide de base cuadrada:

1. Se traza la altura de la pirámide para formar un triángulo rectángulo.
2. Se calcula la longitud de la diagonal de la base de la pirámide, utilizando el Teorema de Pitágoras, para luego calcular la longitud de uno de los catetos desconocidos en el triángulo rectángulo del paso anterior.
3. Se calcula la altura de la pirámide utilizando el Teorema de Pitágoras.
4. Se calcula el área de la base de la pirámide y posteriormente el volumen de este sólido.

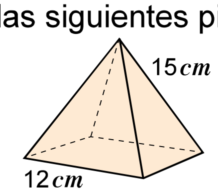
E

Calcule la altura y el volumen de cada una de las siguientes pirámides cuadradas:

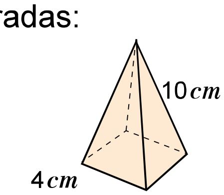
a)



b)



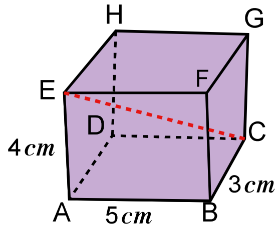
c)



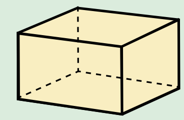
Contenido 3: Cálculo de la longitud de la diagonal de un prisma rectangular aplicando Teorema de Pitágoras

P

Calcule la longitud de la diagonal $\overline{EC}$ del prisma rectangular siguiente:

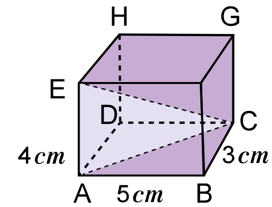


Un ortoedro es un prisma recto cuyas caras forman entre sí ángulos rectos y tiene la característica de que las caras opuestas son iguales entre sí.



S

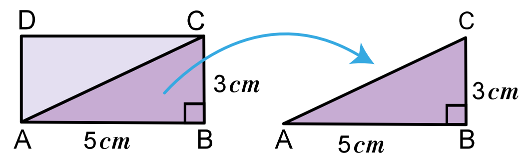
1. Se forma el triángulo rectángulo EAC con la diagonal $\overline{EC}$, la arista $\overline{EA}$ y la diagonal $\overline{AC}$ del rectángulo ABCD, el cual es la base del prisma rectangular.



2. Se calcula la longitud de la diagonal $\overline{AC}$ del rectángulo ABCD, utilizando el Teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo ABC.

   $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 5^2 + 3^2 = 25 + 9 = 34$

   Por lo tanto, $AC = \sqrt{34}$

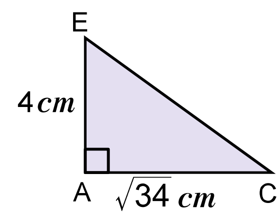


3. Como se conocen las medidas de $\overline{AC}$ y $\overline{AE}$, al utilizar nuevamente el Teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo EAC, se puede calcular la longitud de $\overline{EC}$:

   $$EC^2 = AC^2 + AE^2 = (\sqrt{34})^2 + 4^2 = 34 + 16 = 50$$

   Como $EC > 0$,

   $$EC = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

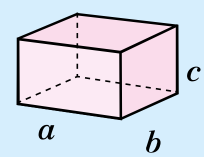


Por lo tanto, la longitud de la diagonal $\overline{EC}$ del prisma rectangular es $\mathbf{5\sqrt{2}}$ ***cm***.

C

Para encontrar la longitud de una diagonal de un prisma rectangular:

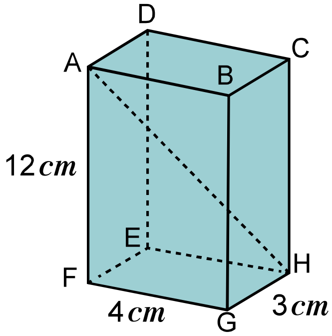
1. Se forma un triángulo rectángulo con la diagonal cuya longitud se quiere determinar, la diagonal del rectángulo que es la base del prisma rectangular y una arista de este sólido.
2. Se calcula la longitud de la diagonal de la base del prisma rectangular utilizando el Teorema de Pitágoras.
3. Se calcula la diagonal del prisma rectangular a partir de la información obtenida en el paso anterior, y utilizando de nuevo el Teorema de Pitágoras.



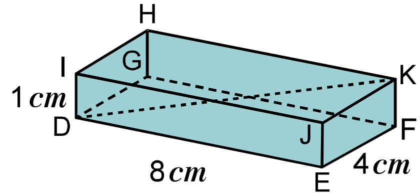
E

Calcule la longitud de la diagonal de cada uno de los siguientes prismas rectangulares:

a)



b)



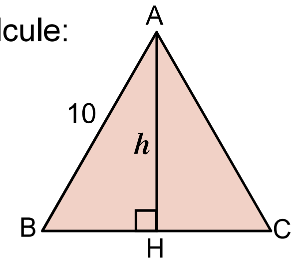
Contenido 4: Cálculo del área de un triángulo equilátero aplicando Teorema de Pitágoras

P

Dado el triángulo equilátero ABC, calcule:

a) La altura $\overline{AH}$

b) El área A del ΔABC.



En todo triángulo equilátero ABC con altura $\overline{AH}$ se cumple:

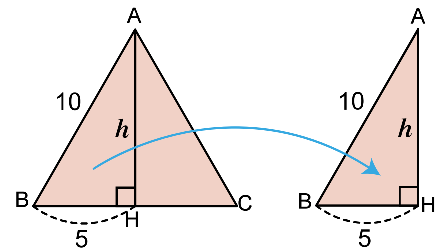
$$AB = AC = BC$$
$$\overline{AH} \perp \overline{BC},\ BH = HC$$

S

a) La altura h forma en el triángulos equilátero ABC dos triángulos rectángulos : BHA y CHA. En el ΔBHA, $\overline{AH}$ es un cateto, y se tiene que $AB = 10$, $BH = 5$, de modo que sustituyendo los datos en $AB^2 = BH^2 + AH^2$

y con $AH = h$, resulta

$$10^2 = 5^2 + h^2$$
$$h^2 = 100 - 25 = 75$$
$$h = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$$



b) El área del ΔABC es

$$A = \frac{bh}{2} = \frac{(BC)(AH)}{2} = \frac{(10)(5\sqrt{3})}{2} = 25\sqrt{3}$$

Área del triángulo ABC

$$A = \frac{(base)(altura)}{2}$$

El área del ΔABC es por tanto $\mathbf{25\sqrt{3}}\ cm^2$.

C

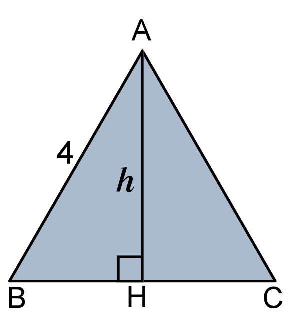
Para encontrar el área de un triángulo equilátero:

1. Se traza la altura del triángulo equilátero, formando dos triángulos rectángulos.
2. En los triángulos rectángulos del paso anterior, la altura del triángulo equilátero es un cateto de estos, y la longitud de este se calcula aplicando el Teorema de Pitágoras.
3. Se determina el área del triángulo equilátero utilizando la altura encontrada en el paso anterior y la base correspondiente.

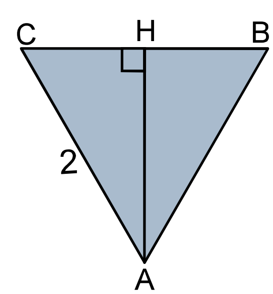
E

Calcule el área de cada triángulo equilátero:

a)



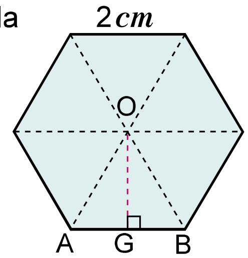
b)



Contenido 5: Cálculo del área de un hexágono regular aplicando Teorema de Pitágoras

P

Calcule el área del hexágono regular de la derecha.



En un polígono regular se cumple que todos sus lados tienen igual longitud, y todos los ángulos interiores tienen igual medida.

S

1. Se calcula la altura de uno de los triángulos que forman el hexágono, la cual es la apotema del polígono, sustituyendo los datos proporcionados en la fórmula del Teorema de Pitágoras.

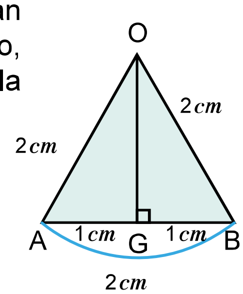
$$OB^2 = OG^2 + GB^2$$

de donde resulta

$$2^2 = OG^2 + 1^2$$
$$OG^2 = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3$$

Como $OG > 0$,

$$OG = \sqrt{3}$$
$$OG \text{ es } \sqrt{3}\ cm$$



2. Se calcula el área del triángulo equilátero ABO:

$$A = \frac{(AB)(OG)}{2} = \frac{(2)(\sqrt{3})}{2} = \sqrt{3}$$

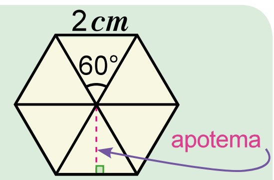
Luego, $A = \sqrt{3}$.

$$A \text{ es } \sqrt{3}\ cm^2.$$

3. El área del hexágono regular es 6 veces el área del ΔABO.

Área del Hexágono $= (6)(\sqrt{3}) = 6\sqrt{3}$

Por lo tanto, el área del hexágono regular es $\mathbf{6\sqrt{3}\ cm^2}$.



Un hexágono regular está formado por 6 triángulos equiláteros congruentes.

La perpendicular trazada desde el centro de un polígono regular a cualquiera de sus lados, recibe el nombre de **apotema**.

En el problema dado la altura $\overline{OG}$ coincide con la apotema del hexágono regular.

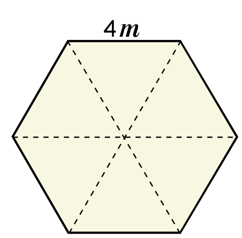
C

Para calcular el área de un hexágono regular:

1. Se descompone el hexágono en 6 triángulos equiláteros congruentes.
2. Se encuentra la altura de uno de los triángulos equiláteros del paso 1(que es la apotema del polígono) utilizando el Teorema de Pitágoras.
3. Se calcula el área del triángulo del paso anterior.
4. El área del hexágono regular es 6 veces el área del triángulo del paso 3.

E

Encuentre el área del hexágono de la figura:

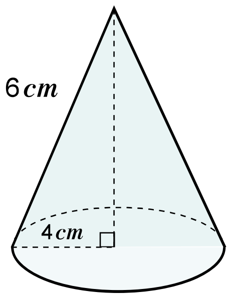


Contenido 6: Comprobemos lo aprendido 2

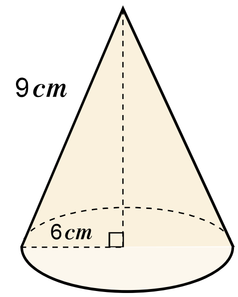
E

1. Encuentre la longitud de la altura y el volumen del cono mostrado en cada figura.

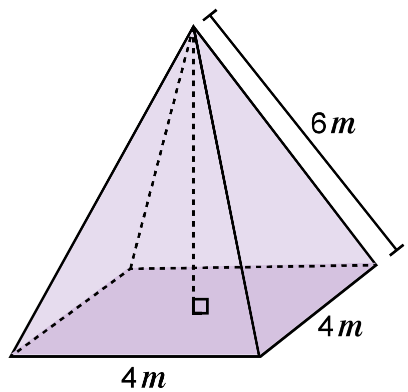
a)



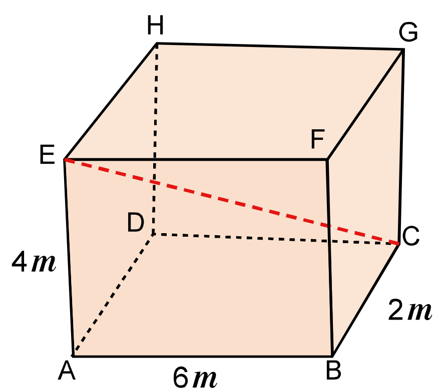
b)



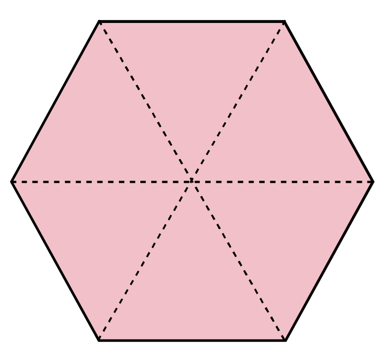
2. Encuentre la altura y el volumen de la pirámide de base cuadrada mostrada en la figura.



3. Calcule la diagonal del ortoedro de la figura.



4. Calcule el área del hexágono regular de la figura:



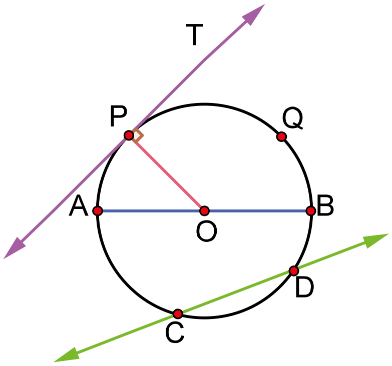
Unidad 7

Circunferencia

Sección 1: Ángulos inscritos

Contenido 1: Elementos y rectas notables de una circunferencia

Ejemplo Identifique los elementos y rectas notables de la siguiente circunferencia.



La circunferencia es una línea curva cerrada formada por todos los puntos del plano que están a una misma distancia de un punto fijo llamado centro

De acuerdo con la figura, los elementos y rectas que se pueden identificar en la circunferencia son:

- ✓ Centro O: Punto equidistante de todos los puntos de la circunferencia.
- ✓ Radio $\overline{OP}$: Segmento que une el centro con un punto de la circunferencia.
- ✓ Cuerda $\overline{CD}$: Segmento que une dos puntos cualesquiera de la circunferencia.
- ✓ Diámetro $\overline{AB}$: Cuerda que pasa por el centro de la circunferencia y su medida es el doble de la longitud del radio.
- ✓ Arco $\overset{\frown}{PQ}$: Porción de la circunferencia comprendida entre dos puntos.
- ✓ Recta tangente $\overleftrightarrow{PT}$: Recta que corta a la circunferencia en un único punto, llamado punto de tangencia. La recta y el radio trazado al punto de tangencia son perpendiculares entre sí.
- ✓ Recta Secante $\overleftrightarrow{CD}$: Recta que corta a la circunferencia en dos puntos distintos.

E

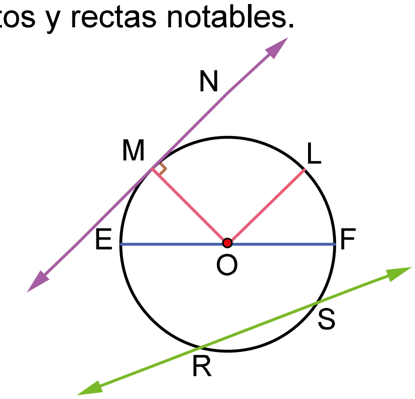
Dada la siguiente circunferencia, nombre cada uno de sus elementos y rectas notables.

O ________________ $\overset{\frown}{ML}$ ________________

$\overline{OM}$ ________________ $\overleftrightarrow{MN}$ ________________

$\overline{RS}$ ________________ $\overleftrightarrow{RS}$ ________________

$\overline{EF}$ ________________



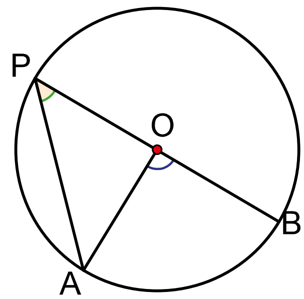
Contenido 2: Medida de un ángulo inscrito con uno de sus lados como diámetro

P

Complete la siguiente demostración para asegurar que en una circunferencia cualquiera se cumple que

$\measuredangle APB = \frac{1}{2} \measuredangle AOB$

donde el $\angle APB$ tiene el vértice P en la circunferencia, $\angle AOB$ es ángulo central y ambos ángulos subtienden el mismo $\overset{\frown}{AB}$.



Ángulo Central: ángulo que tiene su vértice en el centro de la circunferencia. En la figura $\angle AOB$ es un ángulo central correspondiente al $\overset{\frown}{AB}$.

Demostración

De inicio $AO = OP$, por ser radios de la circunferencia, entonces ΔOAP es triángulo isósceles. Luego, por el teorema del triángulo isósceles

$\measuredangle OAP =$ ________ ①

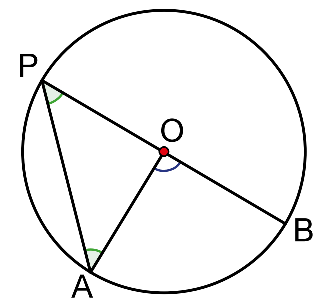
Además, por el teorema del ángulo externo en el mismo ΔOAP,

$\measuredangle AOB = \measuredangle OAP +$ ________ ②

Así que, $\measuredangle AOB = 2$ ________ ③

Pero, $\measuredangle OPA = \measuredangle APB$

Por lo tanto, $\measuredangle APB = \frac{1}{2}$ ________ ④



S

① $\measuredangle OAP = \boldsymbol{\measuredangle OPA}$

② $\measuredangle AOB = \measuredangle OAP + \underline{\boldsymbol{\measuredangle OPA}}$

③ $\measuredangle AOB = 2\ \underline{\boldsymbol{\measuredangle OPA}}$

④ $\measuredangle APB = \frac{1}{2}\ \underline{\boldsymbol{\measuredangle AOB}}$

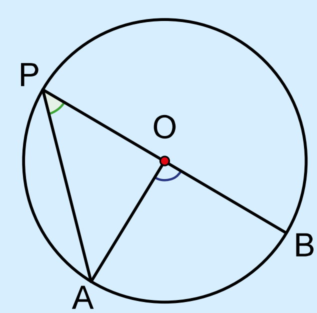
Se consideran los ángulos asociados a una circunferencia: centrales, inscritos y semiinscritos, como la unión de segmentos con un origen común.

C

Sea el $\angle APB$ correspondiente al $\overset{\frown}{AB}$, formado por un diámetro $\overline{PB}$ de la circunferencia y una cuerda $\overline{PA}$ cualquiera, y con vértice P en la circunferencia. Sea además el ángulo central $\angle AOB$ correspondiente al $\overset{\frown}{AB}$. Entonces se cumple la igualdad.

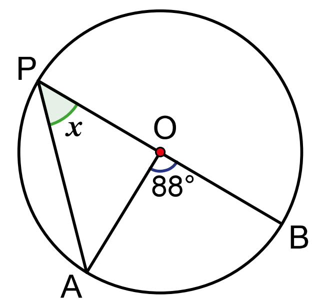
$$\measuredangle APB = \frac{1}{2} \measuredangle AOB$$

Donde el $\angle AOB$ es ángulo central y ambos ángulos comparten el mismo $\overset{\frown}{AB}$.



Es decir, la medida de un ángulo que tiene un diámetro de la circunferencia como uno de sus lados y el otro es una cuerda, y cuyo vértice está en la circunferencia, es la mitad de la medida del ángulo central correspondiente.

Ejemplo A partir de la figura de la derecha, determine el valor de x aplicando la conclusión anterior.



El $\angle$AOB es ángulo central y el $\angle$APB cumple las condiciones de la conclusión anterior y son correspondientes al $\overset{\frown}{AB}$. Así que, $\measuredangle APB = \frac{1}{2}\measuredangle AOB$, es decir,

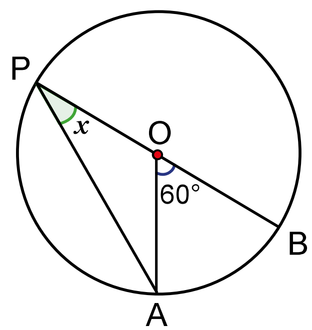
$$x = \measuredangle APB = \left(\frac{1}{2}\right)(88°) = 44°,$$

de donde $\boldsymbol{x = 44°}$.

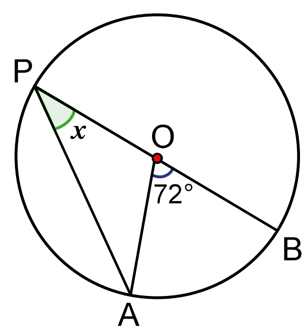
E

Calcule el valor de x de acuerdo a cada figura.

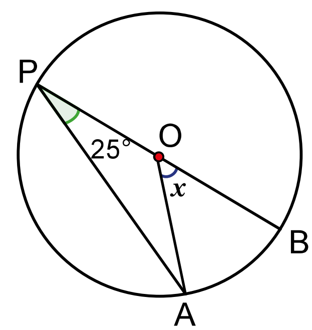
a)



b)



c)

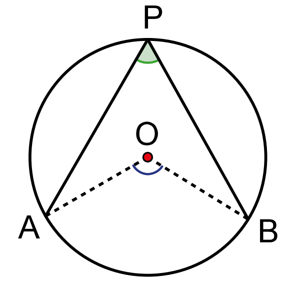


Contenido 3: Medida de un ángulo inscrito

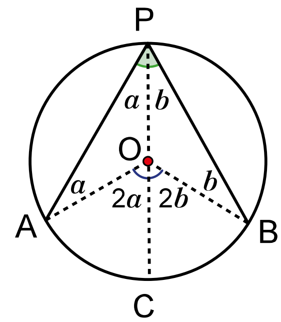
P

Complete la siguiente demostración para asegurar que en una circunferencia cualquiera si $\angle APB$ es un ángulo inscrito, $\angle AOB$ es el ángulo central y subtienden el $\overset{\frown}{AB}$, entonces

$$\measuredangle APB = \frac{1}{2}\measuredangle AOB$$



Demostración



Se traza el diámetro $\overline{PC}$ como se muestra en la figura de la derecha.

Sea $\measuredangle APC = a$, $\measuredangle BPC = b$. Como AO = OP = OB, por ser radios de la circunferencia, entonces ΔOAP *y* ΔOBP son isósceles. Así que, por el teorema del triángulo isósceles.

$\measuredangle OAP =$ ________ $= a$ ①

$\measuredangle OBP =$ ________ $= b$ ②

Además, por el teorema del ángulo externo al ΔOAP,

$\measuredangle AOC = \measuredangle OAP +$ ________ $= 2a$ ③

$\measuredangle BOC = \measuredangle BPO +$ ________ $= 2b$ ④

Por otra parte, $\measuredangle APB =$ ________ $+$ ________ $= a + b$ ⑤

$$\measuredangle AOB = \measuredangle AOC + \measuredangle BOC = 2a + 2b = 2(a+b),$$

de donde, $\measuredangle AOB = 2$ ________. ⑥

Por lo tanto, $\measuredangle APB =$ ________ . ⑦

S

① $\measuredangle OAP = \underline{\measuredangle OPA} = a$

② $\measuredangle OBP = \underline{\measuredangle OPB} = b$

③ $\measuredangle AOC = \measuredangle OAP + \underline{\measuredangle OPA} = 2a$

④ $\measuredangle BOC = \measuredangle BPO + \underline{\measuredangle OPB} = 2b$

⑤ $\measuredangle APB = \underline{\measuredangle OPA} + \underline{\measuredangle OPB} = a + b$

⑥ $\measuredangle AOB = 2\underline{\measuredangle APB}$

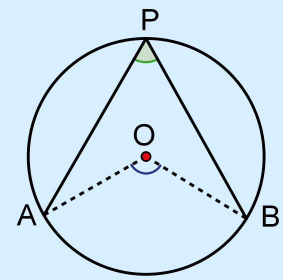
⑦ $\measuredangle APB = \frac{1}{2}\underline{\measuredangle AOB}$.

C

Al $\angle$APB se le llama **ángulo inscrito** correspondiente al $\overset{\frown}{AB}$, pues su vértice es un punto sobre la circunferencia y sus lados son cuerdas de la misma. Su medida está dada por

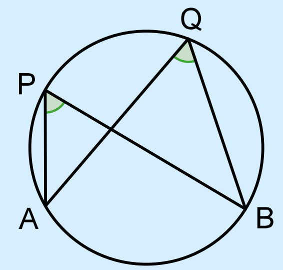
$$\measuredangle APB = \frac{1}{2}\,\measuredangle AOB$$

Es decir, la medida de un ángulo inscrito es la mitad de la medida del ángulo central correspondiente.

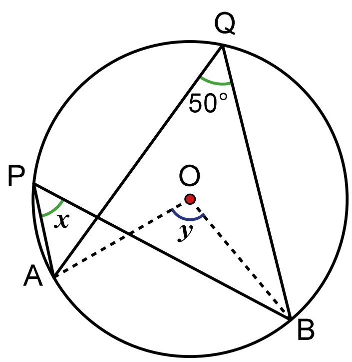


Además, todos los ángulos inscritos correspondientes a un mismo arco tienen la misma medida, es decir,

$$\measuredangle APB = \measuredangle AQB$$



Ejemplo Calcule haciendo uso de la figura los valores de x y y.



$\angle$AQB *y* $\angle$APB son ángulos inscritos correspondientes al $\overset{\frown}{AB}$. En consecuencia,

$$\measuredangle AQB = \measuredangle APB, \text{ de donde } x = \mathbf{50°}.$$

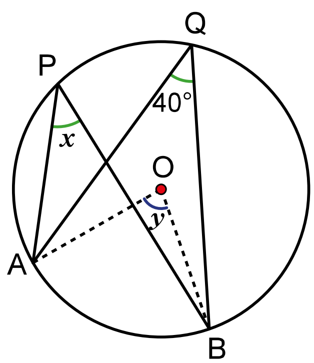
Además, el $\angle$AOB es central y el $\angle$AQB es inscrito, ambos correspondientes al $\overset{\frown}{AB}$.

Así que, $\measuredangle AOB = 2\measuredangle AQB$, es decir, $y = 2(50°) = \mathbf{100°}$.

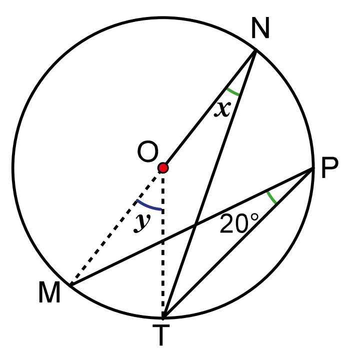
E

Calcule los valores de x y y de acuerdo a la figura dada en cada inciso.

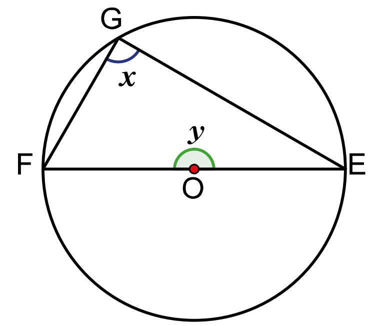
a)



b)



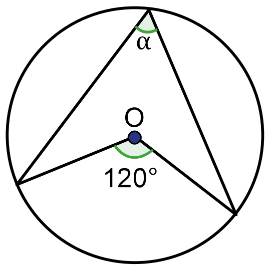
c)

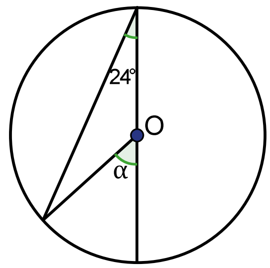


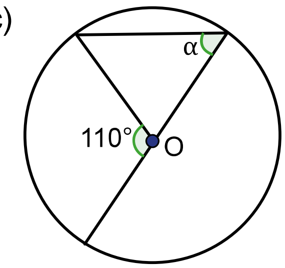
Contenido 4: Comprobemos lo aprendido 1

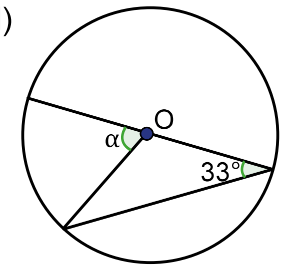
E

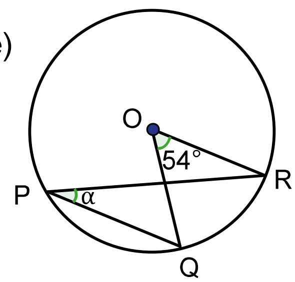
1. Calcule el valor de α para cada figura.

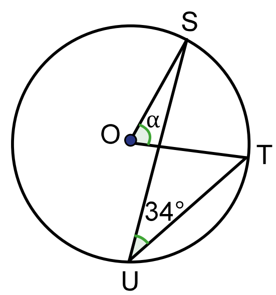
a)


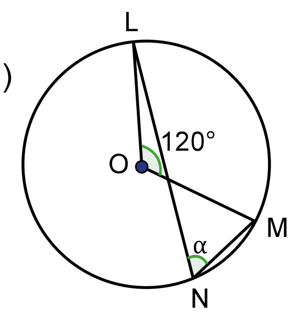
b)


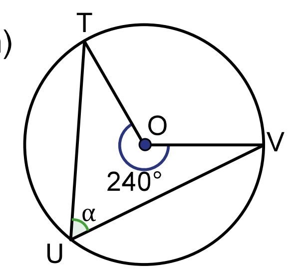
c)


d)


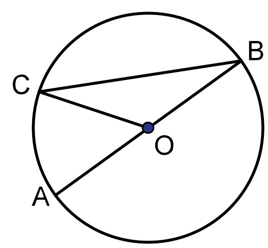
e)


f)


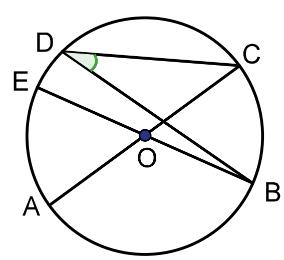
g)


h)


2. En la circunferencia de centro O y diámetro $\overline{AB}$, el ∠AOC mide 54°. ¿Cuál es la medida del ∠BCO?



3. $\overline{AC}$ y $\overline{BE}$ son diámetros de la circunferencia de centro O. Si ∡BOA = 2∡COB, ¿cuánto mide el ∠CDB?



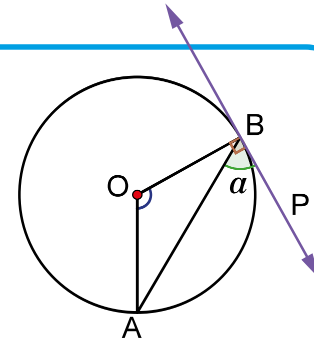
Sección 2: Aplicaciones de ángulos inscritos

Contenido 1: Ángulo semiinscrito

P

Complete la siguiente demostración para justificar que en una circunferencia cualquiera se cumple que la medida de un ángulo con vértice en B, formado por una recta tangente $\overleftrightarrow{BP}$ a la circunferencia en el punto B y una cuerda de la misma, es igual a mitad de la medida del ángulo central ∡AOB. En símbolos

$$∡APB = \frac{1}{2}∡AOB$$



Demostración

Sea $∡ABP = a$ y $\overleftrightarrow{BP}$ una recta tangente a la circunferencia en el punto B. Así que, $\overline{OB}$ y $\overline{BP}$ son perpendiculares, lo cual significa que

$$∡OBP = \underline{\qquad\qquad} \quad ①$$

$$∡ABO = 90° - a$$

Como AO = OB, por ser radios de la circunferencia, entonces el ΔOAB es isósceles. En consecuencia

$$∡ABO = \underline{\qquad\qquad} = 90° - a \quad ②$$

Además, en el ΔAOB se cumple que

$$∡AOB + ∡ABO + ∡BAO = \underline{\qquad\qquad} \quad ③$$

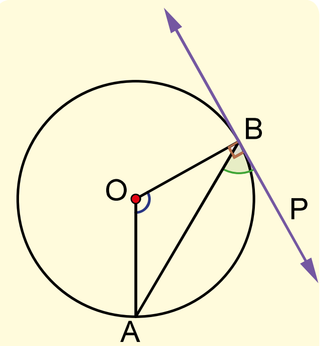
$$∡AOB + (90° - a) + \underline{\qquad\qquad} = 180° \quad ④$$

$$∡AOB + 180° - \underline{\qquad\qquad} = 180° \quad ⑤$$

$$∡AOB = 2a$$

$$∡AOB = 2\underline{\qquad\qquad} \quad ⑥$$

Por lo tanto, $\mathbf{∡ABP = \frac{1}{2}∡AOB}$



S

① $∡OBP = \underline{\mathbf{90°}}$

② $∡ABO = \underline{\mathbf{∡BAO}} = 90° - a$

③ $∡AOB + ∡ABO + ∡BAO = \underline{\mathbf{180°}}$

④ $∡AOB + (90° - a) + \underline{\mathbf{(90° - a)}} = 180°$

⑤ $∡AOB + 180° - \underline{\mathbf{2a}} = 180°$

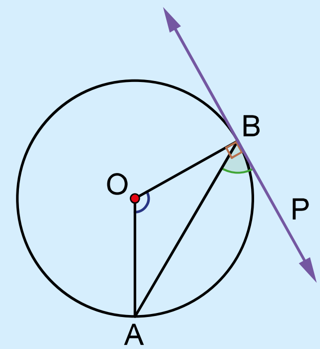
⑥ $∡AOB = 2\underline{\mathbf{∡ABP}}$

C

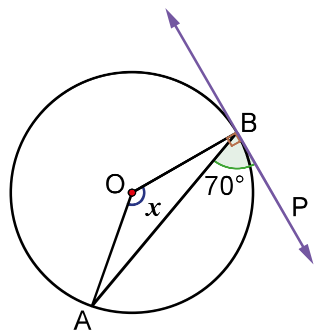
El $\angle$APB es **semiinscrito** correspondiente al $\overset{\frown}{AB}$, si su vértice B es un punto sobre la circunferencia y está formado por una recta tangente $\overleftrightarrow{BP}$ a esta y una cuerda $\overline{AB}$.
Se cumple que

$$\measuredangle ABP = \frac{1}{2}\measuredangle AOB$$

Es decir, la medida de un ángulo semiinscrito es la mitad de la medida del ángulo central correspondiente.



Ejemplo A partir de la figura, calcule el valor de x.



Como el $\angle$ABP es un ángulo semiinscrito a la circunferencia, entonces

$$\measuredangle ABP = \frac{1}{2}\measuredangle AOB$$

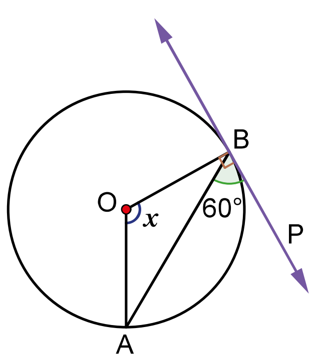
$$70° = \frac{1}{2}x$$

$$\boldsymbol{x = 140°}$$

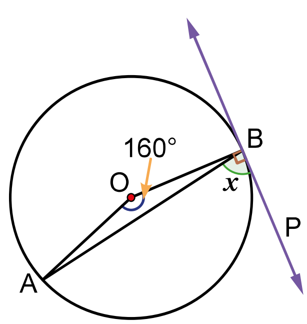
E

Calcule el valor de x para cada figura.

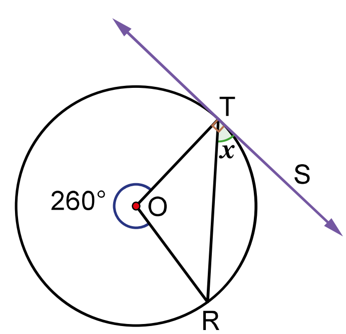
a)



b)



c)

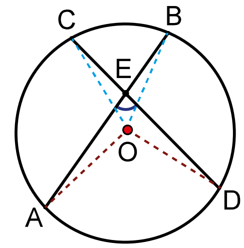


Contenido 2: Ángulo interior

P

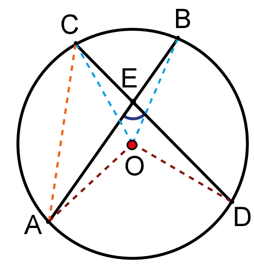
Complete la siguiente demostración para justificar que en cualquier circunferencia se cumple que

$$\measuredangle AED = \frac{1}{2}(\measuredangle AOD + \measuredangle BOC)$$



Demostración

Se traza el segmento $\overline{AC}$ para formar el ΔAEC y los radios de la circunferencia con respecto a los puntos A, B, C y D como se muestra en la figura de la derecha.



Por ser el AED un ángulo exterior al ΔAEC, se tiene que

$$\measuredangle AED = \measuredangle ACE + \underline{\qquad\qquad} \quad (1)$$

Por otra parte los $\angle EAC$ y $\angle ACE$ son inscritos, así que

$$\measuredangle EAC = \frac{1}{2}\ \underline{\qquad\qquad} \quad (2)$$

$$\measuredangle ACE = \frac{1}{2}\ \underline{\qquad\qquad} \quad (3)$$

Si se sustituye (2) y (3) en (1), tenemos que:

$$\measuredangle AED = \frac{1}{2}\measuredangle AOD + \frac{1}{2}\measuredangle BOC$$

Por lo tanto $\measuredangle AED = \frac{1}{2}(\underline{\qquad\qquad} + \underline{\qquad\qquad})$ (4)

S

(1) $\measuredangle AED = \measuredangle ACE + \underline{\measuredangle \mathbf{EAC}}$

(2) $\measuredangle EAC = \frac{1}{2}\ \underline{\measuredangle \mathbf{BOC}}$

(3) $\measuredangle ACE = \frac{1}{2}\ \underline{\measuredangle \mathbf{AOD}}$

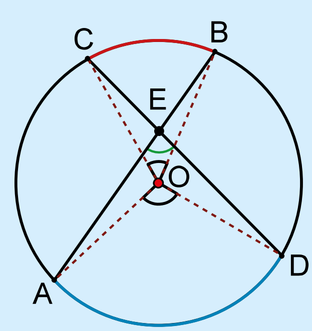
(4) $\measuredangle AED = \frac{1}{2}(\underline{\measuredangle \mathbf{AOD}} + \underline{\measuredangle \mathbf{BOC}})$

C

Al ángulo AED se le llama **ángulo interior**, pues su vértice es un punto interior de la circunferencia y sus lados son partes de dos cuerdas. Su medida está dada por

$$\measuredangle AED = \frac{1}{2}(\measuredangle AOD + \measuredangle BOC)$$

Es decir, la medida de un ángulo interior es la semisuma de las medidas de los ángulos centrales correspondientes.



Ejemplo A partir de la figura calcule el valor de x.

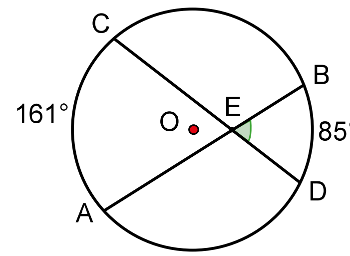
Se sustituye $\measuredangle DEB = x$, $\measuredangle AOC = 161°$ y $\measuredangle BOD = 85°$ en

$$\measuredangle DEB = \frac{1}{2}(\measuredangle AOC + \measuredangle BOD)$$

Se tiene que

$$x = \frac{1}{2}(161° + 85°) = 123°$$

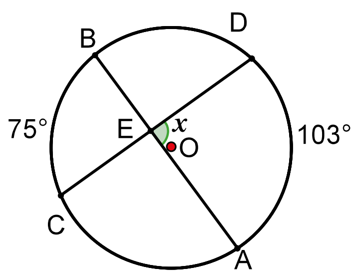
Por lo tanto, **$x = 123°$**



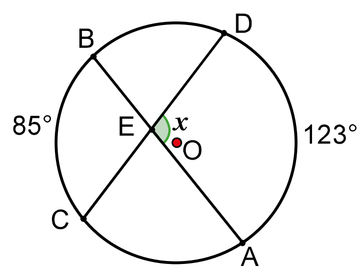
E

Calcule el valor de x en cada una de las siguientes figuras:

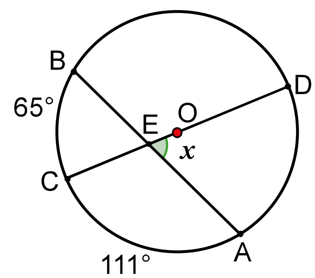
a) $\measuredangle BOC = 75°, \measuredangle AOD = 103°$



b) $\measuredangle BOC = 85°$, $\measuredangle AOD = 123°$



c) $\measuredangle BOC = 65°$, $\measuredangle AOC = 111°$



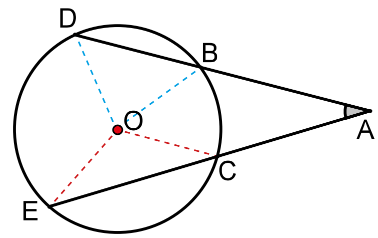
Contenido 3: Ángulo exterior

P

Complete la siguiente demostración para asegurar que en cualquier circunferencia se cumple que

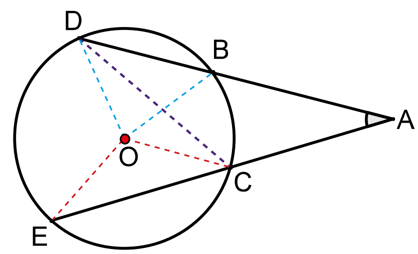
$$\measuredangle DAE = \frac{1}{2}(\measuredangle DOE - \measuredangle BOC)$$

donde $\angle DOE$ y $\angle BOC$ son los ángulos centrales.



Demostración

Se trazan los radios de la circunferencia con respecto a los puntos B, C, D y E y el $\overline{DC}$ para formar el ΔACD como se muestra en la figura.



Como $\angle DCE$ es un ángulo exterior al ΔACD se sigue que:

$$\measuredangle DCE = \underline{\hspace{2cm}} + \measuredangle DAC \qquad (1)$$

de donde $\measuredangle DAC = \underline{\hspace{2cm}} - \measuredangle CDA \qquad (2)$

Por otro lado, $\angle DCE$ y $\angle CDA$ son ángulos inscritos, así que

$$\measuredangle DCE = \frac{1}{2}\,\underline{\hspace{2cm}} \qquad (3)$$

$$\measuredangle CDA = \frac{1}{2}\,\underline{\hspace{2cm}} \qquad (4)$$

Si se sustituye (3) y (4) en (2), resulta:

$$\measuredangle DAC = \frac{1}{2}\measuredangle DOE - \frac{1}{2}\measuredangle BOC)$$

$$\measuredangle DAC = \frac{1}{2}(\underline{\hspace{2cm}} - \underline{\hspace{2cm}}) \qquad (5)$$

$$\underline{\hspace{2cm}} = \frac{1}{2}(\measuredangle DOE - \measuredangle BOC) \qquad (6)$$

Por lo tanto, $\boldsymbol{\measuredangle DAE = \frac{1}{2}(\measuredangle DOE - \measuredangle BOC)}$.

S

(1) $\measuredangle DCE = \boldsymbol{\measuredangle CDA} + \measuredangle DAC$

(2) $\measuredangle DAC = \boldsymbol{\measuredangle DCE} - \measuredangle CDA$

(3) $\measuredangle DCE = \frac{1}{2}\boldsymbol{\measuredangle DOE}$

(4) $\measuredangle CDA = \frac{1}{2}\boldsymbol{\measuredangle BOC}$

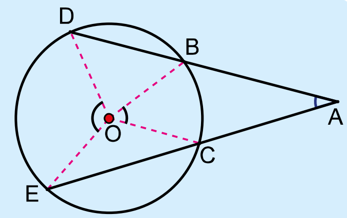
(5) $\measuredangle DAC = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\measuredangle DOE - \measuredangle BOC})$

(6) $\boldsymbol{\measuredangle DAE} = \frac{1}{2}(\measuredangle DOE - \measuredangle BOC)$

C

Al $\angle$DAE se le llama **ángulo exterior** ya que su vértice es un punto exterior a la circunferencia y sus lados son dos secantes. Su medida está dada por

$$\measuredangle \text{DAE} = \frac{1}{2}(\measuredangle \text{DOE} - \measuredangle \text{BOC})$$

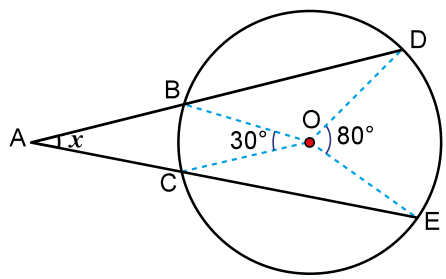


Es decir, la medida de un ángulo exterior a una circunferencia es la semidiferencia de las medidas de los ángulos centrales correspondientes.

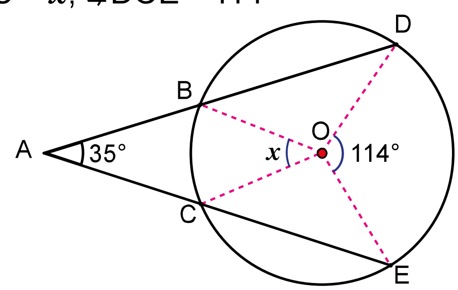
Ejemplo

Calcule el valor de x a partir de cada figura.
En ambos casos se completan las figuras con los radios requeridos y se aplica la fórmula de la conclusión.

a) $\measuredangle \text{BOC} = 30°$, $\measuredangle \text{DOE} = 80°$



b) $\measuredangle \text{BOC} = x$, $\measuredangle \text{DOE} = 114°$



a) Si se sustituye $\measuredangle$DAE por x, $\measuredangle$DOE por 80° y $\measuredangle$BOC por 30º en la igualdad

$$\measuredangle \text{DAE} = \frac{1}{2}(\measuredangle \text{DOE} - \measuredangle \text{BOC})$$

se sigue que

$$x = \frac{1}{2}(80° - 30°) = 25°$$

Por lo tanto, $\boldsymbol{x = 25°}$.

b) Si se sustituye $\measuredangle$BOC por x, $\measuredangle$DAE por 35° y $\measuredangle$DOE por 114° en la igualdad

$$\measuredangle \text{DAE} = \frac{1}{2}(\measuredangle \text{DOE} - \measuredangle \text{BOC})$$

se sigue que

$$35° = \frac{1}{2}(114° - x)$$

de donde

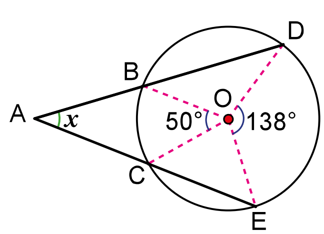
$$x = 114° - 2(35°) = 44°$$

Por lo tanto, $\boldsymbol{x = 44°}$.

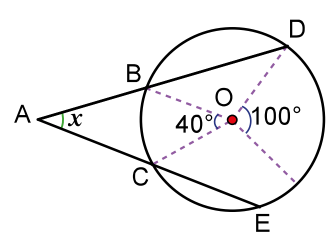
E

Calcule el valor de x en cada inciso.

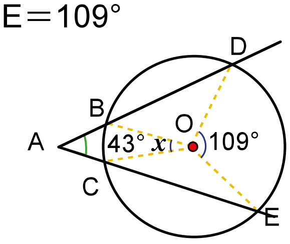
a) $\measuredangle \text{BOC} = 50°$, $\measuredangle \text{EOD} = 138°$



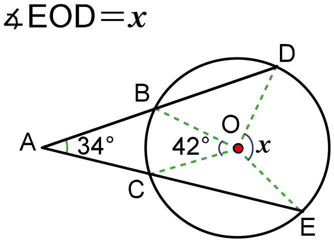
b) $\measuredangle \text{BOC} = 40°$, $\measuredangle \text{EOD} = 100°$



c) $\measuredangle \text{BOC} = x$, $\measuredangle \text{DOE} = 109°$



d) $\measuredangle \text{BOC} = 42°$, $\measuredangle \text{EOD} = x$

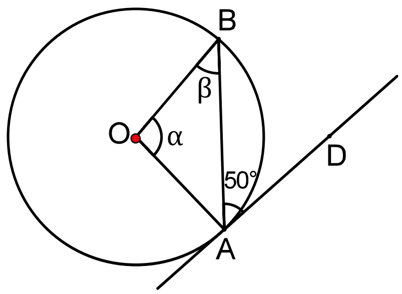


Contenido 4: Comprobemos lo aprendido 2

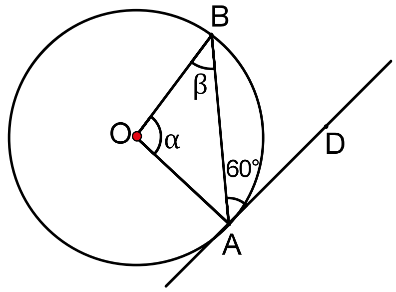
E

1. Calcule los valores de α y β en cada figura.

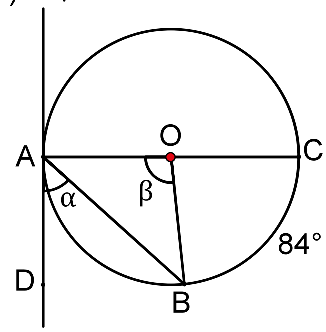
a)



b)

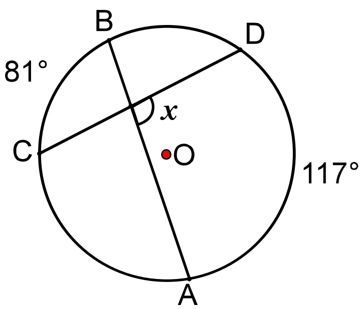


c) $\measuredangle BOC = 84°$

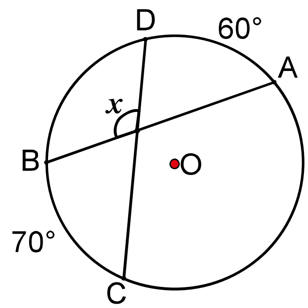


2. Calcule el valor de x en cada figura.

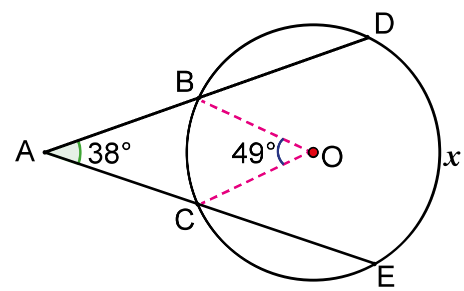
a) $\measuredangle BOC = 81°$, $\measuredangle AOD = 117°$



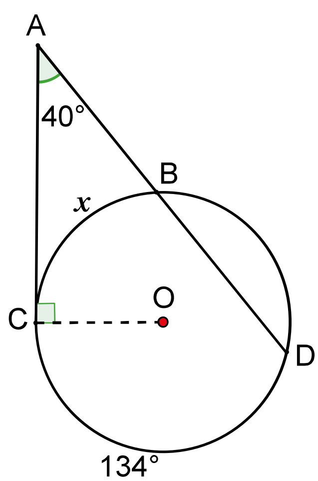
b) $\measuredangle BOC = 70°$, $\measuredangle AOD = 60°$



c) $\measuredangle BOC = 49°$, $\measuredangle DOE = x$

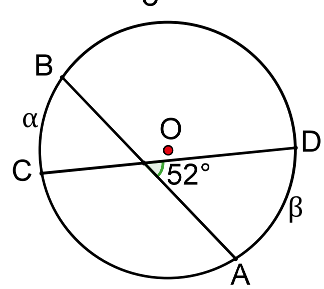


d) $\measuredangle COD = 134°$, $\measuredangle BOC = x$



3. Calcule en la figura, el valor de α y β si $\alpha = \frac{5}{8}\beta$.

$\measuredangle BOC = \alpha$, $\measuredangle AOD = \beta$



Unidad 8

Estadística

Sección 1 | Presentación de tablas y gráficas

Sección 1: Presentación de tablas y gráficas

Contenido 1: Conceptos básicos de estadística

Conceptos Básicos

- ✓ **Estadística:** Es la ciencia que se encarga de recopilar, organizar, procesar, analizar e interpretar datos numéricos con el fin de deducir las características de una población, para una toma de decisiones más efectiva.
- ✓ **Población:** Es un grupo de personas u objetos que se quiere examinar para extraer conclusiones.
- ✓ **Muestra:** Es la parte de una población que se toma como representativa de esta.
- ✓ **Individuo:** Es cada uno de los elementos de una población.
- ✓ **Variable estadística:** Característica observable de interés en un estudio. Las variables se clasifican en cualitativas y cuantitativas.
  - **Variable cuantitativa:** Sus valores son numéricos.

    Ejemplo:
    Número de mascotas que hay en los hogares de Managua.

  - **Variable cualitativa:** Sus valores no son números.

    Ejemplo:
    Género de los estudiantes de 9no grado.

P

Para determinar cuál es la clase favorita de los 50 estudiantes de 9no grado de un Centro Educativo de Managua, se entrevistó a 12 estudiantes.
En esta situación, ¿cuál es la población, la muestra y cuáles los individuos?

S

La población en este estudio son los 50 estudiantes de 9no grado, la muestra la conforman los 12 estudiantes entrevistados y un individuo es cada uno de los estudiantes.

E

1. Indique en las siguientes situaciones propuestas la población, muestra e individuo:
   a) Una encuesta aplicada a 100 personas de las 500 que entraron a una tienda en un día determinado.
   b) Los estudiantes de 7mo grado del Centro Rigoberto López Pérez son 45 y se entrevista a 6 de ellos para conocer las causas más frecuentes de inasistencias a clases.
   c) En un día cualquiera acuden 900 personas a un hospital y se entrevista a 300 de ellas para conocer las causas más frecuentes para asistir al hospital.

2. Identifique en cada situación cuál es la variable y qué tipo de variable es.
   a) Color de ojos de los estudiantes de 9no grado del Instituto Maestro Gabriel.
   b) Edad de los estudiantes de 7mo grado del Instituto Camilo Zapata.

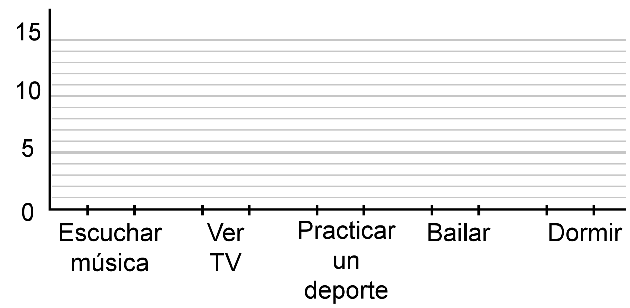
Contenido 2: Tabla de categoría, frecuencia absoluta (f_i) y gráfica de barras

P

Complete la siguiente tabla en la que se registra información de 30 estudiantes acerca de sus pasatiempos favoritos. En la figura de la derecha dibuje un rectángulo con el ancho dado por cada categoría y altura igual al número de estudiantes que disfrutan el pasatiempo.

Pasatiempos	Conteo	N° de estudiantes
Escuchar música	~~||||~~	5
Ver TV	~~||||~~ ~~||||~~ ||	
Practicar un deporte	||||	4
Bailar	~~||||~~ |	
Dormir	|||	
Total		30

Pasatiempos

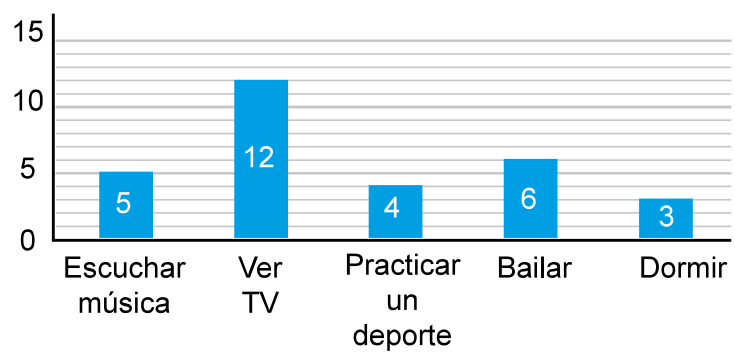


S

Se termina de llenar la tabla contando las plecas de la columna de conteo.

Pasatiempos	Conteo	N° de estudiantes
Escuchar música	~~||||~~	5
Ver TV	~~||||~~ ~~||||~~ ||	**12**
Practicar un deporte	||||	4
Bailar	~~||||~~ |	**6**
Dormir	|||	**3**
Total		30

Como el ancho de los rectángulos por construir está determinado, se utilizan las frecuencias como altura. Por ejemplo, a la categoría escuchar música le corresponde un rectángulo de altura 5 unidades.



Los pasatiempos Escuchar música, Ver TV, Practicar un deporte, Bailar y Dormir se llaman categorías. El número de veces que ocurre una categoría se llama frecuencia absoluta f_i y el gráfico con los rectángulos que aparece en la parte superior se llama gráfica de barras.

C

Una **categoría** es una característica definida a propósito para agrupar la información.

La frecuencia absoluta (f_i) es el número de veces que aparece un valor para determinada categoría.

Gráfica de barras es un gráfico formado por columnas que se construye trazando los ejes horizontal y vertical con intersección en el origen; luego se escriben las categorías en el primero decidiendo algún ancho, y se dibujan las barras con altura igual al valor de la frecuencia correspondiente.

E

a) En la siguiente tabla se registra la información proporcionada por 37 estudiantes sobre cuál es la asignatura preferida. Llene las casillas vacías de la tabla y construya una gráfica de barras.

Asignatura favorita	Conteo	Frecuencia absoluta f_i
Lengua y Literatura	~~////~~ ~~////~~	10
Matemática	~~////~~ ~~////~~ //	
Inglés	~~////~~	
CCSS	~~////~~ //	
CCNN	///	
Total		37

b) Pregunte a sus compañeros de aula cuál de las siguientes comidas es su favorita y complete la tabla con el conteo de repeticiones en cada categoría y la frecuencia absoluta. Construya una gráfica de barras.

Comida favorita	Conteo	Frecuencia absoluta f_i
Vigorón		
Baho		
Gallopinto		
Nacatamal		
Total		

Contenido 3: Tabla de frecuencia relativa y porcentual

P

La siguiente tabla muestra la estatura de estudiantes de la escuela Josefa Toledo. Calcule los valores que faltan.

Estatura (m)	f_i	$\frac{f_i}{200}$	$\left(\frac{f_i}{200}\right)100$
1,41 - 1,50	20		
1,51 - 1,60	60		
1,61 - 1,70	90	0,45	
1,71 - 1,80	30		15
Total	200		

La notación 1,41 - 1,50 se refiere a la agrupación de las alturas que oscilan entre 1,41 m y 1,50 m, siendo en este caso 20. Tal agrupación se conoce como **clase o intervalo**.

S

Según lo indicado en el encabezado de la tercera columna, se debe encontrar los cocientes $\frac{f_i}{200}$: $\frac{20}{200}$, $\frac{60}{200}$, $\frac{90}{200}$ y $\frac{30}{200}$; luego se multiplica cada uno de estos resultados por 100 para llenar la última columna.

Estatura (m)	f_i	$\frac{f_i}{200}$	$\left(\frac{f_i}{200}\right)100$
1,41 - 1,50	20	**0,1**	**10**
1,51 - 1,60	60	**0,3**	**30**
1,61 - 1,70	90	0,45	**45**
1,71 - 1,80	30	**0,15**	15
Total	200	**1**	**100**

C

El número decimal que se obtiene dividiendo la frecuencia absoluta de cada categoría entre el número total de individuos se llama **frecuencia relativa** y se denota por f_r. Si esta se multiplica por 100, se obtiene el porcentaje de ocurrencia o **frecuencia porcentual**, denotado por $f_r\%$.

E

La siguiente tabla muestra las edades de 20 estudiantes de 10mo grado del Centro Público Rigoberto López Pérez.

Complete la tabla:

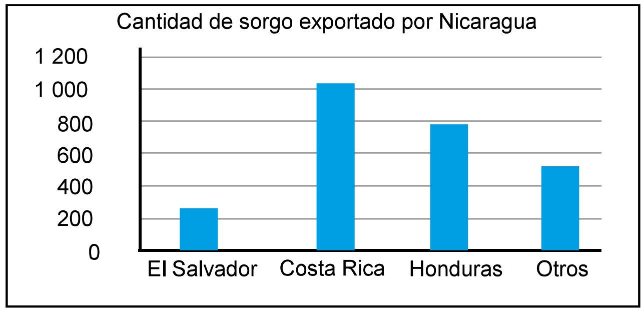
Edad	f_i	f_r	$f_r\%$
14 años	2		
15 años	4		
16 años	5		
17 años	5		
18 años	3		
19 años	1		
Total	20		

Contenido 4: Gráfica de faja e interpretación

P

La siguiente tabla y su respectiva gráfica de barra muestra la cantidad de sorgo exportado por Nicaragua, hacia algunos países.

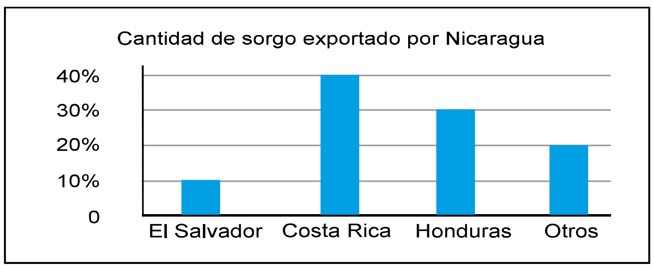
País	Sorgo (qq)	f_r	f_r%
El Salvador	260	0,1	10
Costa Rica	1 040	0,4	40
Honduras	780	0,3	30
Otros	520	0,2	20
Total	2 600	1	100



¿Cómo se puede visualizar la razón (en porcentaje) de la cantidad de sorgo exportada a cada destino mencionado, utilizando la gráfica de barra que corresponda a la tabla dada?

S

Las alturas de las barras del diagrama dado se pueden llevar a la escala porcentual (%)



y luego se juntan estas cintas de mayor a menor hasta obtener la siguiente faja

La figura construida se denomina gráfica de faja y permite visualizar la relación entre la cantidad de sorgo exportado a cada país, expresada en porcentajes, y el número total de quintales de sorgo, considerado en este caso como el 100%.

C

Una **gráfica de faja** es un recurso estadístico que facilita la apreciación visual de la relación entre la frecuencia porcentual de cada categoría y el total de individuos, considerado como el 100%. Para construir una gráfica de faja se coloca en una recta horizontal el rectángulo que corresponde a la frecuencia porcentual de cada categoría ubicándose de mayor a menor, de izquierda a derecha. Si aparece la categoría Otros, esta se ubica al final sin importar el porcentaje de esta.

E

La tabla de la derecha muestra el número de pacientes según enfermedad.

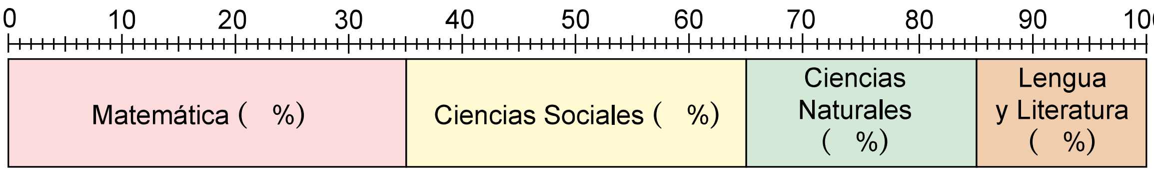
a) Complete la tabla.
b) Construya una gráfica de faja.

Enfermedad	f_i	f_r	f_r%
Dengue	450		
Zika	360		
Enfermedades digestivas	540		
Enfermedades respiratorias	180		
Otros	270		
Total	1 800		

Contenido 5: Aplicación de gráfica de faja

P

La siguiente gráfica de faja muestra los porcentajes de las preferencias de 40 estudiantes por las asignaturas básicas de 9no grado.



a) Encuentre la frecuencia relativa correspondiente a cada asignatura preferida.
b) Calcule el número de estudiantes correspondientes a cada categoría.

S

a) Leyendo la información reflejada en la gráfica de faja se puede ver que el % de Matemática es **35%**, el de Ciencias Sociales **30%**, Ciencias Naturales **20%** y Lengua y Literatura **15%**.

b) El número de estudiantes correspondientes a cada asignatura es:

Matemática: $(40)\left(\frac{35}{100}\right) = \mathbf{14}$, Ciencias Sociales: $(40)\left(\frac{30}{100}\right) = \mathbf{12}$,

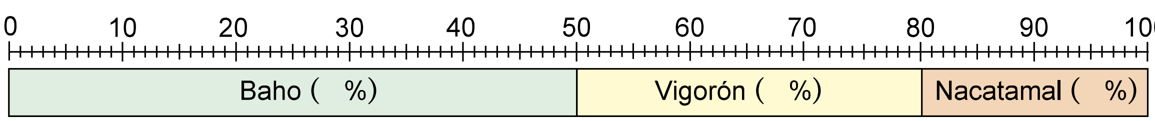
Ciencias Naturales: $(40)\left(\frac{20}{100}\right) = \mathbf{8}$, Lengua y Literatura: $(40)\left(\frac{15}{100}\right) = \mathbf{6}$

C

A partir de una gráfica de faja se identifica la parte que ocupa el porcentaje de cada categoría y su relación con el porcentaje total o longitud de la faja.

E

1. La siguiente gráfica de faja muestra los datos porcentuales que se obtuvieron al preguntar a un grupo de estudiantes de 9no grado sobre su comida típica favorita.



Identifique el porcentaje que corresponde a cada comida. Encuentre el número de estudiantes que prefieren cada comida típica.

2. La siguiente tabla muestra el inventario de los artículos en una tienda.
   a) Complete la tabla con los valores correspondientes de las frecuencias relativas.
   b) Construya una gráfica de faja.

Artículos	f_i	f_r	$f_r\%$
Pantalón	306		
Camiseta	153		
Vestido	207		
Falda	234		
Total	900		

Contenido 6: Gráfica de sectores circulares

P

La siguiente tabla muestra los pasatiempos favoritos de un grupo de jóvenes, y el círculo es un recurso visual que se usará para representar por medio de trozos los valores de $fr\%$:

Pasatiempo Favorito	f_i	$f_r\%$	Ángulo
Escuchar música	90	45	
Ver TV	30	15	
Redes Sociales	60	30	
Leer	20	10	
Total	200	100	

Pasatiempo Favorito

a) Calcule la medida del ángulo que corresponde al 1% de 360º.
b) Complete la última columna de la tabla referida a los ángulos centrales.
c) Divida el círculo dado en porciones según los porcentajes encontrados.
d) Señale el pasatiempo favorito en el grupo total de jóvenes.

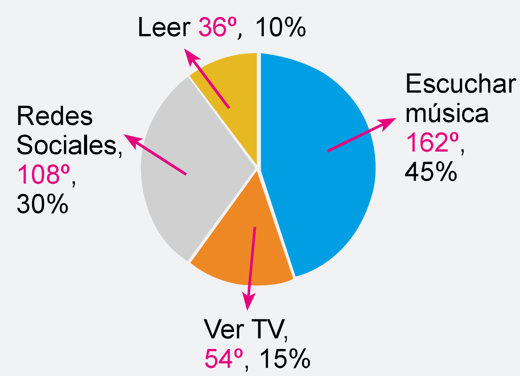
S

a) Se considera el ángulo 360° como el 100%, de modo que el 1% corresponde a $\frac{360º}{100} = \mathbf{3,6º}$.

b) Para dibujar cada ángulo central, círculo, correspondiente a cada porcentaje, se multiplica 3,6º por cada frecuencia porcentual.

Pasatiempo Favorito	f_i	$f_r\%$	Ángulo
Escuchar música	90	45	$(3{,}6°)(45) = \mathbf{162°}$
Ver TV	30	15	$(3{,}6°)(15) = \mathbf{54°}$
Redes Sociales	60	30	$(3{,}6°)(30) = \mathbf{108°}$
Leer	20	10	$(3{,}6°)(10) = \mathbf{36°}$
Total	200	100	**360º**

Pasatiempo Favorito



c) El círculo dado aparece a la derecha indicando el porcentaje y el ángulo central de cada categoría.
d) El pasatiempo favorito es Escuchar música, porque tiene la mayor frecuencia absoluta.

C

Las **gráficas de sectores circulares** pueden representar frecuencias absolutas o relativas y se usan para variables cualitativas. El procedimiento para diseñar una gráfica de sector circular:

1. Se encuentra la frecuencia porcentual de cada categoría.
2. Se multiplica cada frecuencia porcentual por 3,6°.
3. Se dibuja en un círculo el ángulo central que corresponde a cada número obtenido en el paso 2.

E

La tabla de la derecha muestra un inventario de libros de textos de una biblioteca.

a) Complete la tabla con los valores correspondientes.
b) Construya la gráfica de sector circular.

Libros	f_i	$f_r\%$	Ángulo
Historia	210		
Literatura	280		
Matemática	70		
Química	140		
Total	700		

Contenido 7: Representación de la frecuencia acumulada mediante ojivas

La tabla contiene el registro de libras de sal vendidas durante la semana, realice lo siguiente:

a) Complete el dato de frecuencia acumulada (F_i).
b) Grafique una ojiva con estos datos.
c) ¿Cuál fue el día que se vendió más sal?

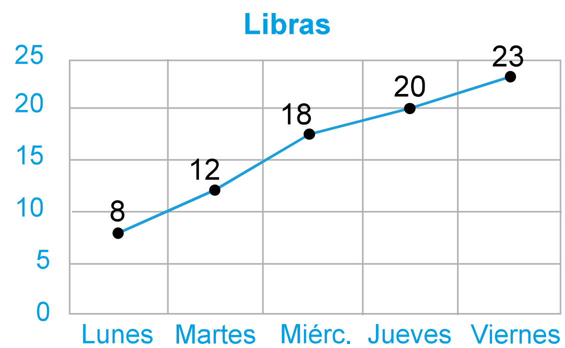
Días	f_i	F_i
Lunes	8	8
Martes	4	12
Miércoles	6	
Jueves	2	20
Viernes	3	
Total	23	

a) La casilla del Miércoles se completa con la suma del valor F_i de Martes, que es 12 con el valor f_i de Miércoles, 6, es decir, $12+6=18$. Se procede igual con las demás:

Días	f_i	F_i
Lunes	8	8
Martes	4	12
Miércoles	6	**18**
Jueves	2	20
Viernes	3	**23**
Total	23	

c) El día de mayor venta fue el Lunes.

b) Se trazan dos ejes perpendiculares: El horizontal para los días y el vertical para la cantidad acumulada de libras. Cada punto se ubica a la mitad del ancho de la categoría y a una altura dada por F_i.



En una categoría, la suma de las frecuencias absolutas de categorías precedentes y la actual se conoce como **frecuencia acumulada**, denotada por F_i.

La gráfica que representa los valores de F_i por categoría se llama **ojiva**, y se construye de la siguiente manera:

1. Se trazan dos ejes perpendiculares entre sí, designando al eje horizontal para las categorías y al eje vertical para la frecuencia acumulada.
2. Se marca el punto medio de cada segmento que representa una categoría.
3. Los puntos que generarán el gráfico se ubican tomando como referencia las marcas hechas en 2.y las frecuencias acumuladas que funcionarán como altura, luego se unen estos puntos con segmentos.

La tabla de la derecha contiene el registro de las libras de queso vendidas durante una semana:

a) Complete los datos que faltan en la tabla.
b) Grafique una ojiva.

Días	f_i	F_i
Lunes	5	
Martes	4	
Miércoles	6	
Jueves	3	
Viernes	5	
Total	23	

Contenido 8: Comprobemos lo aprendido

E

1. La siguiente tabla muestra la cantidad de sorgo exportado por Nicaragua hacia otros países.

   a) Calcule los ángulos que corresponden en un círculo a los datos dados.

   b) Construya una gráfica de barras, otra de sectores circulares y una de ojiva.

País	f_i Sorgo (qq)	f_r	f_r%	Ángulo
Salvador	260	0,1	10	
Costa Rica	1 040	0,4	40	
Honduras	780	0,3	30	
Otros	520	0,2	20	
Total	2 600	1	100	

2. Se preguntó a estudiantes de 9no grado del Instituto Miguel de Cervantes en los años 2011 y 2017 sobre el deporte de su preferencia, encontrando los resultados señalados en la tabla. A partir de esto:

   a) Indique la población, muestra e individuos de la situación presentada.

   b) Calcule el porcentaje que representa el número de estudiantes entrevistados en cada año.

   c) Construya una gráfica de faja por cada año y señale las diferencias que hay entre los resultados de los estudiantes que prefieren el fútbol en 2011 y 2017.

Deporte	2011		2017	
	f_i	f_r%	f_i	f_r%
Fútbol	70		82	
Basquetbol	35		28	
Voleibol	7		52	
Béisbol	63		38	
Total	175		200	

Solucionario

UNIDAD 1

Seccion 1 Contenido 1 (S1C1)

a) x^2+5x b) $4x^2-3x$
c) $2x^2+6x$ d) $6x^2-3x$
e) $-x^2-2x$ f) $-3x^2+3x$
g) x^2-6x h) $12x^2+20x$
i) $-10x^2+35x$

S1C2

a) $xy+5x+4y+20$
b) $xy-3x+2y-6$
c) $3xy+x+18y+6$
d) $5xy-6x+35y-42$
e) $2x^2+11xy+15y^2$
f) $35x^2+13xy-12y^2$

S1C3

a) $x^2+xy+9x+4y+20$
b) $x^2+xy-4x+3y-21$
c) $6x^2+3xy+29x+y+9$
d) $6x^2-3xy+16x+y-6$

S1C4

a)
$$\begin{array}{l} \quad x+y+5 \\ \underline{\times\ x+1 \qquad\qquad\qquad} \\ \quad x^2+xy+5x \\ \underline{\qquad\qquad +\ x+y+5} \\ \quad x^2+xy+6x+y+5 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{l} \quad x+y-3 \\ \underline{\times\ x+5 \qquad\qquad\qquad} \\ \quad x^2+xy-3x \\ \underline{\qquad\qquad +5x+5y-15} \\ \quad x^2+xy+2x+5y-15 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{l} \quad x-3y+7 \\ \underline{\times\ x-4 \qquad\qquad\qquad} \\ \quad x^2-3xy+7x \\ \underline{\qquad\qquad -\ 4x\ +12y-28} \\ \quad x^2-3xy+3x+12y-28 \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{l} \quad x-4y-8 \\ \underline{\times\ x-6 \qquad\qquad\qquad} \\ \quad x^2-4xy-8x \\ \underline{\qquad\qquad -6x+24y+48} \\ \quad x^2-4xy-14x+24y+48 \end{array}$$

S1C5

E1 a) x^2+7x b) $12x^2+15x$
c) $-x^2+2x$ d) $-10x^2+35x$

E2 a) $xy+5x+3y+15$
b) $xy-4x+2y-8$
c) $4xy-6x+32y-48$
d) $8xy+18x-4y-9$

E3
a) $x^2+xy+13x+5y+40$
b) $x^2+2xy-4x-2y+3$
c) $14x^2+51xy+18x+40y^2+45y$
d) $15x^2-38xy+6x+24y^2-8y$

E4
a)
$$\begin{array}{l} \quad x\ +\ y+\ 9 \\ \underline{\times\ x\ +5 \qquad\qquad\qquad} \\ \quad x^2+xy+\ 9x \\ \underline{\qquad\qquad +\ 5x+5y+45} \\ \quad x^2+xy+14x+5y+45 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{l} \quad x-6y+8 \\ \underline{\times\ x-7 \qquad\qquad\qquad} \\ \quad x^2-6xy+8x \\ \underline{\qquad\qquad -7x+42y-56} \\ \quad x^2-6xy+x\ \ +42y-56 \end{array}$$

S2C1

a) $x^2+13x+40$ b) $x^2+8x+12$
c) $y^2+7y+12$ d) $y^2+16y+63$
e) $x^2+x+\frac{3}{16}$ f) $y^2+\frac{3}{2}y+\frac{5}{9}$

S2C2

a) $x^2-2x-35$ b) y^2-y-6
c) $x^2-2x-24$ d) $y^2-4y-45$
e) $x^2-13x+42$ f) $y^2-13y+40$

S2C3

a) $3x^2+13x+4$ b) $8x^2+14x+3$
c) $2x^2+9x-5$ d) $6x^2-x-15$
e) $3x^2-13x+4$ f) $6x^2-17x+12$

S2C4

a) $x^2+8x+16$ b) x^2+4x+4
c) $x^2+12x+36$ d) $x^2+2mx+m^2$
e) $x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}$ f) $x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}$

S2C5

a) $x^2-2mx+m^2$ b) $x^2-8x+16$
c) $x^2-10x+25$ d) $x^2-12x+36$
e) $x^2-x+\frac{1}{4}$ f) $x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}$

S2C6

a) x^2-16 b) x^2-m^2
c) x^2-25 d) x^2-36
e) $x^2-\frac{1}{4}$ f) $x^2-\frac{1}{9}$

S2C7

E1
a) $x^2+11x+24$ b) $x^2+4x-45$
c) $6x^2-17x-14$ d) $x^2-10x+24$
e) $x^2+x+\frac{2}{9}$ f) $x^2-\frac{1}{20}x-\frac{3}{5}$

E2
a) $x^2+14x+49$ b) $x^2-18x+81$
c) $x^2+\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}$ d) $x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}$
e) $4x^2+20x+25$ f) $16x^2-24x+9$

E3 a) y^2-49 b) y^2-36
c) $y^2-\frac{9}{16}$ d) x^2y^2-16
e) $4x^2-25$ f) $9x^2-49$

Desafío

a) $x^2+y^2+2xy+6x+6y+9$
b) $x^2+y^2+4z^2+2xy+4xz+4yz$
c) $a^2+b^2+2ab-8a-8b+16$
d) $x^2+4y^2+z^2+4xy-2xz-4yz$
e) $9x^2+y^2+z^2-6xy+6xz-2yz$
f) $4x^2+y^2+16z^2-4xy-16xz+8yz$

Desafío

a) $4x^2+18x+8$
b) $9x^2+36x+35$
c) $16x^2-12x-54$
d) $25x^2+15x-28$
e) $36x^2-120x+99$
f) $49x^2-77x+24$

Desafío

a) x^3+3x^2+3x+1
b) $x^3-6x^2+12x-8$
c) $x^3+9x^2+27x+27$
d) $x^3+6x^2y+12xy^2-8y^3$

S2C8

a) $8+2\sqrt{15}$ b) $13-2\sqrt{42}$
c) 2 d) $7+4\sqrt{3}$
e) $11-6\sqrt{2}$ f) 1

S2C9

a) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$ b) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$
c) $\sqrt{3}-1$ d) $3\sqrt{2}+3$
e) $\frac{\sqrt{10}-\sqrt{6}}{2}$ f) $\frac{\sqrt{10}+2}{3}$

S2C10

E1 a) $7+2\sqrt{10}$ b) $41+12\sqrt{5}$
c) $13+4\sqrt{3}$ d) $35+8\sqrt{6}$

E2 a) $5+2\sqrt{6}$ b) $14-6\sqrt{3}$

c) $19-6\sqrt{2}$ d) $11-4\sqrt{6}$

E3 a) 5 b) 2
c) 7 d) 11

E4 a) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ b) $2\sqrt{3}+2\sqrt{2}$
c) $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}$ d) $\dfrac{5\sqrt{3}+5}{2}$
e) $\dfrac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3}$ f) $3+\sqrt{6}$
g) $3-2\sqrt{2}$ h) $-7-4\sqrt{3}$

S3C1
a) $3(x+3)$ b) $4(x+3)$
c) $4(2x+3)$ d) $2(x-5)$
e) $3(x-10)$ f) $3(4x-5)$

S3C2
a) $x(x+2)$ b) $x(x+5)$
c) $x(x-4)$ d) $x(x-1)$
e) $3a(a-3)$ f) $2m(m-3)$
g) $15a(a-1)$ h) $3x(x+2y)$

S3C3
a) $(n-3)(x+y)$ b) $(x-1)(2+y)$
c) $(a-2)(x-1)$ d) $(3a+b)(m-1)$
e) $(a-b)(3x+2)$
f) $(a+b-2)(4x-5)$

S3C4
a) $(x+3)(x-3)$ b) $(x+4)(x-4)$
c) $\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)$ d) $\left(x+\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)$
e) $(2x+3)(2x-3)$
f) $(3x+5)(3x-5)$

S3C5
E1
a) $m(m-n)$ b) $a(a-b)$
c) $a(2x-3y)$ d) $2a(2x+1)$
e) $x(a+b+c)$ f) $ab(1+4ab)$
g) $4b(2a^2-b)$ h) $3(x^2-4xy+2y)$

E2
a) $(a+b)(x+y)$ b) $(n+2)(a+1)$
c) $(a+1)(x-1)$ d) $(a+5)(x-3)$
e) $(n-1)(2x+3y)$ f) $(x+y)(4a-5b)$

E3
a) $(x+6)(x-6)$ b) $(x+10)(x-10)$
c) $(x+\frac{2}{3})(x-\frac{2}{3})$ d) $(x+\frac{3}{4})(x-\frac{3}{4})$
e) $(2x+5)(2x-5)$
f) $(3x+7)(3x-7)$

S3C6
a) $(x+5)^2$ b) $(x+7)^2$
c) $(x+9)^2$ d) $(x-4)^2$
e) $(x-6)^2$ f) $(x-8)^2$

S3C7
a) $(x+2)(x+3)$ b) $(x+3)(x+4)$
c) $(x+3)(x+5)$ d) $(y+3)(y+6)$
e) $(y+2)(y+7)$ f) $(x+2)(x+5)$

S3C8
a) $(x-2)(x-4)$ b) $(x-2)(x-9)$
c) $(x+3)(x-2)$ d) $(x+5)(x-3)$
e) $(x-4)(x+3)$ f) $(x-7)(x+2)$

S3C9
a) $(3x+5)(x+1)$ b) $(7x+3)(x+1)$
c) $(4x+1)(x+1)$ d) $(2x+3)(x+2)$
e) $(3x+2)(x+2)$ f) $(2x+3)(3x+1)$

S3C10
a) $(x-1)(2x-1)$ b) $(x-2)(2x-1)$
c) $(x+1)(3x-2)$ d) $(3x+5)(x-1)$
e) $(x-1)(5x+3)$ f) $(3x-2)(2x+1)$

S3C11
E1 a) $(x+2)^2$ b) $(x+6)^2$
c) $(x+10)^2$ d) $(x-3)^2$
e) $(x-5)^2$ f) $(x-7)^2$

E2
a) $(x+4)(x+5)$ b) $(x+4)(x+6)$
c) $(x-7)(x-4)$ d) $(x-3)(x-7)$
e) $(x+6)(x-2)$ f) $(x-7)(x+4)$

E3
a) $(5x+2)(x+1)$ b) $(7x+1)(x+2)$
c) $(3x-7)(x-1)$ d) $(2x-7)(x-1)$
e) $(4x-3)(x+1)$ f) $(7x+5)(x-1)$

E4 a) $6(x-2)(x+2)$
b) $3(x-4)(x+4)$
c) $2a(x+3)^2$
d) $3a(x+2)(x+3)$
e) $2n(x-4)(x+3)$
f) $3a(2x+1)(x+3)$

Desafío
a) $2(x+3)(x-3)$ b) $3(x+2)(x-2)$
c) $2n(m-2)^2$ d) $3(x+2)(x+1)$

Desafío
a) x^3+8 b) $(x-2)(x^2+2x+4)$
c) $(x+3)(x^2-3x+9)$
d) $(4x-y)(16x^2+4xy+y^2)$

UNIDAD 2

S1C1 E1
a) $3x = 13 - \boxed{7}$
$3x = \boxed{6}$
$x = \dfrac{\boxed{6}}{3}$
$x = \boxed{2}$

b) $-5x = 12 + \boxed{3}$
$-5x = \boxed{15}$
$x = \dfrac{\boxed{15}}{-5}$
$x = \boxed{-3}$

c) $\dfrac{x}{4} = 3 + \boxed{2}$
$\dfrac{x}{4} = \boxed{5}$
$x = \boxed{5}(4)$
$x = \boxed{20}$

E2
a) $x=1$ b) $x=6$ c) $x=-4$

S1C2
E1 **Maíz**: $x^2 = 36$
Frijoles: $5x^2 = 80$
Tomates: $20x^2 = 20$

E2 a), c) y e)

S1C3
a) $-3{,}3$ b) $-2{,}2$ c) 3 d) -2

S1C4
E1 $8\ m$

E2
a) $x=\pm 3$ b) $x=\pm\sqrt{5}$ c) $x=\pm 4$

S1C5
a) $x = 1, -3$ b) $x = 5, -1$
c) $x = -5+\sqrt{3},\ -5-\sqrt{3}$
d) $x = 7, -1$ e) $x = 1, -9$
f) $x = 6-\sqrt{5},\quad 6+\sqrt{5}$

S1C6
E1 a) $x=\pm 2$ b) $x=\pm 5$
c) $x=\pm\dfrac{2}{5}$ d) $\pm 2\sqrt{2}$

E2 a) $x = 4, -2$ b) $x = 1, -3$
c) $x = 3+\sqrt{5},\ 3-\sqrt{5}$
d) $x = -3+\sqrt{15},\ -3-\sqrt{15}$

E3 Ancho: $9\ m$, Largo: $18\ m$
E4 $9\ m$

S2C1

a) $(x+1)^2+4$ b) $(x+5)^2-32$
c) $(x-2)^2-5$ d) $(x+2)^2-4$

S2C2

a) $2(x+1)^2+1$ b) $3(x+1)^2+2$
c) $4(x-1)^2+3$ d) $5(x-1)^2+1$
e) $2(x-2)^2-17$ f) $3(x-2)^2-20$

S2C3

a) $x=-4,2$ b) $x=-6,2$
c) $x=3,5$
d) $x=1+\sqrt{2},\quad 1-\sqrt{2}$

S2C4

a) $x=-5,1$ b) $x=-6,2$
c) $x=-1,15$ d) $x=-1,3$

Desafío

a) $x=\dfrac{\sqrt{22}}{2}-2,\quad -2-\dfrac{\sqrt{22}}{2}$

b) $x=\dfrac{\sqrt{39}}{3}-2,\quad -2-\dfrac{\sqrt{39}}{3}$

S2C5

a) $x=\dfrac{5+\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$

b) $x=\dfrac{-7+\sqrt{41}}{2},\ \dfrac{-7-\sqrt{41}}{2}$

c) $x=\dfrac{5+\sqrt{17}}{4},\ \dfrac{5-\sqrt{17}}{4}$

d) $x=\dfrac{3+\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{3-\sqrt{3}}{3}$

S2C6

a) $x=2,-3$ b) $x=3,5$
c) $x=-5,1$ d) $x=-6,2$
e) $x=15,-1$ f) $x=-1,3$

S2C7

a) $x=0,-5$ b) $x=0,\ 3$
c) $x=0,3$ d) $x=-2$
e) $x=-3$ f) $x=4$

S2C8

E1 a) $x=-10,\ 2$
b) $x=2+\sqrt{2},\quad 2-\sqrt{2}$
c) $x=-7,\ 1$
d) $x=5+\sqrt{2},\quad 5-\sqrt{2}$

E2 a) $x=-1,\ -\dfrac{2}{3}$ b) $x=-1,\ \dfrac{1}{2}$

c) $x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{4},\ \dfrac{3-\sqrt{5}}{4}$

d) $x=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$

E3 a) $x=-2,\ -8$ b) $x=5,\ -9$
c) $x=1,\ 5$ d) $x=-4,\ 6$
e) $x=0,-7$ f) $x=0,\ 4$
g) $x=-5$ h) $x=6$

S3C1

a) La ecuación tiene dos soluciones en los números reales.
b) La ecuación tiene una solución en los números reales.
c) La ecuación no tiene solución en los números reales.
d) La ecuación tiene dos soluciones en los números reales.
e) La ecuación tiene una solución en los números reales.
f) La ecuación no tiene solución en los números reales.

S3C2

a) $x^2-7x+12=0$
b) $x^2+x-20=0$
c) $x^2+8x+15=0$
d) $x^2-\dfrac{7}{2}x+\dfrac{3}{2}=0$
e) $x^2-2x-1=0$
f) $x^2+2x-1=0$

S3C3

a) La ecuación tiene dos soluciones en los números reales.
b) La ecuación tiene una solución en los números reales.
c) La ecuación no tiene solución en los números reales.
d) La ecuación tiene una solución en los números reales.
e) La ecuación no tiene solución en los números reales.
f) La ecuación tiene dos soluciones en los números reales.

E2

a) $x^2-7x+10=0$
b) $x^2-x-6=0$
c) $x^2+5x+4=0$
d) $x^2-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{1}{3}=0$
e) $x^2-2x-2=0$
f) $x^2+2x-2=0$

S3C4

a) Ancho: 5 m, Largo: 12 m
b) Ancho: 7 m, Largo: 12 m
c) Altura: 7 m, Base: 12 m

S3C5

E1 a) 4 b) 8 y 9, o −9 y −8
E2 a) 3,7 b) 12

Desafío

a) $7cm$ b) $8m, 16m$ c) $5m$
d) $8,-5$ e) $-10,13$ f) $-9,5$
g) $8cm$ h) $-4,8$

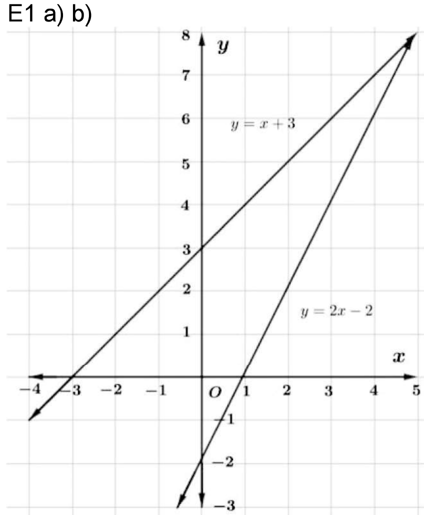
UNIDAD 3

S1C1

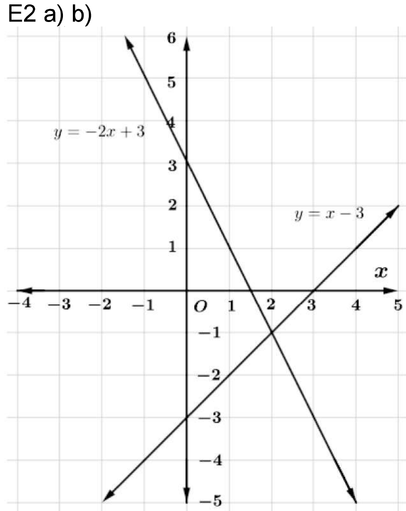
a) I C b) III C c) I C
d) II C e) III C f) IV C
g) II C h) I C

S1C2

E1 a) b)



E2 a) b)



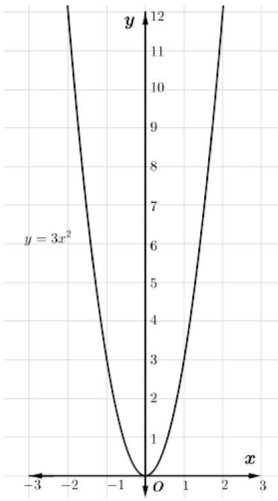
S1C3

x	-5	-4	4	5
y	25	16	16	25

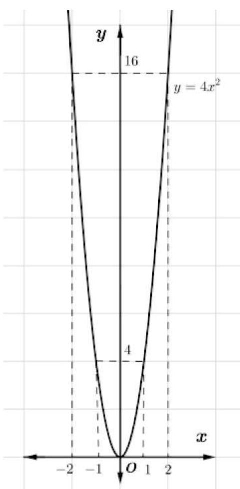
S1C4

a)

x	-2	-1	0	1	2
$3x^2$	12	3	0	3	12

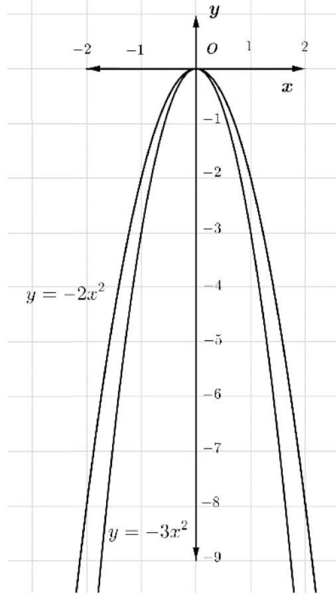


b)



1. Vértice es el origen de coordenadas $(0, 0)$.
2. Es cóncava hacia arriba

S1C5



a) 1. Vértice es el origen de coordenadas $(0, 0)$.

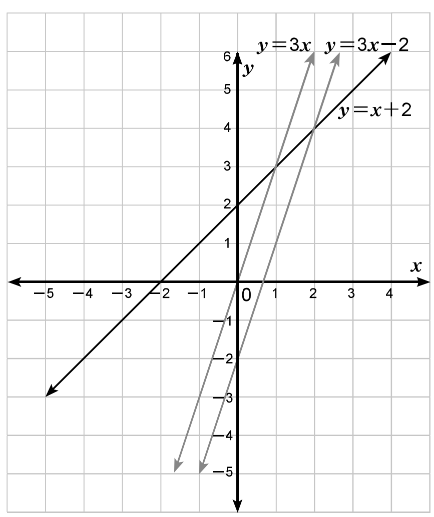
2. Es cóncava hacia abajo

b) 1. Vértice es el origen de coordenadas $(0, 0)$.

2. Es cóncava hacia abajo

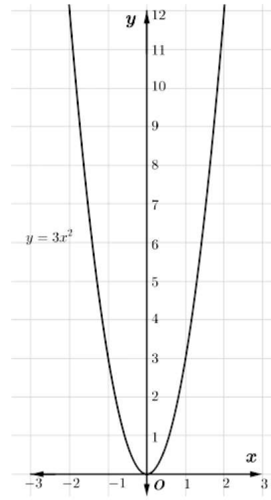
S1C6

E1 a) b) c)



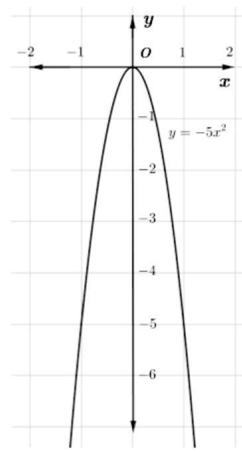
E2

a)



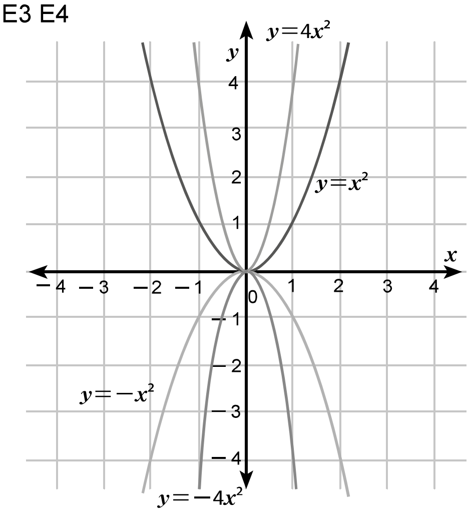
1. Vértice es el origen de coordenadas $(0, 0)$.
2. Es simétrica con respecto al eje y
3. Es cóncava hacia arriba
4. Dominio: todos los números reales
5. Rango: todos los números reales no negativos

b)

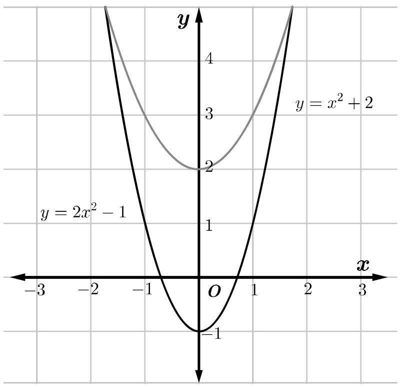


1. Vértice es el origen de coordenadas $(0, 0)$.
2. Es simétrica con respecto al eje y
3. Es cóncava hacia abajo
4. Dominio: todos los números reales
5. Rango: todos los números reales no positivos

E3 E4



S2C1



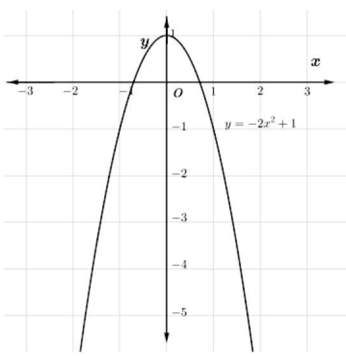
a) 1. El vértice es $(0,2)$

2. Es cóncava hacia arriba

b) 1. El vértice es $(0,-1)$

2. Es cóncava hacia arriba

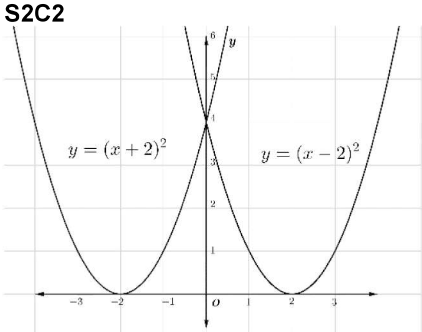
c)



1. El vértice es $(0,1)$

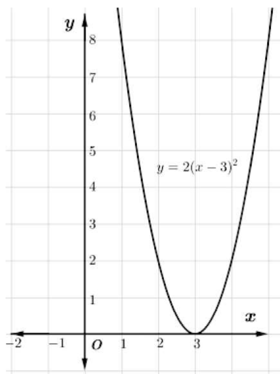
2. Es cóncava hacia abajo

S2C2



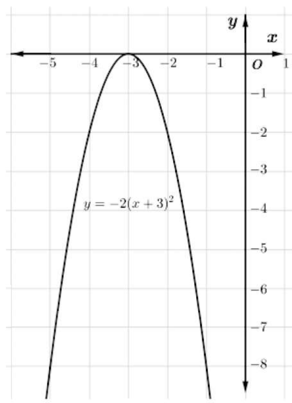
a) Vértice: $(2, 0)$
b) Vértice: $(-2, 0)$

c)



Vértice: $(3, 0)$

d)

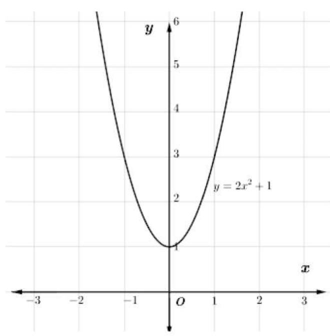


Vértice: $(-3, 0)$

S2C3

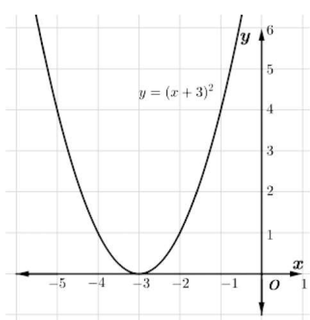
E1

a)



Vértice: $(1, 0)$

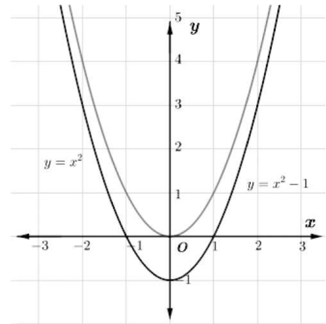
b)



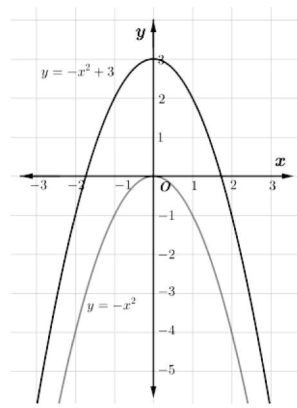
Vértice: $(-3, 0)$

E2

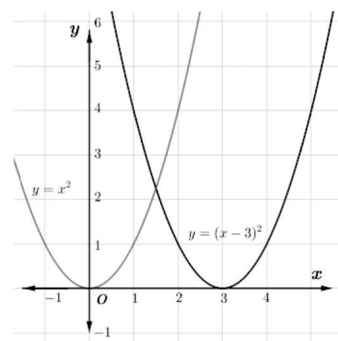
a)



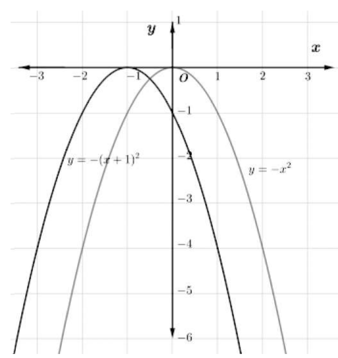
b)



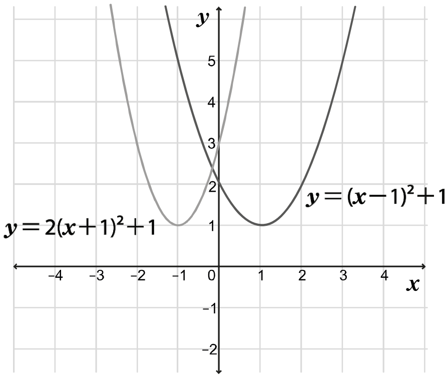
c)



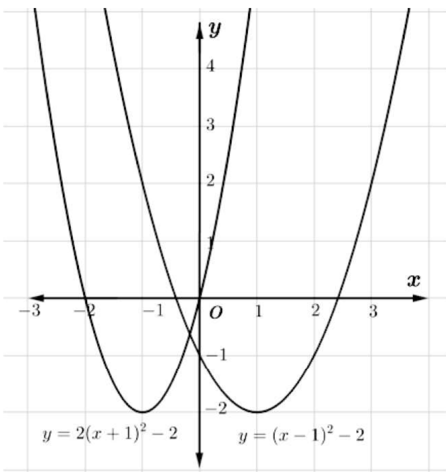
d)



S2C4

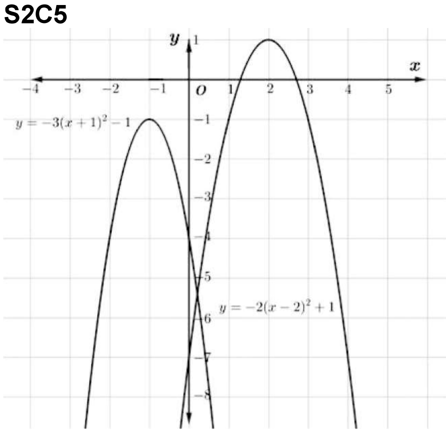


a) Vértice: $(1, 1)$
b) Vértice: $(-1, 1)$



c) Vértice: $(1,-2)$
d) Vértice: $(-1,-2)$

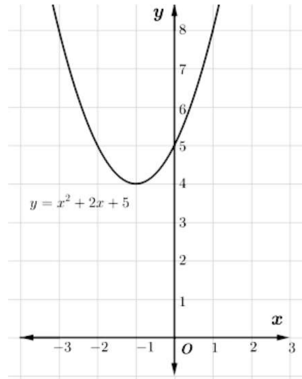
S2C5



a) Vértice: $(2,1)$
b) Vértice: $(-1,-1)$

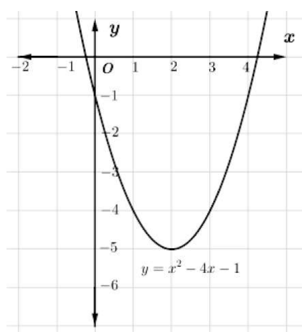
S2C6

a)



Vértice: $(-1,4)$
Eje de simetría: $x=-1$
Intercepto: $(0, 5)$

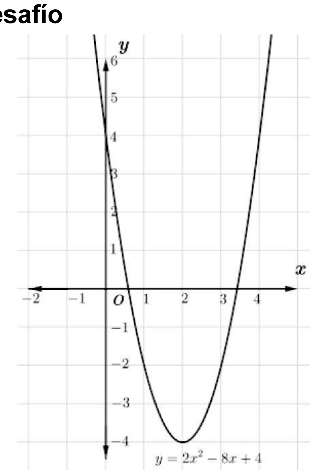
b)



Vértice: $(2,-5)$
Eje de simetría: $x=2$
Intercepto: $(0,-1)$

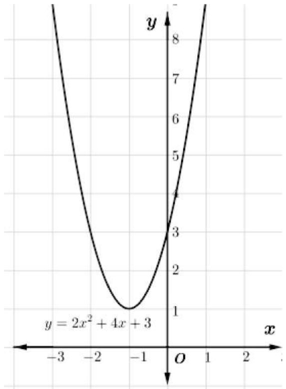
Desafío

a)



Vértice: $(2,-4)$
Eje de simetría: $x=2$
Intercepto: $(0, 4)$

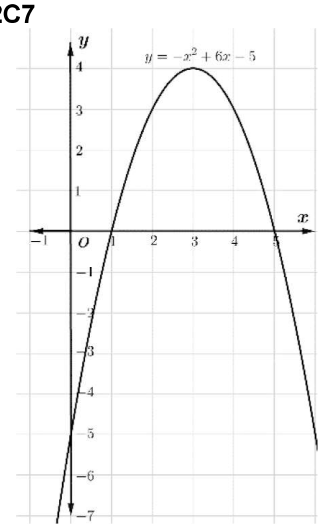
b)



Vértice: $(-1, 1)$
Eje de simetría: $x=-1$
Intercepto: $(0, 3)$

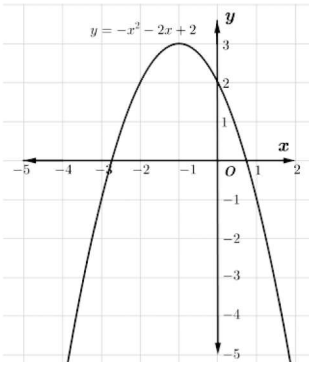
S2C7

a)



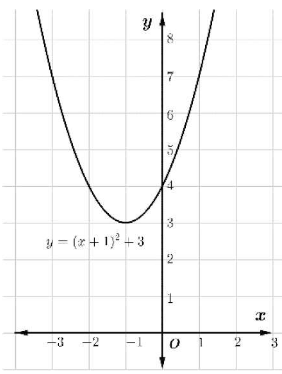
Vértice: $(3, 4)$
Eje de simetría: $x=3$
Intercepto: $(0,-5)$

b)



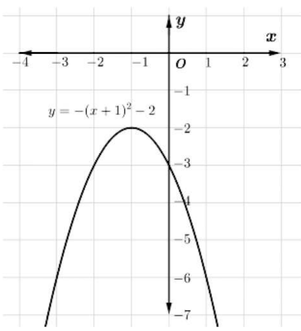
Vértice: $(-1, 3)$
Eje de simetría: $x = -1$
Intercepto: $(0, 2)$

S2C8
E1
a)



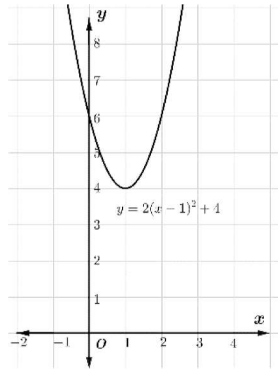
Vértice: $(-1,3)$

b)



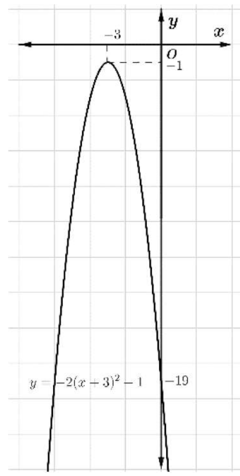
Vértice: $(-1, -2)$

c)



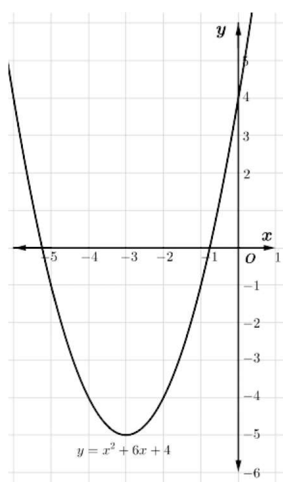
Vértice: $(1, 4)$

d)



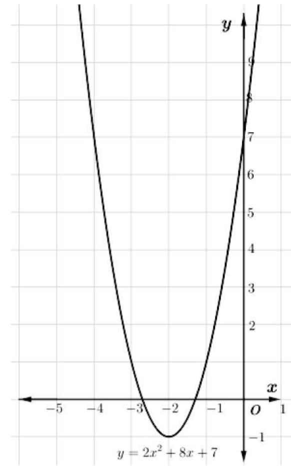
Vértice: $(-3, -1)$

E2
a)



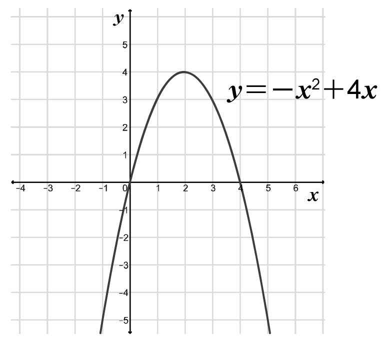
Vértice: $(-3, -5)$
Eje de simetría: $x = -3$
Intercepto: $(0, 4)$

b)



Vértice: $(-2, -1)$
Eje de simetría: $x = -2$
Intercepto: $(0, 7)$

c)



Vértice: $(2, 4)$
Eje de simetría: $x = 2$
Intercepto: $(0,\ 0)$

S3C1
a) Mínimo: $y = 4$
No existe un valor máximo para y
b) Máximo: $y = -3$
No existe un valor mínimo para y
c) Mínimo: $y = 1$
No existe un valor máximo para y
d) Máximo: $y = -2$
No existe un valor mínimo para y

S3C2
a) Máximo: $y = 6$ Mínimo: $y = 2$
b) Máximo: $y = 18$ Mínimo: $y = 3$

Desafío
a) Máximo: $y = 3$ Mínimo: $y = -5$
b) Máximo: $y = 3$ Mínimo: $y = -3$
c) Máximo: $y = 3$ Mínimo: $y = -3$

S3C3

a) Máximo: $y = 7$ Mínimo: $y = -2$
b) Máximo: $y = 6$ Mínimo: $y = -2$

Desafío

a) Máximo: $y = 3$ Mínimo: $y = -13$
b) Máximo: $y = 5$ Mínimo: $y = -13$
c) Máximo: $y = -13$ Mínimo: $y = -67$

S3C4

E1
a) Máximo: $y = 7$ Mínimo: $y = 4$
b) Máximo: $y = 7$ Mínimo: $y = 3$

E2
a) Máximo: $y = 12$ Mínimo: $y = 3$
b) Máximo: $y = 19$ Mínimo: $y = 7$

E3
a) Máximo: $y = 1$ Mínimo: $y = -2$
b) Máximo: $y = 2$ Mínimo: $y = -2$

S3C5

a) Sea x la longitud de la altura.
Sea y el área.
$y = -x^2 + 8x$
b) Altura: $4\ m$, Base: $4\ m$

UNIDAD 4

S1C1

a) 5 b) 5 c) 9
d) 9 e) 4 f) 5

S1C2

E1 a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{5}{7}$
E2 $9\ cm$

S1C3

E1
$\frac{\text{AB}}{\text{CD}} = \frac{\text{MN}}{\text{PQ}} = \frac{1}{3}$, entonces
los segmentos AB y CD son proporcionales a los segmentos EF y GH.

E2
a) $\frac{\text{AD}}{\text{AB}} = \frac{\text{EH}}{\text{EF}} = \frac{2}{3}$, entonces
la base y la altura del rectángulo ABCD son proporcionales a las del EFGH.

b) $\frac{\text{AD}}{\text{AB}} = \frac{4}{9}, \frac{\text{EH}}{\text{EF}} = \frac{2}{3}$, entonces
la base y la altura del rectángulo ABCD no son proporcionales a las del EFGH.

S1C4

E1 a) 6 b) 3 c) 5 d) 4
E2 a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{2}{7}$
E3 a) $\frac{2}{1}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{2}{1}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{2}{1}$

S2C1

E1 a) 2 b) 1 c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{2}{3}$

E2


S2C2

a) $p = \frac{20}{3}$ b) $p = 1$ c) $p = 4$

S2C3

a) $p = 7$ b) $p = 7$ c) $p = -12$

S2C4

a) AP=6 cm, PB=21 cm
b) AP=20 cm, PB=5 cm
c) AP=28 cm, PB=21 cm
d) AP=12 cm, PB=4 cm

S2C5

E1


E2 a) $p = 5$ b) $p = 3$ c) $p = -2$
E3 a) $p = 7$ b) $p = \frac{14}{3}$ c) $p = -26$
d) $p = -7$
E4 a) AP=9 cm, PB=21 cm
b) AP=15 cm, PB=3 cm
c) AP=18 cm, PB=14 cm
d) AP=10 cm, PB=5 cm

UNIDAD 5

S1C1

a) $\frac{\text{AB}}{\text{DE}} = \frac{1}{2}, \frac{\text{BC}}{\text{EF}} = \frac{1}{2}, \frac{\text{AC}}{\text{DF}} = \frac{1}{2}$
b) $\measuredangle\text{A} = \measuredangle\text{D}, \measuredangle\text{B} = \measuredangle\text{E}, \measuredangle\text{C} = \measuredangle\text{F}$

S1C2

E1 a) Son semejantes.
b) Son semejantes.
E2 a) $\Delta\text{ABC} \sim \Delta\text{DEF}$
b) $\Delta\text{ABC} \sim \Delta\text{EFD}$

S1C3

E1 a) Son semejantes.
b) Son semejantes.
E2 a) $\Delta\text{ABC} \sim \Delta\text{EDF}$
b) $\Delta\text{DEF} \sim \Delta\text{MNO}$

S1C4

E1 a) Son semejantes.
b) Son semejantes.
E2 a) $\Delta\text{ABC} \sim \Delta\text{EFD}$
b) $\Delta\text{JKL} \sim \Delta\text{MNO}$

S1C5

E1 a) No son semejantes.
b) Son semejantes (LLL).
$\Delta\text{EDF} \sim \Delta\text{XWY}$
c) Son semejantes (LAL).
$\Delta\text{GHI} \sim \Delta\text{JKL}$

E2
a) $\text{DE} = 10\ cm, \text{DF} = 14\ cm$
b) $\text{EF} = 12\ cm, \text{FD} = 15\ cm$

S1C6

E1
a) Hipótesis: $\overline{\text{AB}} \parallel \overline{\text{DE}}$
Tesis: $\Delta\text{ACB} \sim \Delta\text{DCE}$
b)

Pasos
1. $\overline{\text{AB}} \parallel \overline{\text{DE}}$
2. $\measuredangle\text{A} = \measuredangle\text{D}$
4. $\Delta\text{ACB} \sim \Delta\text{DCE}$

Justificación
3. $\angle\text{C}$ es común en ΔACB y ΔDCE

E2
a) Hipótesis: $\measuredangle\text{TPQ} = \measuredangle\text{S} = \measuredangle\text{Q} = 90°$
Tesis: $\Delta\text{PST} \sim \Delta\text{RQP}$
b)

Pasos
1. $\measuredangle\text{S} = \measuredangle\text{Q}$
2. $\measuredangle\text{TPQ} = 90°$
7. $\Delta\text{PST} \sim \Delta\text{RQP}$

Justificación
3. Por paso 2
4. $180° - \measuredangle\text{Q} = 90°$
6. Por paso 5

S1C7

a) Hipótesis: M y N son los puntos medios respectivos de $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, y $MN = \frac{1}{2}AB$

Tesis: $\Delta ABC \sim \Delta MNC$

b) Pasos

1. M punto medio de $\overline{AC}$
2. N punto medio de $\overline{BC}$
3. $MN = \frac{1}{2}AB$

Justificación

4. Por paso 2
5. Por paso 1
6. Por pasos 3,4 y 5
7. LLL en paso 6

S1C8

a) Hipótesis: $AC = BC, DF = EF$ y $\measuredangle C = \measuredangle F$

Tesis: $\Delta ACB \sim \Delta DFE$

b) Pasos

1. $AC = BC$
4. $\measuredangle C = \measuredangle F$
5. $\Delta ACB \sim \Delta DFE$

Justificación

2. Hipótesis
3. Por pasos 1,2

S2C1

a) $\Delta ACB \sim \Delta DFE$ (AA)
b) $\Delta ACB \sim \Delta DFE$ (LAL)
c) $\Delta ACB \sim \Delta DFE$ (LAL)

S2C2

$a = 9\sqrt{10}$, $b = 3\sqrt{10}$

S2C3

a) $h = 8\sqrt{2}\ cm$ b) $x = 45\ cm$

S2C4

a) $x = 6\ cm$ b) $x = 4\ cm, y = 15cm$

S2C5

a) $x = 10\ cm$ b) $x = 12\ cm$

S2C6

$\overline{DF} \parallel \overline{AC}$.

S2C7

a) $x = 3\ cm$ b) $y = 2\ cm$

S2C8

a) $DE = 9cm$ b) $BC = 9cm, GH = 8cm$

S2C9

a) $9\ m$ b) $15\ m$ c) $15\ m$

S2C10

E1 a) $x = 5, y = 8$
b) $x = 10, y = 8$
c) $x = 24, y = 30$
d) $x = 7{,}5, y = 12$

E2 a) $x = 4$ b) $x = 6$

E3 a) $AB = 14$ b) $AC = 18$

E4 $x = 4$

E5 $12\ m$

UNIDAD 6

S1C1

$x = 5$

S1C2

a) Para el triángulo dado se tiene que $a = 3, b = 2$, y $c = \sqrt{13}$, de modo que
$c^2 = 13$, y
$a^2 + b^2 = 13$
Por lo anterior vemos que
$a^2 + b^2 = c^2$

b) Para el triángulo dado se tiene que $a = 12, b = 5$, y $c = 13$, de modo que
$c^2 = 169$, y
$a^2 + b^2 = 169$
Por lo anterior vemos que
$a^2 + b^2 = c^2$

c) Para el triángulo dado se tiene que
$a = 4, b = 2$, y $c = 2\sqrt{5}$, de modo que
$c^2 = 20$, y
$a^2 + b^2 = 20$
Por lo anterior vemos que
$a^2 + b^2 = c^2$

S1C3

E1 a) $AB = 5cm$ b) $BC = 5cm$

E2

	①	②	③	④
a	6	4	$\sqrt{2}$	$3\sqrt{5}$
b	8	4	$\sqrt{7}$	2
c	10	$4\sqrt{2}$	3	7

S1C4

a) $17\ km$ b) $2\sqrt{3}\ m$

S1C5

E1 a) $2\sqrt{5}$ b) 2 c) $2\sqrt{5}$

E2 a) $4\sqrt{5}$ b) $5\sqrt{3}$ c) $2\sqrt{7}$

E3 $2\sqrt{17}$

S2C1

a) Altura: $8\ cm$, Volumen: $96\pi\ cm^3$
b) Altura: $12\ cm$, Volumen: $100\pi\ cm^3$
c) Altura: $3\sqrt{11}\ cm$, Volumen: $\sqrt{11}\pi\ cm^3$

S2C2

a) Altura: $3\sqrt{7}\ cm$, Volumen: $36\sqrt{7}\ cm^3$
b) Altura: $3\sqrt{17}\ cm$, Volumen: $144\sqrt{17}\ cm^3$
c) Altura: $2\sqrt{23}\ cm$, Volumen: $\frac{32\sqrt{23}}{3}\ cm^3$

S2C3

a) $13\ cm$ b) $9\ cm$

S2C4

a) $4\sqrt{3}$ b) $\sqrt{3}$

S2C5

$24\sqrt{3}\ m^2$

S2C6

E1

a) Altura: $2\sqrt{5}\ cm$, Volumen: $\frac{32\sqrt{5}\pi}{3}\ cm^3$
b) Altura: $3\sqrt{5}\ cm$, Volumen: $36\sqrt{5}\pi\ cm^3$

E2 $\frac{32\sqrt{6}}{3}\ m^2$

E3 $2\sqrt{14}\ cm^2$

E4 $96\sqrt{3}\ cm^2$

UNIDAD 7

S1C1

O : Centro
$\overset{\frown}{ML}$: Arco
$\overline{OM}$: Radio
$\overleftrightarrow{MN}$: Recta tangente
$\overline{RS}$: Cuerda
$\overleftrightarrow{RS}$: Recta secante
$\overline{EF}$: Diámetro

S1C2

a) $30°$ b) $36°$ c) $50°$

S1C3

a) $x = 40°, y = 80°$ b) $x = 20°, y = 40°$
c) $x = 90°, y = 180°$

S1C4

E1

a) $60°$ b) $48°$ c) $55°$ d) $66°$
e) $27°$ f) $68°$ g) $60°$
h) $60°$

E2 $27°$

E3 $\measuredangle CDB = 30°$

S2C1

a) $120°$ b) $80°$ c) $50°$

S2C2

a) $89°$ b) $104°$ c) $67°$

S2C3

a) $44°$ b) $30°$ c) $23°$ d) $110°$

S2C4

E1 a) $\alpha = 100°, \beta = 40°$
b) $\alpha = 120°, \beta = 30°$
c) $\alpha = 48°, \beta = 96°$

E2

a) $99°$ b) $115°$ c) $125°$ d) $54°$

E3 $\alpha = 40°, \beta = 64°$

UNIDAD 8

S1C1

E1

a) Población: 500 personas que entraron a la tienda un día
Muestra: 100 personas
Individuo: Cada una de las personas

b) Población: 45 estudiantes de 7mo grado
Muestra: 6 estudientes
Individuo: Cada uno de los estudiantes

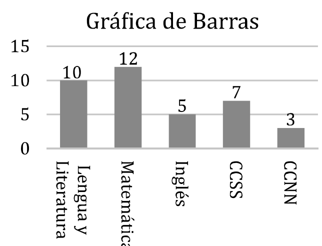
c) Población: 900 personas al hospital
Muestra: 300 personas
Individuo: Cada una de las personas

E2

a) Color de ojos(cualitativa)
b) Edad(cuantitativa)

S1C2 a)

Clase Favorita	Conteo	fi
Lengua y Literatura	//// ////	10
Matemática	//// //// //	12
Inglés	////	5
CCSS	//// //	7
CCNN	///	3
Total		37



b) La respuesta se ha omitido

S1C3

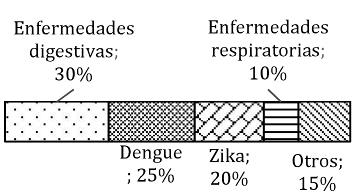
Edad	fi	fr	$fr\,\%$
14 años	2	0,1	10
15 años	4	0,2	20
16 años	5	0,25	25
17 años	5	0,25	25
18 años	3	0,15	15
19 años	1	0,05	5
Total	20	1	100

S1C4

a)

Enfermedad	fi	fr	$fr\,\%$
Dengue	450	0,25	25
Zika	360	0,2	20
Enfermedades digestivas	540	0,3	30
Enfermedades respiratorias	180	0,1	10
Otros	270	0,15	15
Total	1800	1	100

b)



S1C5

E1

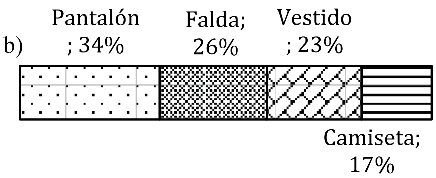
Baho: 50%, Vigorón: 30%, Nacatamal: 20%

E2

a)

Artículos	fi	fr	$fr\,\%$
Pantalón	306	0,34	34
Camiseta	153	0,17	17
Vestido	207	0,23	23
Falda	234	0,26	26
Total	900	1	100

b)

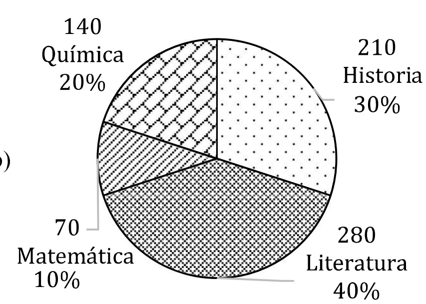


S1C6

a)

Libros	fi	$fr\ \%$	Ángulo
Historia	210	30	108°
Literatura	280	40	144°
Matemática	70	10	36°
Química	140	20	72°
Total	700	100	360°

b)

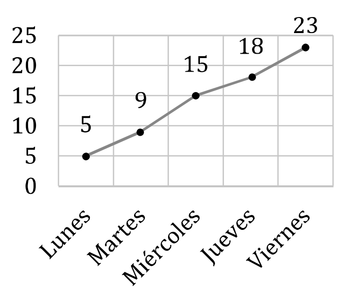


S1C7

a)

Días	fi	Fi
Lunes	5	5
Martes	4	9
Miércoles	6	15
Jueves	3	18
Viernes	5	23
Total	23	

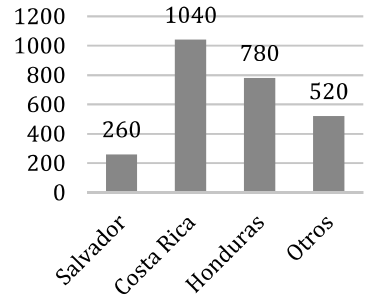
b)

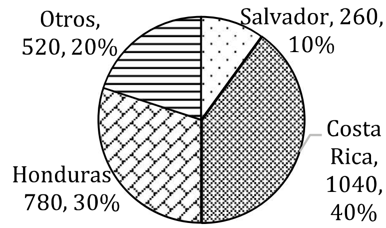


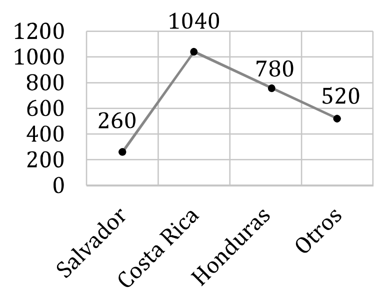
S1C8

E1 a) b)

País	fi	fr	$fr\,\%$	Ángulo
Salvador	260	0,1	10	36°
CostaRica	1040	0,4	40	144°
Honduras	780	0,3	30	108°
Otros	520	0,2	20	72°
Total	2600	1	100	360







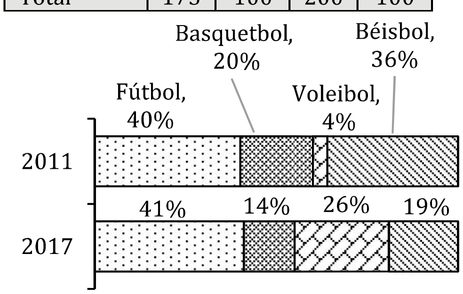
E2

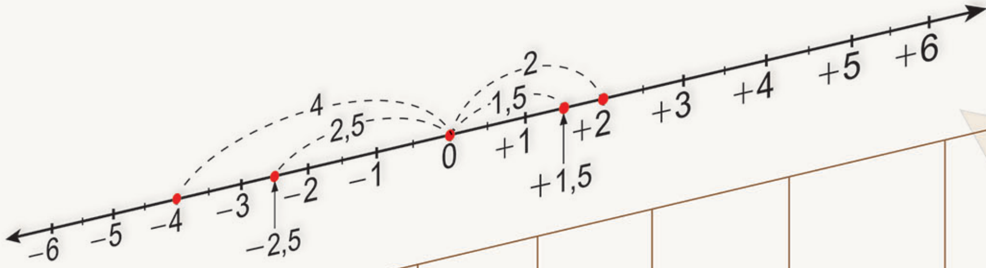
a) Población: Los estudiantes de 9no grado en el año 2011 y 2017.
Muestra: 175 estudiantes en 2011 y 200 estudiantes en 2017.
Individuo: cada uno de los estudiantes

b) El año 2011: 46.7%
El año 2017: 53.3%

c)

Deporte	2011		2017	
	fi	$fr\%$	fi	$fr\%$
Fútbol	70	40	82	41
Basquetbol	35	20	28	14
Voleibol	7	4	52	26
Béisbol	63	36	38	19
Total	175	100	200	100





NICAMATE

Proyecto para el Aprendizaje Amigable de Matemática en Educación Secundaria

MATEMÁTICA

Portal Educativo