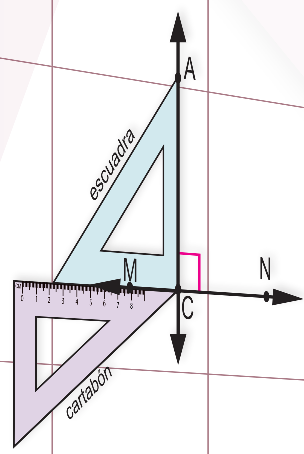
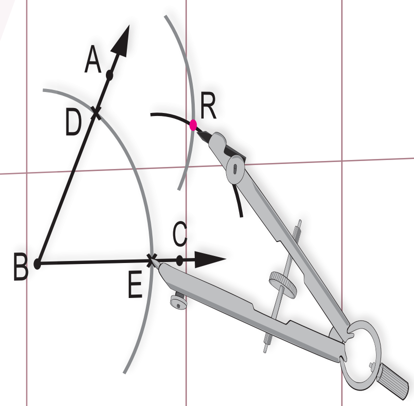
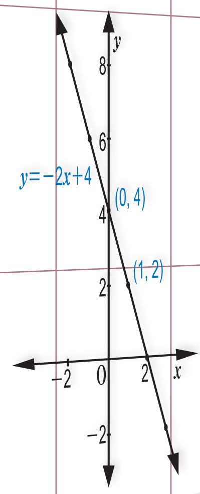
MATEMÁTICA 7

Séptimo grado







Libro de Texto

Educación Secundaria

Gobierno de Reconciliación y Unidad Nacional
El Pueblo, Presidente!
UNIDA NICARAGUA TRIUNFA!
MINED
Un Ministerio en la Comunidad
JICA

COORDINACIÓN GENERAL

Profesora María Elsa Guillén
Profesora Melba López Montenegro
Profesor Julio César Canelo Castillo

AUTORES

Melissa Lizbeth Velásquez Castillo
Nubia Aracelly Barreda Rodríguez
Humberto Antonio Jarquín López
Gregorio Isabel Ortiz Hernández

REVISIÓN Y ASESORÍA TÉCNICA CIENTÍFICA

Sociedad Matemática de Nicaragua
Profesora Gloria Parrilla Rivera
Profesor Jorge Alberto Velásquez Benavidez

COLECTIVO DE AUTORES

MINED

Francisco Emilio Díaz Vega
Humberto Antonio Jarquín López
Juan Carlos Caballero López
Gregorio Isabel Ortiz Hernández
Alberto Leonardo García Acevedo

UNAN - MANAGUA

Nubia Aracelly Barreda Rodríguez
Melissa Lizbeth Velásquez Castillo
Armando José Huete Fuentes
Primitivo Herrera Herrera
Marlon José Espinoza Espinoza

UNAN - LEÓN

Anastacio Benito González Funes
Domingo Felipe Aráuz Chévez
Célfida del Rosario López Sánchez
Orlando Antonio Ruiz Álvarez
Hilario Ernesto Gallo Cajina

INSTITUTOS QUE PARTICIPARON EN LA VALIDACIÓN

Colegio Clementina Cabezas, Managua, Managua
Colegio Fernando Gordillo, Managua, Managua
Colegio Tomas Borge, Mateare, Managua
Colegio San Cayetano, San Rafael del Sur, Managua
Instituto Nacional La Salle, Diriamba, Carazo
Instituto Juan José Rodriguez, Jinotepe, Carazo
San Benito #1, Chinandega, Chinandega
Instituto Nacional Rubén Darío, Posoltega, Chinandega
Jhon F. Kenedy, León, León
Salomón de la Selva, León, León

EQUIPO DE DIAGRAMACIÓN

Lissette Margina Serrano Vallecillo • Maribel del Socorro Cuarezma López

Primera Edición, 2019

Cooperación Técnica de Japón a través de la Agencia de Cooperación Internacional del Japón (JICA)

La presente publicación ha sido reproducida con el apoyo de la Agencia de Cooperación Internacional del Japón (JICA) a través del Proyecto para el Aprendizaje Amigable de Matemática en Educación Secundaria (NICAMATE).

PRESENTACIÓN

Estimado estudiante:

El texto que tienes en tus manos es un esfuerzo realizado en el marco del **"Proyecto para el Aprendizaje Amigable de Matemática en Educación Secundaria" (NICAMATE)**, implementado por el Ministerio de Educación en coordinación con la UNAN – MANAGUA, UNAN – LEÓN, y el apoyo técnico de la Agencia de Cooperación Internacional del Japón (JICA).

La matemática es una herramienta potente en el desarrollo de cada una de nuestras vidas; nos ayuda a resolver problemas complejos con mayor facilidad, a contar con un razonamiento matemático capaz de ser crítico, analítico y práctico. En definitiva, a vivir con éxito, en un mundo cada vez más desafiante ante los cambios sociales y los avances tecnológicos.

Cada contenido de este libro, es abordado de manera que resulta fácil de comprender, y con el apoyo de tu docente lograrás adquirir conceptos y procedimientos matemáticos, necesarios para el desarrollo de conocimientos y habilidades que favorecen tu formación integral.

Tenemos la certeza que tu encuentro con estos saberes será muy satisfactorio, ya que este libro ha sido elaborado por un equipo altamente calificado que nos plantea una metodología amigable, retadora y exigente, con el propósito de que los conocimientos matemáticos te enriquezcan, sean mejor entendidos y puedan integrarse en tus quehaceres cotidianos con mayor facilidad.

Mucho ánimo ya que contamos contigo para desarrollar una mejor Nicaragua.

Atentamente,

Ministra de Educación
Miriam Soledad Raudez

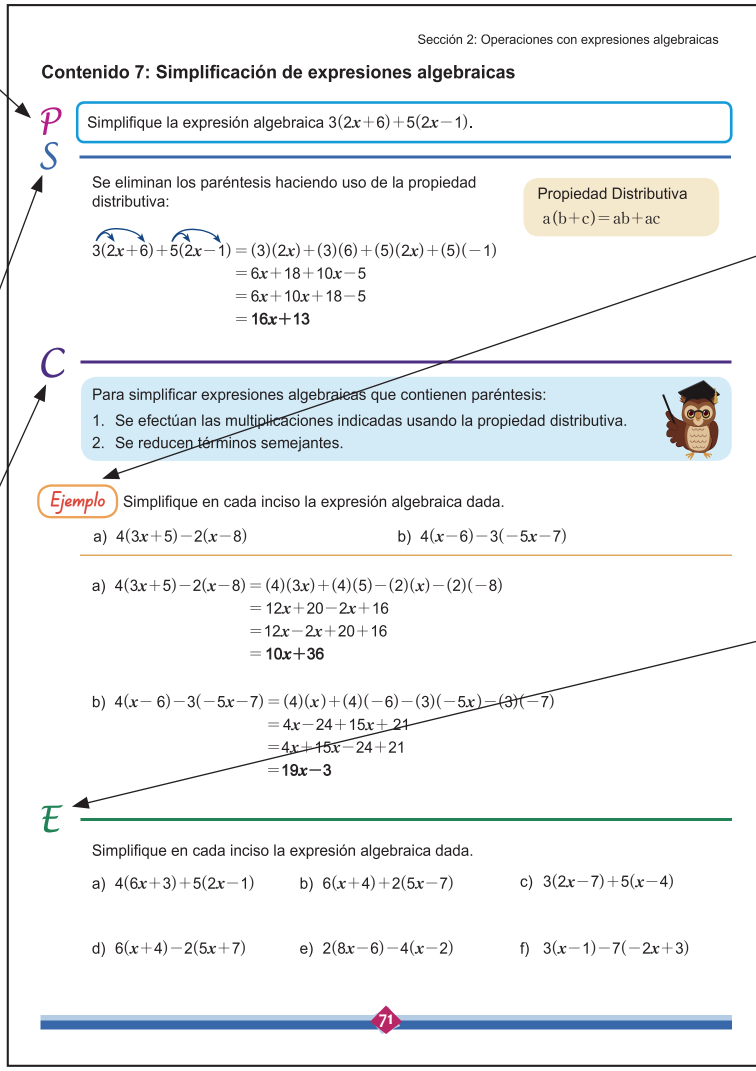
INTRODUCCIÓN

En cada página del libro de texto se presentan los momentos de una clase de 45 minutos:

P Representa el problema inicial, el cual se debe leer y analizar identificando las condiciones que plantea y lo que se pregunta.

S Representa la solución del problema inicial explicada paso a paso.

C Representa la conclusión de la clase, donde se propone el esquema de solución del problema inicial, en algunos casos también se presentan conceptos importantes usados en el problema.


Sección 2: Operaciones con expresiones algebraicas

Contenido 7: Simplificación de expresiones algebraicas

P

Simplifique la expresión algebraica $3(2x+6)+5(2x-1)$.

S

Se eliminan los paréntesis haciendo uso de la propiedad distributiva:

Propiedad Distributiva
$a(b+c)=ab+ac$

$$\begin{aligned} 3(2x+6)+5(2x-1) &= (3)(2x)+(3)(6)+(5)(2x)+(5)(-1)\\ &= 6x+18+10x-5\\ &= 6x+10x+18-5\\ &= \mathbf{16x+13} \end{aligned}$$

C

Para simplificar expresiones algebraicas que contienen paréntesis:
1. Se efectúan las multiplicaciones indicadas usando la propiedad distributiva.
2. Se reducen términos semejantes.

Ejemplo Simplifique en cada inciso la expresión algebraica dada.

a) $4(3x+5)-2(x-8)$ b) $4(x-6)-3(-5x-7)$

a) $$\begin{aligned} 4(3x+5)-2(x-8) &= (4)(3x)+(4)(5)-(2)(x)-(2)(-8)\\ &= 12x+20-2x+16\\ &= 12x-2x+20+16\\ &= \mathbf{10x+36} \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 4(x-6)-3(-5x-7) &= (4)(x)+(4)(-6)-(3)(-5x)-(3)(-7)\\ &= 4x-24+15x+21\\ &= 4x+15x-24+21\\ &= \mathbf{19x-3} \end{aligned}$$

E

Simplifique en cada inciso la expresión algebraica dada.

a) $4(6x+3)+5(2x-1)$ b) $6(x+4)+2(5x-7)$ c) $3(2x-7)+5(x-4)$

d) $6(x+4)-2(5x+7)$ e) $2(8x-6)-4(x-2)$ f) $3(x-1)-7(-2x+3)$

71

Ejemplo Los ejemplos que se presentan son variantes del problema inicial.

E Representa los ejercicios propuestos, es importante que intenten resolver los ejercicios por ustedes mismos.

En **Comprobemos lo aprendido** se presentan una serie de ejercicios representativos de contenidos anteriores, el objetivo de estas clases es asegurar un tiempo de ejercitación que permita afianzar los conocimientos adquiridos y aclarar cualquier duda que puedan tener de los contenidos estudiados.

En **Desafío** se presentan casos especiales o contenidos de mayor complejidad.

Índice

Unidad 1

Operaciones con Números Naturales, Fracciones y Decimales

Sección 1: Operaciones con números naturales

Contenido 1: Adición de números naturales

P

Efectúe las siguientes adiciones:

a) $13+45$

b) $29+54$

S

Se ubican los números de forma vertical alineando las unidades (U) y las decenas (D).

a)

$$\begin{array}{ccc} & D & U \\ & & \\ & 1 & 3 \\ + & 4 & 5 \\ \hline & & 8 \end{array}$$

Se suman las unidades: $3+5=8$.

$$\begin{array}{ccc} & D & U \\ & & \\ & 1 & 3 \\ + & 4 & 5 \\ \hline & 5 & 8 \end{array}$$

Se suman las decenas: $1+4=5$.

Por lo tanto, $13+45=$ **58**

b)

$$\begin{array}{ccc} & D & U \\ & \mathbf{1} & \\ & 2 & 9 \\ + & 5 & 4 \\ \hline & & 3 \end{array}$$

Se suman las unidades: $9+4=13$

Como $13>9$, se lleva el 1 a la columna D.

$$\begin{array}{ccc} & D & U \\ & 1 & \\ & 2 & 9 \\ + & 5 & 4 \\ \hline & 8 & 3 \end{array}$$

Se suman las decenas: $1+2+5=8$.

Por lo tanto, $29+54=$ **83**

E

1. Efectúe las siguientes adiciones:

a) $6+2$ b) $8+9$ c) $11+7$ d) $36+5$ e) $20+35$

f) $47+13$ g) $33+18$ h) $49+79$ i) $123+356$ j) $386+251$

2. Resuelva los siguientes problemas planteando en cada caso la operación adecuada.

a) Juan tiene 24 córdobas y María tiene 45 córdobas. ¿Cuántos córdobas tienen entre los dos?

b) En una granja hay 12 gallinas, luego llevan 19 gallinas. ¿Cuántas gallinas hay en la granja ahora?

Contenido 2: Sustracción de números naturales

P

Efectúe las siguientes sustracciones:

a) $47-35$ b) $73-45$

S

Se ubican los números de forma vertical alineando las unidades (U) y las decenas (D).

a)

$$\begin{array}{rcc} & D & U \\ & 4 & 7 \\ - & 3 & 5 \\ \hline & & 2 \end{array}$$

Como $7>5$, se restan las unidades: $7-5=2$.

$$\begin{array}{rcc} & D & U \\ & 4 & 7 \\ - & 3 & 5 \\ \hline & 1 & 2 \end{array}$$

Como $4>3$, se restan las decenas: $4-3=1$.

Por lo tanto, $47-35=$ **12**

b)

$$\begin{array}{rcc} & D & U \\ & \mathbf{6} & \\ & \cancel{7} & 3 \\ - & 4 & 5 \\ \hline & & 8 \end{array}$$

Como $3<5$, se presta una decena (10 unidades) para obtener $10+3=13$. Luego, $13-5=8$.

$$\begin{array}{rcc} & D & U \\ & 6 & \\ & \cancel{7} & 3 \\ - & 4 & 5 \\ \hline & 2 & 8 \end{array}$$

Como $6>4$, se restan las decenas: $6-4=2$.

Por lo tanto, $73-45=$ **28**

E

1. Efectúe las siguientes sustracciones:

a) $9-7$ b) $35-2$ c) $11-4$ d) $63-50$ e) $49-18$

f) $31-16$ g) $47-28$ h) $40-23$ i) $389-45$ j) $232-150$

2. Resuelva los siguientes problemas planteando en cada caso la operación adecuada.

a) En una venta hay 52 mangos maduros y 10 verdes. ¿Cuántos mangos maduros hay más que verdes?

b) En un estante de la biblioteca de una escuela hay 47 libros. Si se prestan 29 de estos, ¿cuántos libros quedaron en el estante?

Contenido 3: Multiplicación de números naturales

P

Efectúe las siguientes multiplicaciones:
a) 12×3 b) 43×6 c) 32×18

S

Se ubican los números de forma vertical alineando las unidades (U), las decenas (D) y las centenas (C).

a)

$$\begin{array}{rrr} C & D & U \\ & 1 & 2 \\ \times & & 3 \\ \hline & & 6 \end{array}$$

Se multiplican las unidades: $3\times 2=6$

$$\begin{array}{rrr} C & D & U \\ & 1 & 2 \\ \times & & 3 \\ \hline & 3 & 6 \end{array}$$

Se multiplican las decenas: $3\times 1=3$

Por lo tanto, $12\times 3=$ **36**

b)

$$\begin{array}{rrr} C & D & U \\ & 4 & 3 \\ \times & & 6 \\ \hline & {}^{1} & 8 \end{array}$$

Se multiplican las unidades: $6\times 3=18$. Como $18>9$. Se ubica el 8 en la columna U y se lleva el 1 a la columna D.

$$\begin{array}{rrr} C & D & U \\ & 4 & 3 \\ \times & & 6 \\ \hline 2 & \overset{1}{5} & 8 \end{array}$$

Se multiplica 6 por 4, es decir $6\times 4=24$ y se suma el 1 que se llevó: $24+1=25$.

Por lo tanto, $43\times 6=$ **258**

c)

$$\begin{array}{rrr} C & D & U \\ & 3 & 2 \\ \times & 1 & 8 \\ \hline 2 & 5 & 6 \end{array}$$

Se multiplica 8 por 32, es decir $8\times 32=256$

$$\begin{array}{rrr} C & D & U \\ & 3 & 2 \\ \times & 1 & 8 \\ \hline 2 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & \end{array}$$

Se multiplica 1 por 32, es decir $1\times 32=32$ y este se coloca debajo de 256 hacia la izquierda .

$$\begin{array}{rrr} C & D & U \\ & 3 & 2 \\ \times & 1 & 8 \\ \hline 2 & 5 & 6 \\ +\,3 & 2 & \\ \hline 5 & 7 & 6 \end{array}$$

Se efectúa la suma indicada.

Por lo tanto, $32\times 18=$ **576**

E

1. Efectúe las siguientes multiplicaciones:

a) 10×5 b) 14×2 c) 21×6 d) 25×3 e) 16×4

f) 19×6 g) 129×2 h) 11×18 i) 27×31 j) 37×45

2. Resuelva los siguientes problemas planteando en cada caso la operación adecuada.

a) Un obrero acarrea 4 sacos de maíz en una hora. ¿Cuántos sacos acarrea en 12 horas?

b) Si la capacidad máxima de un bus es 74 pasajeros, ¿cuál sería la capacidad máxima de 6 buses iguales?

Actividad

Copie en su cuaderno la siguiente tabla y realice lo que se le indica.

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1									
2									
3				12					
4									
5									
6									
7									
8									
9									

Llene la tabla multiplicando cada número rojo, de la primera columna de la izquierda por cada número negro, de la primera fila de la parte superior y escriba el resultado en el cuadrito donde se interceptan la columna y la fila que se toman.

Por ejemplo, si se multiplica el 3 de la primera columna por el 4 de la primera fila resulta

$$3 \times 4 = 12$$

Contenido 4: División de números naturales

P

Efectúe las siguientes divisiones:

a) $12 \div 4$ b) $25 \div 6$ c) $72 \div 4$

Términos de la división:

$$\begin{array}{rl} \text{dividendo} \leftarrow 8 & \underline{\lfloor 3} \rightarrow \text{divisor} \\ \underline{-\ 6} & 2 \rightarrow \text{cociente} \\ 2 \rightarrow & \text{residuo} \end{array}$$

S

a) $12 \div 4 = \square$

¿Qué número multiplicado por 4 da 12?

$4 \times 1 = 4$
$4 \times 2 = 8$
$\mathbf{4 \times 3 = 12}$

Por lo tanto, $12 \div 4 = \mathbf{3}$, siendo este el cociente y 0 el residuo.

b) $25 \div 6 = \square$

¿Qué número multiplicado por 6 da 25?

$6 \times 1 = 6$
$6 \times 2 = 12$
$6 \times 3 = 18$
$6 \times 4 = 24$
$6 \times 5 = 30$ Se pasa de 25

Por lo tanto, al efectuar $25 \div 6$ **el cociente es 4 y el residuo es 1**.

c)

$$\begin{array}{rr|l} 7 & 2 & 4 \\ \hline & & \mathbf{1} \end{array}$$

Se encuentra el cociente de $7 \div 4$.

$$\begin{array}{rr|l} 7 & 2 & 4 \\ \hline \mathbf{-4} & & 1 \\ \hline 3 & 2 & \end{array}$$

Se multiplica 4×1 y el resultado se resta al 7. Luego, se baja el 2 y se coloca al lado del 3.

$$\begin{array}{rr|l} 7 & 2 & 4 \\ \hline -4 & & 1\,\mathbf{8} \\ \hline 3 & 2 & \end{array}$$

Se encuentra el cociente de $32 \div 4$.

$$\begin{array}{rr|l} 7 & 2 & 4 \\ \hline -4 & & 1\,8 \\ \hline 3 & 2 & \\ \mathbf{-3} & \mathbf{2} & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

Se multiplica 4×8 y el resultado se resta al 32. El resultado es 0.

Por lo tanto, al efectuar $72 \div 4$ **el cociente es 18 y el residuo es 0**.

E

1. Efectúe las siguientes divisiones:

a) $8 \div 2$ b) $45 \div 5$ c) $56 \div 7$ d) $22 \div 3$ e) $70 \div 8$

f) $39 \div 9$ g) $90 \div 6$ h) $38 \div 2$ i) $59 \div 3$ j) $85 \div 4$

2. Resuelva el siguiente problema planteando la operación adecuada.

María compró 48 flores para repartirlas equitativamente en 3 floreros. ¿Cuántas flores se colocarán en cada florero?

Contenido 5: Operaciones combinadas

P

Efectúe las siguientes operaciones:

a) $20-5\times4\div2$ b) $7-6\div(4-2)$

S

a) $20-5\times4\div2=20-20\div2$ Se efectúa 5×4

$=20-10$ Se efectúa $20\div2$

$=\mathbf{10}$

b) $7-6\div(4-2)=7-6\div2$ Se efectúa $4-2$

$=7-3$ Se efectúa $6\div2$

$=\mathbf{4}$

Orden de prioridad de las operaciones

1. Las que están en paréntesis.
2. Las multiplicaciones y divisiones de izquierda a derecha.
3. Las sumas y restas de izquierda a derecha.

E

1. Efectúe las siguientes operaciones:

a) $12+8\div2$ b) $35-4\times3$ c) $3\div(9-6)$

d) $5\times(3+4)$ e) $12-2\times(6-3)$ f) $8+36\div(9-5)$

2. Resuelva el siguiente problema planteando la operación adecuada.

   En un tanque que contiene 45 litros de agua se conecta una manguera que agrega 9 litros por minuto, ¿cuántos litros de agua habrá en el tanque después de 7 minutos?

Sección 2: Operaciones con fracciones y decimales

Contenido 1: Mínimo común múltiplo (m.c.m.)

P

a) Escriba los múltiplos de 2 y 3 que sean menores o iguales que 30.

b) Utilice los resultados de a) para encontrar los múltiplos comunes de 2 y 3 menores o iguales que 30. ¿Cuál de ellos es el menor?

S

a) Múltiplos de 2: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30

Múltiplos de 3: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30

b) Los múltiplos comunes de 2 y 3 menores o iguales que 30 son 6, 12, 18, 24 y 30. Dentro de estos, 6 es el menor múltiplo común.

C

El menor de los múltiplos comunes de dos números se llama **mínimo común múltiplo** (m.c.m.) de estos números.

Ejemplo Encuentre el m.c.m. de 9 y 12.

Forma 1

Múltiplos de 9: 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, …

Múltiplos de 12: 12, 24, 36, 48, 60, 72, …

Por lo tanto, el m.c.m. de 9 y 12 es **36**.

Forma 2

$$\begin{array}{cc|c} 9 & 12 & 3 \\ \hline 3 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ & 2 & 2 \\ & 1 & \end{array}$$

$$3 \times 3 \times 2 \times 2 = 36$$

1. Se divide por factores primos comunes y luego en no comunes.
2. Se efectúan divisiones sucesivas hasta obtener cociente 1.

Por lo tanto, el m.c.m. de 9 y 12 es **36**.

E

Encuentre el mínimo común múltiplo de cada pareja de números, por cualquiera de las formas.

a) 2 y 5 b) 2 y 7 c) 4 y 6 d) 5 y 15

e) 7 y 12 f) 8 y 12 g) 7 y 21 h) 10 y 12

Contenido 2: Adición y sustracción de fracciones

P_1

Efectúe las siguientes operaciones:

a) $\frac{4}{5}+\frac{3}{5}$ b) $\frac{7}{5}-\frac{3}{5}$

$\frac{3}{5}$ ←Numerador ←Denominador

S_1

a) $\frac{4}{5}+\frac{3}{5}=\frac{4+3}{5}$

$=\frac{7}{5}$

Se suman los numeradores 4 y 3 y se mantiene el denominador 5.

b) $\frac{7}{5}-\frac{3}{5}=\frac{7-3}{5}$

$=\frac{4}{5}$

Se restan los numeradores 7 y 3 y se mantiene el denominador 5.

E_1

Efectúe las siguientes operaciones:

a) $\frac{5}{3}+\frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}$ c) $\frac{3}{11}+\frac{2}{11}$ d) $\frac{7}{3}-\frac{6}{3}$ e) $\frac{4}{7}-\frac{2}{7}$ f) $\frac{7}{9}-\frac{2}{9}$

P_2

Efectúe las siguientes operaciones:

a) $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}$ b) $\frac{3}{4}-\frac{1}{8}$

S_2

a) $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=\frac{5}{15}+\frac{6}{15}$

$=\frac{5+6}{15}$

$=\mathbf{\frac{11}{15}}$

Se convierten las fracciones $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{5}$ en otras fracciones equivalentes con un mismo denominador utilizando el m.c.m de 3 y 5 que es 15.

Se suman los numeradores 5 y 6 y se mantiene el denominador 15.

$\frac{1}{3}\underset{\times 5}{\overset{\times 5}{=}}\frac{5}{15}$ $\frac{2}{5}\underset{\times 3}{\overset{\times 3}{=}}\frac{6}{15}$

b) $\frac{3}{4}-\frac{1}{8}=\frac{6}{8}-\frac{1}{8}$

$=\frac{6-1}{8}$

$=\mathbf{\frac{5}{8}}$

Se convierten las fracciones $\frac{3}{4}$ y $\frac{1}{8}$ en otras fracciones equivalentes con un mismo denominador utilizando el m.c.m de 4 y 8 que es 8.

Se restan los numeradores 6 y 1 y se escribe el denominador 8.

$\frac{3}{4}\underset{\times 2}{\overset{\times 2}{=}}\frac{6}{8}$

E_2

Realice las siguientes adiciones y sustracciones de fracciones:

a) $\frac{3}{2}+\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ c) $\frac{2}{5}+\frac{2}{7}$ d) $\frac{2}{3}-\frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{3}-\frac{1}{7}$ f) $\frac{5}{6}-\frac{2}{9}$

Contenido 3: Multiplicación de fracciones

P_1

Efectúe la multiplicación $3 \times \frac{5}{7}$.

S_1

$$3 \times \frac{5}{7} = \frac{3 \times 5}{7}$$
$$= \mathbf{\frac{15}{7}}$$

Se multiplica 3 por 5 para obtener el numerador 15 y se escribe el mismo denominador 7.

C_1

Para multiplicar un número natural por una fracción se multiplica el natural por el numerador de la fracción y se escribe el denominador.

E_1

Efectúe las siguientes multiplicaciones y simplifique el resultado.

a) $2 \times \frac{3}{7}$ b) $4 \times \frac{2}{9}$ c) $3 \times \frac{3}{10}$ d) $2 \times \frac{5}{6}$ e) $12 \times \frac{1}{8}$

P_2

Efectúe la multiplicación $\frac{10}{7} \times \frac{3}{5}$.

S_2

$$\frac{10}{7} \times \frac{3}{5} = \frac{\overset{2}{\cancel{10}} \times 3}{7 \times \underset{1}{\cancel{5}}}$$
$$= \mathbf{\frac{6}{7}}$$

Se simplifica el producto indicado de los numeradores 10 y 3 y denominadores 7 y 5.

C_2

Para multiplicar fracciones:

1. Se indica el producto del numerador y denominador para obtener el numerador y denominador resultante.
2. Se simplifica de ser posible y luego se efectúan los productos resultantes.

E_2

Efectúe las siguientes multiplicaciones de fracciones y simplifique el resultado.

a) $\frac{1}{7} \times \frac{2}{5}$ b) $\frac{2}{3} \times \frac{4}{7}$ c) $\frac{5}{8} \times \frac{1}{5}$ d) $\frac{1}{2} \times \frac{4}{7}$ e) $\frac{3}{10} \times \frac{2}{9}$

Contenido 4: División de fracciones

P_1

Efectúe la división $\frac{3}{5} \div 4$.

S_1

$$\frac{3}{5} \div 4 = \frac{3}{5 \times 4}$$

Se multiplica 4 por 5, cuyo resultado 20 es el nuevo denominador y se mantiene el numerador.

$$= \mathbf{\frac{3}{20}}$$

C_1

Para dividir una fracción por un número natural se multiplica el natural por el denominador de la fracción y se mantiene el numerador.

E_1

Efectúe las siguientes divisiones y simplifique el resultado.

a) $\frac{2}{5} \div 3$ b) $\frac{1}{3} \div 3$ c) $\frac{4}{7} \div 2$ d) $\frac{6}{5} \div 4$ e) $\frac{5}{6} \div 10$

P_2

Efectúe la división $\frac{5}{4} \div \frac{3}{8}$.

S_2

$$\frac{5}{4} \div \frac{3}{8} = \frac{5}{4} \times \frac{8}{3}$$

Se cambia la división por la multiplicación invirtiendo el divisor $\frac{3}{8}$

$$= \frac{5 \times \cancel{8}^{2}}{\cancel{4}_{1} \times 3}$$

Si es posible, se simplifican numeradores y denominadores .

$$= \mathbf{\frac{10}{3}}$$

Se efectúan las operaciones indicadas en el numerador y denominador.

C_2

Para dividir fracciones:

1. Se cambia la división por una multiplicación invirtiendo la fracción divisor.
2. Se realizan los pasos de la multiplicación de fracciones.

E_2

Efectúe las siguientes divisiones de fracciones y simplifique el resultado.

a) $\frac{1}{2} \div \frac{3}{5}$ b) $\frac{2}{3} \div \frac{3}{4}$ c) $\frac{1}{5} \div \frac{7}{10}$ d) $\frac{2}{7} \div \frac{8}{21}$ e) $\frac{5}{4} \div \frac{15}{8}$

Contenido 5: Adición y sustracción de decimales

P

Efectúe las siguientes operaciones:

a) 1,3+3,5 b) 6,3−2,4

unidad ← 1, 2 3 → centésimas
↓
décimas

S

a)
$$\begin{array}{r} 1,3 \\ +\ 3,5 \\ \hline 4,8 \end{array}$$

Se alinean los números, haciendo corresponder en columna las unidades 1 y 3 y las décimas 3 y 5. Luego se suman.

Por lo tanto, 1,3+3,5 = **4,8**

b)
$$\begin{array}{r} \overset{5}{\cancel{6}},3 \\ -\ 2,4 \\ \hline 3,9 \end{array}$$

Se alinean los números, haciendo corresponder en columna las unidades 6 y 2 y las décimas 3 y 4. Luego se restan.

Por lo tanto, 6,3−2,4 = **3,9**

C

Para sumar o restar números con una cifra decimal se ubican los números haciendo coincidir en una misma columna las unidades y las décimas y después se suman o se restan.

E1

Efectúe las siguientes operaciones con decimales:

a) 1,3+3,1 b) 2,8+6,3 c) 3,4−2,1 d) 7,5−1,9

Ejemplo

Efectúe las siguientes operaciones:

a) 1,35+3,56 b) 7,38−2,43

a)
$$\begin{array}{r} 1,3\ 5 \\ +\ 3,5\ 6 \\ \hline 4,9\ 1 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} 7,3\ 8 \\ -\ 2,4\ 3 \\ \hline 4,9\ 5 \end{array}$$

Por lo tanto, 1,35+3,56 = **4,91**

Por lo tanto, 7,38−2,43 = **4,95**

E2

1. Efectúe las siguientes operaciones con decimales.

a) 3,64+2,15 b) 5,17+4,54 c) 4,38−2,13 d) 5,36−4,19

2. Resuelva los siguientes problemas planteando en cada caso la operación adecuada.

a) Doña María compra en una pulpería una galleta en C$5,50 y una golosina en C$3,25. ¿Cuánto gasta doña María en la compra?

b) En un recipiente hay 3,52 kg de azúcar. Si se usa 2,34 kg para endulzar refrescos. ¿Cuántos kg de azúcar quedan en el recipiente?

Contenido 6: Multiplicación de decimales

$\mathcal{P}_1$

Efectúe la multiplicación: $3{,}2 \times 3$.

$\mathcal{S}_1$

$$\begin{array}{r l}
3,2 & \leftarrow \text{1 cifra decimal} \\
\times \quad 3 & \\
\hline
9,6 & \leftarrow \text{1 cifra decimal}
\end{array}$$

Por lo tanto, $3{,}2 \times 3 = \mathbf{9{,}6}$

$\mathcal{C}_1$

Para multiplicar un número con una cifra decimal por un natural de una cifra :

1. Se multiplican los dos números como naturales.
2. Se coloca la coma en el resultado de manera que haya una cifra decimal.

$\mathcal{E}_1$

Efectúe las siguientes multiplicaciones:

a) $2{,}4 \times 3$ b) $1{,}8 \times 4$ c) $3{,}5 \times 6$

$\mathcal{P}_2$

Efectúe la multiplicación: $3{,}2 \times 2{,}3$.

$\mathcal{S}_2$

$$\begin{array}{r l}
3,2 & \leftarrow \text{1 cifra decimal} \\
\times \quad 2,3 & \leftarrow \text{1 cifra decimal} \\
\hline
9\ 6 & \\
+\ 6,4 & \\
\hline
7,3\ 6 & \leftarrow \text{2 cifras decimales}
\end{array}$$

Por lo tanto, $3{,}2 \times 2{,}3 = \mathbf{7{,}36}$

El resultado debe tener tantas cifras decimales como los dos factores juntos.

$\mathcal{C}_2$

Para multiplicar dos números con una cifra decimal cada uno:

1. Se multiplican los dos números como naturales.
2. Se coloca la coma en el resultado de manera que haya dos cifras decimales.

$\mathcal{E}_2$

1. Efectúe las siguientes multiplicaciones:

   a) $1{,}3 \times 2{,}2$ b) $1{,}5 \times 1{,}4$ c) $3{,}7 \times 2{,}9$

2. Resuelva el siguiente problema planteando la operación adecuada.

   Si $1\,m$ de alambre pesa $2{,}3\,g$, ¿cuánto pesan $2{,}2\,m$ de alambre?

Contenido 7: División de un decimal por un natural

P_1

Efectúe la división: $7{,}2 \div 4$.

S_1

$$\begin{array}{r|l} 7{,}2 & 4 \\ \cline{2-2} -4 & 1{,}8 \\ \cline{1-1} 3\,2 & \\ -3\,2 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Se divide 72 entre 4. El cociente tiene el mismo número de decimales del dividendo.

Por lo tanto, $72 \div 4 =$ **1,8**

C_1

Para dividir un decimal por un natural de una cifra:

1. Se hace la división normal como si el dividendo y el divisor fuesen naturales.
2. Se escribe una coma en el cociente cuando se baja la siguiente cifra a la coma decimal.

E_1

Efectúe las siguientes divisiones:

a) $8{,}4 \div 2$ b) $5{,}1 \div 3$ c) $7{,}8 \div 6$

P_2

Efectúe la división: $2{,}4 \div 3$.

S_2

$$\begin{array}{r|l} 2{,}4 & 3 \\ \cline{2-2} -0 & 0{,}8 \\ \cline{1-1} 2\,4 & \\ -2\,4 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Como 2 es menor que 3, se escribe el 0 en el cociente y se divide $24 \div 3$. El cociente tiene la misma cantidad de decimales del dividendo.

Por lo tanto, $2{,}4 \div 3 =$ **0,8**

C_2

Para dividir un decimal por un número natural de una cifra que sea mayor:

1. Se escribe 0 en el cociente y se coloca la coma decimal.
2. Se efectúa la división como si el dividendo fuera un número natural.

E_2

Efectúe las siguientes divisiones:

a) $2{,}7 \div 3$ b) $4{,}5 \div 5$ c) $8{,}1 \div 9$

Unidad 2

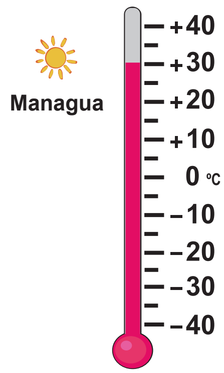
Números Positivos y Negativos

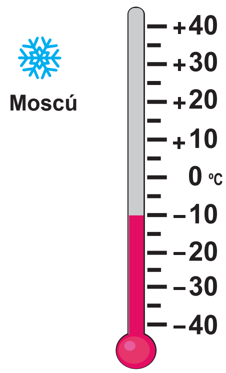
Sección 1: Los números positivos, negativos y el cero

Contenido 1: Concepto de números positivos y negativos

P

Observe los termómetros donde se muestra la temperatura de Managua y Moscú (Rusia) en un día de enero. ¿Cómo se leen las temperaturas marcadas en los termómetros?





El termómetro es un instrumento que mide la temperatura.

El grado Celsius (°C) es una unidad de medida para la temperatura.

S

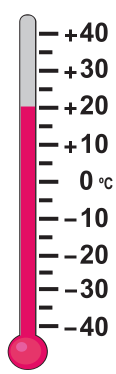
- ✓ La temperatura de Managua es de **+30°C**, se lee "**más 30 grados centígrados**", o simplemente "**30 grados centígrados**".
- ✓ La temperatura de Moscú es de **−10°C**, se lee "**menos 10 grados centígrados**" o "**10 grados bajo cero**".

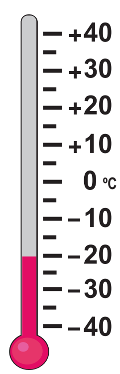
C

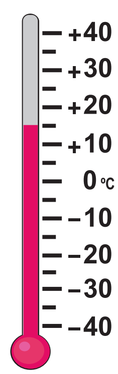
Para medir temperaturas se cuenta a partir de 0°. Las temperaturas arriba de 0 representan números como $+30$ (se lee "más 30"), y las temperaturas bajo 0 representan números como -10 (se lee "menos 10"). Los números $+30$, $+15$, $+7$ con el signo $+$ de primero, se llaman **números positivos**, mientras -10, -3, -28 con el signo $-$ de primero se denominan **números negativos**.

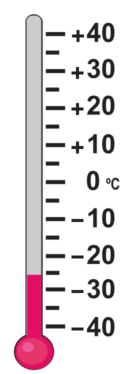
E₁

1. Escriba las temperaturas que señalan los termómetros con números positivos o negativos.

a) 

b) 

c) 

d) 

2. Exprese las siguientes temperaturas con números positivos o negativos:

a) 26°C arriba de cero

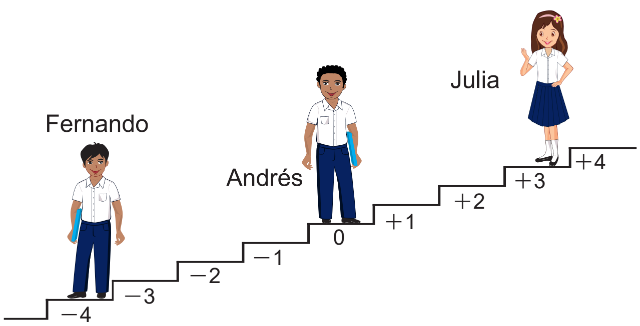
b) 14°C bajo cero

c) 8°C bajo cero

d) 35°C arriba de cero

Ejemplo

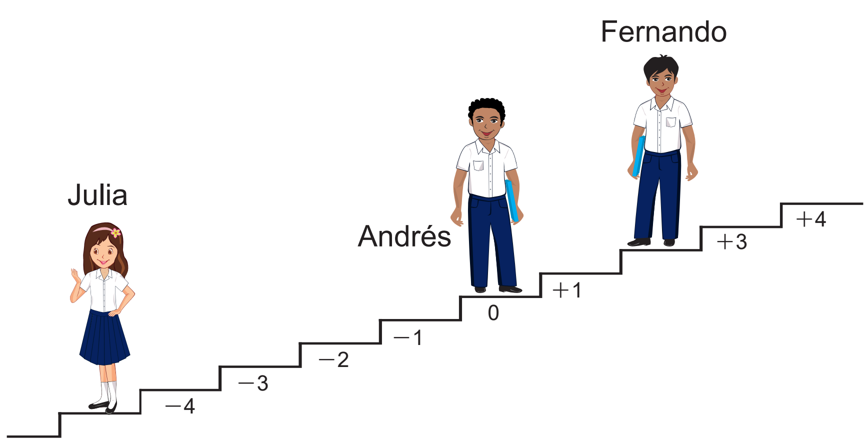
Los números positivos y negativos se pueden utilizar para indicar posiciones respecto a un punto de referencia. Observe la siguiente figura y responda: ¿Qué número corresponde al escalón de Andrés?¿Qué significa que los escalones de Julia y Fernando sean $+3$ y -4 respectivamente?



- ✓ El escalón donde se encuentra Andrés está indicado con 0.
- ✓ Julia está 3 escalones arriba de donde está Andrés.
- ✓ Fernando está 4 escalones debajo de donde está Andrés.

$\mathcal{E}_2$

Escriba el número positivo o negativo que corresponde al escalón donde se encuentra Fernando y Julia respecto a la posición de Andrés.



Contenido 2: Números enteros positivos y negativos

P

Escriba el número positivo o negativo que representa cada una de las siguientes situaciones:

a) Carlos ganó C$25 en la kermés del colegio.
b) Marcia debe C$30.
c) Sobran 20 botellas de jugo.
d) Faltan 12 libros en la biblioteca de una escuela.

S

a) La ganancia de Carlos se expresa con el número positivo **+25**.
b) La deuda de Marcia se simboliza con el número negativo **−30**.
c) La cantidad de botellas sobrantes de jugo se registra con el número positivo **+20**.
d) El número de libros faltantes en la biblioteca de la escuela corresponde al número negativo **−12**.

C

Los números +1, +2, +3,… se llaman **números naturales o enteros positivos**, y −1, −2, −3,… se llaman **números enteros negativos**.

$$\text{Números enteros} \left\{ \begin{array}{l} \text{Números enteros positivos} \\ \text{Cero} \\ \text{Números enteros negativos} \end{array} \right.$$

Los números enteros negativos se utilizan para representar pérdidas, deudas, disminución, etc; en cambio los enteros positivos representan excesos, ganancias, aumento, etc.

Los números enteros positivos se pueden escribir sin el signo +. Por ejemplo, +3=3.

E

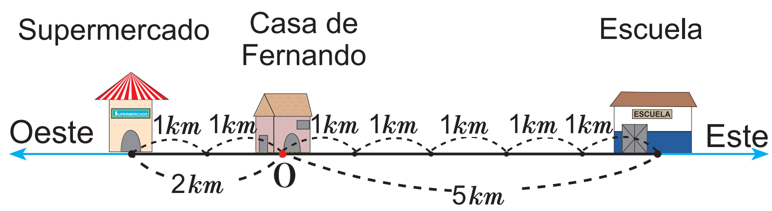
La tabla siguiente presenta la matricula inicial y final de estudiantes de 7mo a 11mo grado de un colegio de secundaria. Complete el resto de la tabla con la información proporcionada.

Grado	Matrícula inicial	Matrícula final	Variación	Número
7mo	120	100	Disminuyó 20	−20
8vo	90	97	Aumentó 7	+7
9no	85	95		
10mo	75	60		
11mo	72	70		

Contenido 3: La recta numérica

P

Una escuela se encuentra a $5km$ al este de la casa de Fernando, que será el punto de referencia 0, y un supermercado esta a $2km$ al este de 0. Si convenimos en que las posiciones al este de 0 se representan con $+$ y al oeste con $-$, exprese con un entero positivo o negativo la posición del supermercado y la escuela con respecto a la casa de Fernando.



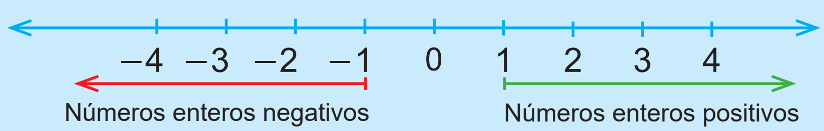
S

- ✓ La posición de la escuela es $5km$ al este del punto de referencia y se expresa con $+$**5**.
- ✓ Como la posición del supermercado es $2km$ al oeste respecto del punto de referencia 0, esta se expresa con $-$**2**.

C

Los números enteros se pueden representar en una recta llamada **recta numérica**.

La **recta numérica** es una recta dotada de un punto de referencia llamado **origen** que le corresponde al número cero, una distribución de marcas a la derecha de este donde se ubican los números positivos y otra a la izquierda donde se ubican los números negativos.



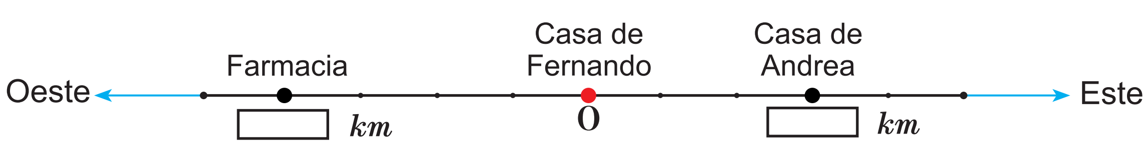
E

La casa de Andrea se encuentra a $3km$ al este de la casa de Fernando, que representa el punto 0, y una farmacia se sitúa a $4km$ al oeste de 0.

a) Escriba el número positivo o negativo que indique la posición de la casa de Andrea y la farmacia con respecto a la casa de Fernando.

b) Ubique en la recta un punto que represente una pulpería que se encuentra a $1km$ al oeste de la casa de Fernando y escriba el número correspondiente con el signo $+$ o $-$.

c) Ubique otro punto que represente una casa que se encuentra a $2km$ al este de la casa de Fernando y escriba el número correspondiente.



Contenido 4: Ubicación de números en la recta numérica

P

Ubique los siguientes números en la recta numérica:

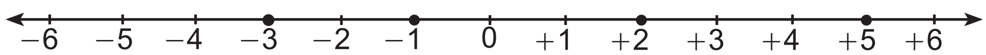
a) 2 y 5 b) -1 y -3

S

a) Los números 2 y 5 se ubican en la recta numérica contando dos y cinco unidades a la derecha del origen.

b) Los números -1 y -3 se ubican recorriendo una y tres unidades a la izquierda del origen.

En la recta de abajo se resume lo dicho en a) y b).



C

Cada número puede ser localizado en exactamente un punto de la recta numérica.

La recta numérica es un recurso geométrico que sirve para representar los números negativos, el cero y los números positivos.

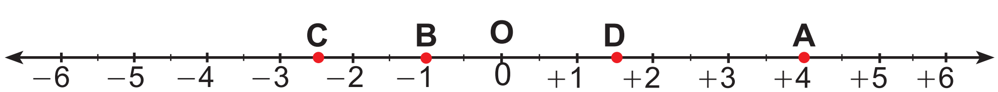
Ejemplo

Ubique los siguientes números en la recta numérica:

A. 4 B. -1 C. $-2{,}5$ D. $\frac{3}{2}$

Se traza la recta numérica con **O** como punto de referencia, colocando 4 a la derecha y -1 a la izquierda de **O**.

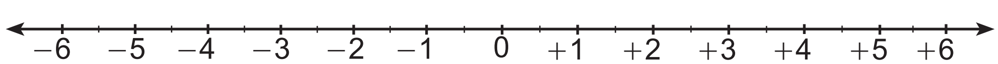
Para ubicar $-2{,}5$ se cuentan dos unidades y media a la izquierda de **O**; igualmente, como $\frac{3}{2} = 1{,}5$ se cuenta una unidad y media a la derecha de **O**.



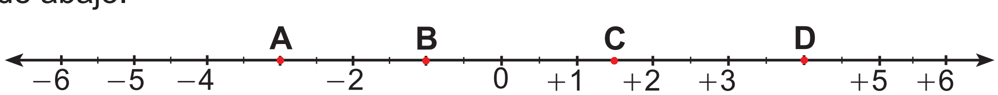
E

1. Ubique los siguientes números en la recta numérica:

A. 2 B. -4 C. 1,5 D. 3,5 E. $-\frac{5}{2}$



2. Escriba el número que corresponde a cada uno de los puntos señalados A, B, C y D de la recta de abajo.



Contenido 5: Valor absoluto de números positivos y negativos. Números opuestos

P

En la recta numérica:

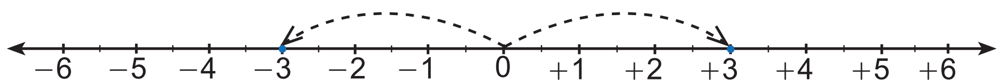
a) Calcule la distancia que hay del 0 al $+3$.

b) Calcule la distancia que hay del 0 al -3.

S

a) La distancia del 0 al $+3$ se calcula contando las unidades que separan a cero de $+3$, esto es, 3 unidades.

b) La distancia del 0 al -3 se calcula contando las unidades que separan a 0 de -3. Se observa en la gráfica que hay 3 unidades.



La distancia de 0 al $+3$ se llama valor absoluto de $+3$, y la distancia entre 0 y -3 es el valor absoluto de -3. Como la distancia del 0 al $+3$ es el mismo número de unidades que separan a 0 de -3, entonces $+3$ y -3 se llaman números opuestos.

C

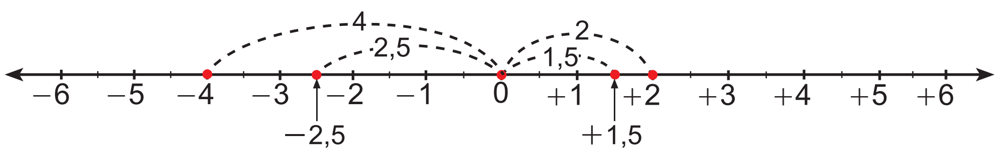
Se llama **valor absoluto** de un número a la distancia que hay en la recta numérica entre el origen y dicho número. El valor absoluto de un número es positivo o cero y se representa escribiendo el número dentro de $|\ \ |$. Por ejemplo, $|+3|=3$ y $|-3|=3$.

Los números que están a la misma distancia del origen se llaman **números opuestos**.

Ejemplo Encuentre el valor absoluto de los siguientes números:

a) $+2$ b) -4 c) $+1,5$ d) $-2,5$

Como el valor absoluto de un número es la distancia de este al cero, entonces:



a) $|+2|=$ **2**

b) $|-4|=$ **4**

c) $|+1,5|=$ **1,5**

d) $|-2,5|=$ **2,5**

Observe que $|0|=0$

E

1. Encuentre el valor absoluto de los siguientes números:

a) $+6$ b) $+5$ c) -1 d) $+2,5$ e) -5 f) $-\frac{1}{2}$

2. Complete el espacio en blanco con el número que corresponda.

a) $|+1|=$ ____ b) $|-9|=$ ____ c) |___| $=7$

d) -8 es el opuesto de _____ e) ____ es el opuesto de $+12$

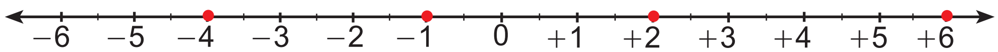
Contenido 6: Relación de orden en los números enteros positivos y negativos

P

a) Ubique $+2$ y $+6$ en la recta numérica. ¿Cuál de los dos números está a la derecha del otro?

b) Ubique -1 y -4 en la recta numérica. ¿Cuál de los dos números está a la derecha del otro?

S



a) Se puede ver en la recta numérica que $+6$ está a la derecha de $+2$. Se dice entonces que $+6$ es mayor que $+2$, y se escribe $\mathbf{+6>+2}$. También se escribe $\mathbf{+2<+6}$ y se lee $+2$ es menor que $+6$.

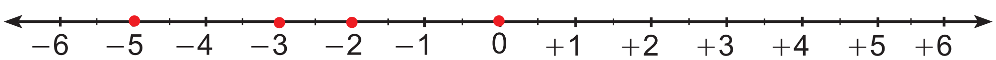
b) -1 está a la derecha de -4 en la recta numérica. Se dice entonces que -1 es mayor que -4 y se escribe $\mathbf{-1>-4}$. También se puede escribir $\mathbf{-4<-1}$, y se dice que -4 es menor que -1.

C

Se dice que un número es mayor que otro si al ubicarlos en la recta numérica el primero se encuentra a la derecha del segundo. De otra forma, un número es menor que otro si el primero está a la izquierda del segundo.

Ejemplo 1 Complete el espacio en blanco con $<$ o $>$ según corresponda.

a) -3 ____ 0 b) -5 ____ -2



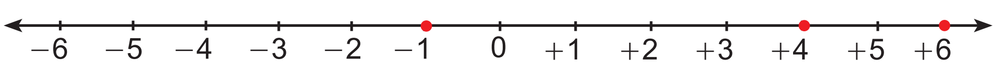
a) En la recta numérica se observa que un número negativo es menor que 0. Entonces, $\mathbf{-3<0}$.

b) -5 está a la izquierda de -2, por lo cual, $\mathbf{-5<-2}$.

Un número negativo es menor que cero, cero es menor que un número positivo, y un número negativo es menor que un positivo.

Ejemplo 2 Ordene de menor a mayor los siguientes números: $+6$, $+4$, -1

Se dibuja la recta numérica y se ubican los números dados.



Se observa que $-1<+4$, $+4<+6$ y $-1<+6$, lo que permite escribir:
$-1<+4<+6$ se lee "-1 es menor que $+4$, y $+4$ es menor que $+6$".

E

1. Escriba en el espacio vacío $<$ o $>$ según corresponda.

a) $+3$ ___ $+6$ b) -5 ___ $+7$ c) -4 ___ -9 d) 0 ___ $+8$ e) -3 ___ $+2$ ___ $+5$

2. Ordene de menor a mayor los siguientes números:

a) $+7$, $+3$, -6 b) $+4$, -1, -9 c) $+5$, -8, $+2$ d) -3, $+7$, $+1$, -4

Contenido 7: Relación de orden en las fracciones positivas y negativas

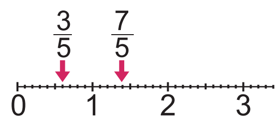
P

Escriba $<$ o $>$ en el espacio en blanco según corresponda.

a) $\frac{3}{5}\,\underline{\hspace{1cm}}\,\frac{7}{5}$ b) $-\frac{4}{3}\,\underline{\hspace{1cm}}\,-\frac{5}{2}$

S

a) Se convierten las fracciones a decimales, obteniendo $\frac{3}{5} = 0{,}6$ y $\frac{7}{5} = 1{,}4$. Al ubicar estos números en la recta numérica se tiene la figura de la izquierda. Como $\frac{3}{5}$ está a la izquierda de $\frac{7}{5}$, entonces $\mathbf{\frac{3}{5} < \frac{7}{5}}$.

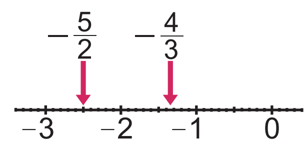


b) Se convierten a fracciones equivalentes con el mismo denominador.

$-\frac{4}{3} = -\frac{4\times 2}{3\times 2} = -\frac{8}{6}$ $-\frac{5}{2} = -\frac{5\times 3}{2\times 3} = -\frac{15}{6}$

En el inciso anterior se observó que es mayor la fracción que tiene mayor numerador. Como $-8 > -15$, entonces $-\frac{8}{6} > -\frac{15}{6}$.

En consecuencia, $\mathbf{-\frac{4}{3} > -\frac{5}{2}}$.



C

- ✓ Si dos fracciones tienen el mismo denominador, es mayor la que tenga mayor numerador.
- ✓ Si dos fracciones tienen distinto denominador, se convierten a fracciones con el mismo denominador y luego se comparan los numeradores.

Ejemplo

Escriba $<$ o $>$ en el espacio en blanco según corresponda.

a) $\frac{5}{3}\,\underline{\hspace{1cm}}\,-\frac{1}{6}$ b) $-\frac{3}{8}\,\underline{\hspace{1cm}}\,\frac{9}{2}$

a) Un número positivo es mayor que un negativo: $\mathbf{\frac{5}{3} > -\frac{1}{6}}$.

b) Un número negativo es menor que un positivo: $\mathbf{-\frac{3}{8} < \frac{9}{2}}$.

E

Complete el espacio en blanco con $<$ o $>$ según corresponda.

a) $\frac{2}{7}\,\underline{\hspace{1cm}}\,\frac{5}{7}$ b) $-\frac{3}{4}\,\underline{\hspace{1cm}}\,-\frac{7}{4}$ c) $\frac{7}{10}\,\underline{\hspace{1cm}}\,\frac{3}{10}$ d) $-\frac{3}{5}\,\underline{\hspace{1cm}}\,-\frac{9}{5}$

e) $\frac{2}{5}\,\underline{\hspace{1cm}}\,\frac{4}{3}$ f) $-\frac{1}{2}\,\underline{\hspace{1cm}}\,-\frac{3}{5}$ g) $-\frac{5}{9}\,\underline{\hspace{1cm}}\,\frac{3}{8}$ h) $\frac{1}{3}\,\underline{\hspace{1cm}}\,-\frac{2}{7}$

Contenido 8: Comprobemos lo aprendido 1

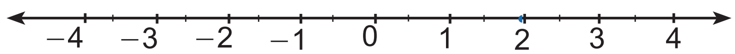
1. Escriba en cada inciso el número entero positivo o negativo que representa cada una de las siguientes situaciones:

El nivel del mar corresponde al punto de referencia 0.

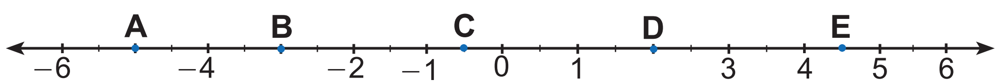
	Número
a) Un pez se encuentra a 50 m bajo el nivel del mar.	
b) Sobran 12 lb de arroz.	
c) Carlos perdió 3 lapiceros.	
d) Mariana ganó C$ 150 en la kermés de su escuela.	

2. Ubique los siguientes números en la recta numérica:

a) $-1{,}5$ b) -3 c) 3 d) $\frac{1}{2}$



3. Escriba el número que corresponde a cada uno de los puntos A, B, C, D y E de la recta numérica.



4. Escriba en cada espacio en blanco un número positivo o negativo que cumpla la igualdad.

a) $|-3| =$ ____ b) $|6| =$ ____

c) $|-8| =$ ____ d) $|\_\_| = 9$

e) $|\_\_| = 1$ f) $|\_\_| = 7$

5. Compare los números de cada inciso completando los espacios en blanco.

a) 7, 2 2 < 7 b) $-1, -3$ ___ > ___

c) $5, -9$ ___ < ___ d) $8, -1, -5$ ___ < ___ < ___

e) $-4, 6, 0$ ___ < ___ < ___ f) $3, -2, -7$ ___ > ___ > ___

6. Ordene de menor a mayor los siguientes números:

a) $5, -1, 0$ b) $2, -4, -1$ c) $3, -8, 0$

7. Ordene de mayor a menor los siguientes números:

a) $-1, 9, -7$ b) $4, -6, 1, -9$

Sección 2: Adición y sustracción con números positivos y negativos

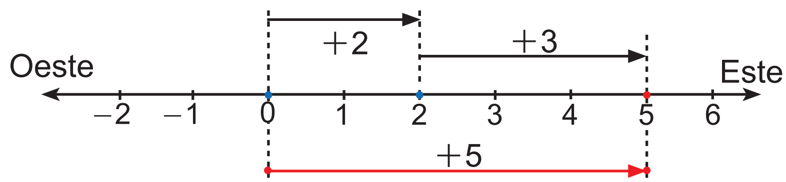
Contenido 1: Adición de dos números positivos o dos negativos

P_1

Carolina sale de su casa, camina $2km$ hacia el este, descansa un poco y avanza $3km$ más hacia el este. ¿Cuál es la posición actual de Carolina con respecto a su casa?

S_1

La casa de Carolina se toma como punto de referencia:



Primero avanza $2km$ al este, es decir $+2$; luego avanza $3km$ en la misma dirección, esto es $+3$.

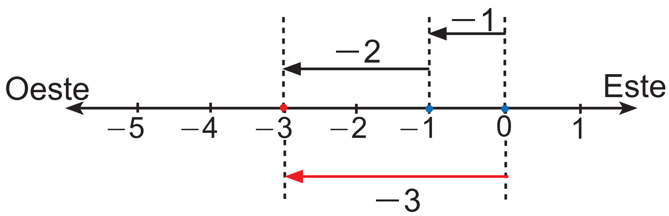
Carolina está a **$5km$ al este de su casa**.

$(+2)+(+3)=+(2+3)=+5$.

P_2

Guillermo sale en bicicleta de su casa, recorre $1km$ hacia el oeste, descansa un poco y camina otros $2km$ hacia el oeste. ¿Cuál es su posición actual con respecto a su casa?

S_2



El primer avance es $1km$ al oeste, es decir -1; el segundo avance en la misma dirección es $2km$, esto es -2.

Guillermo está a **$3km$ al oeste de su casa**.

$(-1)+(-2)=-(1+2)=-3$.

C

Al sumar dos números del mismo signo:
1. Se conserva el signo.
2. Se suman los valores absolutos de los números.

Ejemplo Efectúe las siguientes sumas indicadas sin utilizar la recta numérica:

a) $(+4)+(+2)$ b) $(-3)+(-5)$

Mismo signo Sumar

a) $(+4)+(+2)=+(4+2)$
$=+6$

$|+4|=4$
$|+2|=2$

Mismo signo Sumar

b) $(-3)+(-5)=-(3+5)$
$=-8$

$|-3|=3$
$|-5|=5$

E

Efectúe las siguientes sumas:

a) $(-7)+(-2)$ b) $(-3)+(-6)$ c) $(-4)+(-5)$

d) $(+5)+(+12)$ e) $(-13)+(-4)$ f) $(+11)+(+6)$

g) $(-12)+(-15)$ h) $(+11)+(+17)$ i) $(-24)+(-10)$

Contenido 2: Adición de números con signos diferentes

P

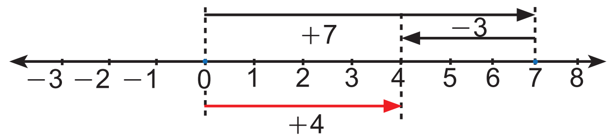
Utilice la recta numérica para efectuar las sumas indicadas:

a) $(+7)+(-3)$ b) $(+2)+(-5)$

S

a) Para sumar $+7$ y -3 se avanza desde el origen 7 unidades a la derecha y luego se retrocede 3 unidades. El resultado es el número que corresponde al punto alcanzado en la recta. Por lo tanto $(+7)+(-3)=+4$.

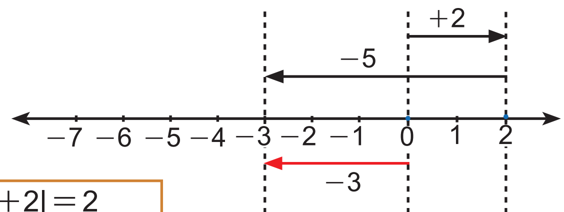
Observe que $(+7)+(-3)=+(7-3)=+4$.



$|+7|=7$
$|-3|=3$
$|+7|>|-3|$

b) Para sumar $+2$ y -5 se recorre desde el origen 2 unidades a la derecha y luego se retrocede 5 unidades. El resultado es el número que corresponde al punto alcanzado en la recta. Luego $(+2)+(-5)=-3$.

Observe que $(+2)+(-5)=-(5-2)=-3$.



$|+2|=2$
$|-5|=5$
$|-5|>|+2|$

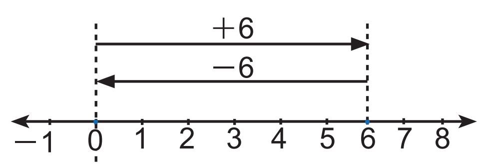
C

Al sumar dos números con signos diferentes:
1. Se conserva el signo del número con mayor valor absoluto.
2. De los valores absolutos, al mayor se le resta el menor.

Si ambos números tienen igual valor absoluto y signos diferentes, su suma es igual a cero.

Ejemplo Efectúe la suma indicada $(+6)+(-6)$.

Con auxilio de la recta numérica, se recorre 6 unidades a la derecha del origen y luego se retrocede el mismo número de unidades, hasta regresar al origen.
Es decir $(+6)+(-6)=0$.
Se dice que $+6$ y -6 son **números opuestos**.



E

Efectúe las siguientes sumas:

a) $(+6)+(-5)$ b) $(+7)+(-4)$ c) $(+9)+(-9)$

d) $(+5)+(-8)$ e) $(-9)+(+3)$ f) $(-3)+(+8)$

g) $(-11)+(+11)$ h) $(+2)+(-14)$ i) $(-6)+(+18)$

Contenido 3: Propiedad conmutativa y asociativa de la adición

P_1

Compare el resultado de $(+2)+(-9)$ y $(-9)+(+2)$.

S_1

Se desarrollan ambas expresiones por separado:

$$\begin{aligned}(+2)+(-9) &= -(9-2)\\ &= -7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(-9)+(+2) &= -(9-2)\\ &= -7\end{aligned}$$

$$\mathbf{(+2)+(-9)=(-9)+(+2)}$$

Se observa que el orden de los sumandos no altera el resultado final.

P_2

Compare el resultado de $[(+5)+(-8)]+(+8)$ y $(+5)+[(-8)+(+8)]$.

S_2

Se desarrollan ambas expresiones por separado:

$$\begin{aligned}[(+5)+(-8)]+(+8) &= [-(8-5)]+(+8)\\ &= (-3)+(+8)\\ &= +(8-3)\\ &= +5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(+5)+[(-8)+(+8)] &= (+5)+0\\ &= +5\end{aligned}$$

Se ha encontrado que el resultado es el mismo:

$$\mathbf{[(+5)+(-8)]+(+8)=(+5)+[(-8)+(+8)]}$$

Se observa que dados los sumandos $+5$, -8 y $+8$ no importa el orden en el que se sumen, el resultado es el mismo.

C

Propiedad conmutativa de la adición

La suma de dos números a y b no resulta afectada si se hace en orden diferente, es decir

$$a+b=b+a$$

Propiedad asociativa de la adición

La suma de tres números a, b, c no se afecta si se suman dos cualesquiera de ellos y el resultado se suma al número restante, es decir

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

E

Efectúe las siguientes sumas utilizando la propiedad asociativa de la adición:

a) $(+8)+(-7)+(+7)$

b) $(+6)+(-3)+(+3)$

c) $(+9)+(-15)+(+5)$

d) $(-13)+(+8)+(-5)$

e) $(-14)+(+16)+(+4)$

f) $(-27)+(-18)+(+27)$

Contenido 4: Sustracción de números positivos y negativos con sustraendo positivo

P1 Efectúe la resta $(+7)-(+3)$.

S1

Como $(+7)-(+3)=7-3$, entonces

$$\begin{aligned}(+7)-(+3)&=7-3\\&=4\end{aligned}$$

Por tanto, $(+7)-(+3)=\mathbf{4}$.

$\underbrace{(+7)}_{\text{Minuendo}}-\underbrace{(+3)}_{\text{Sustraendo}}=7-3$

P2 Compare el resultado anterior con el de $(+7)+(-3)$.

S2

Como $(+7)+(-3)$ es una suma de números con signos diferentes, resulta que:

Signo del número con mayor valor absoluto

Restar

$$\begin{aligned}(+7)+(-3)&=+(7-3)\\&=+4\end{aligned}$$

El resultado es el mismo, entonces $\mathbf{(+7)-(+3)=(+7)+(-3)}$.

C

Para restar un número positivo de otro número cualquiera se escribe el minuendo, el signo $+$ y luego el sustraendo con el signo cambiado, efectuando finalmente la suma indicada.

Ejemplo Efectúe la sustracción indicada $(-8)-(+2)$.

$$\begin{aligned}(-8)-(+2)&=(-8)+(-2)\\&=-(8+2)\\&=\mathbf{-10}\end{aligned}$$

Se aplica la conclusión anterior

E

Efectúe las siguientes sustracciones:

a) $(+2)-(+5)$	b) $(+9)-(+2)$	c) $(-6)-(+4)$
d) $(-3)-(+8)$	e) $(-4)-(+7)$	f) $(-16)-(+3)$
g) $(+19)-(+7)$	h) $(+1)-(+18)$	i) $(+2)-(+15)$

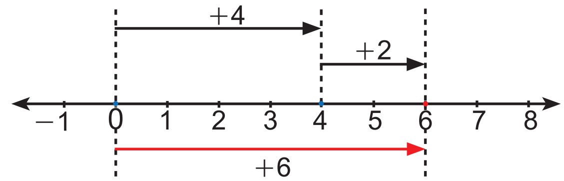
Contenido 5: Sustracción de números positivos y negativos con sustraendo negativo

P1 Utilice la recta numérica para efectuar $(+4)-(-2)$.

S1

Para efectuar esta resta en la recta numérica, recuerde que sumar -2 significa retroceder dos unidades, así que restar -2 es avanzar dos unidades.

Así para restar -2 de $+4$, se avanza 4 unidades a partir del origen, y luego avanza dos unidades, como se muestra en la figura.

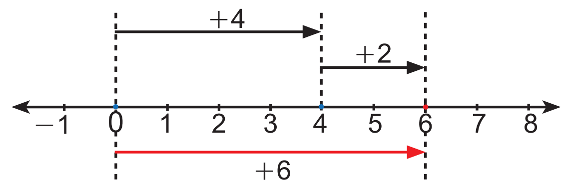


Por tanto, $(+4)-(-2)=\mathbf{+6}$.

P2 Compare el resultado anterior con $(+4)+(+2)$.

S2

Haciendo uso de las ilustraciones de la derecha se tiene que $(+4)+(+2)=+6$, y también en la solución del problema anterior se encontró que $(+4)-(-2)=+6$.



En consecuencia, $\mathbf{(+4)-(-2)=(+4)+(+2)}$.

Mismo signo   Sumar

$$(+4)+(+2)=+(4+2)$$
$$=+6$$

C

Para restar un número negativo de otro número cualquiera se escribe el minuendo, el signo $+$ y luego el sustraendo con el signo cambiado, efectuando finalmente la suma indicada.

Ejemplo ¿Cuál es el resultado de $(-7)-(-5)$?

Se aplica la conclusión anterior.

$$(-7)-(-5)=(-7)+(+5)$$
$$=-(7-5)$$
$$=\mathbf{-2}$$

$|-7|=7$
$|+5|=5$
$|-7|>|+5|$

Otra manera

$(-7)-(-5)=-7+5=-2$

E

Efectúe las siguientes sustracciones:

a) $(+5)-(-4)$ b) $(+9)-(-7)$ c) $(-6)-(-2)$

d) $(-7)-(-1)$ e) $(-3)-(-8)$ f) $(-5)-(-9)$

g) $(+19)-(-2)$ h) $(-15)-(-4)$ i) $(-3)-(-16)$

Contenido 6: Adición y sustracción con el cero

P_1

Efectúe las siguientes operaciones:

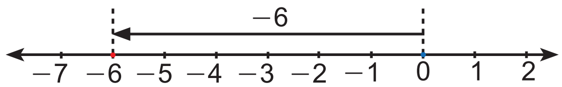
a) $(-6)+0$ b) $0+(-4)$ c) $(-2)-0$

$3+0=3$
$0+3=3$
$3-0=3$

S_1

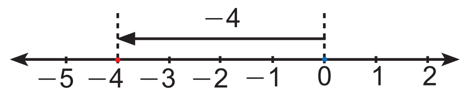
Como el cero indica que no hay desplazamiento, en la gráfica de cada inciso solo se muestra la flecha que indica el desplazamiento que corresponde al otro número, esto es:

a) Del origen se desplaza 6 unidades hacia la izquierda.



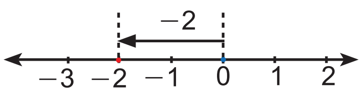
$(-6)+0=\mathbf{-6}$

b) Del origen se desplaza 4 unidades hacia la izquierda.



$0+(-4)=\mathbf{-4}$

c) Del origen se desplaza 2 unidades hacia la izquierda.



$(-2)-0=\mathbf{-2}$

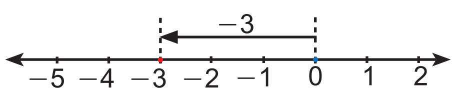
P_2

Efectúe las siguientes sustracciones:

a) $0-(+3)$ b) $0-(-5)$

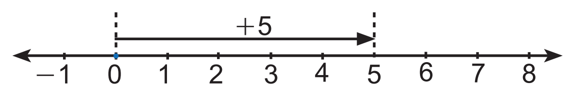
S_2

a)



$$\begin{aligned} 0-(+3) &= 0+(-3) \\ &= -(3-0) \\ &= \mathbf{-3} \end{aligned}$$

b)



$$\begin{aligned} 0-(-5) &= 0+(+5) \\ &= +(0+5) \\ &= \mathbf{+5} \end{aligned}$$

Se observa que al restar 3 y -5 de 0 resulta -3 y $+5$, es decir los opuestos de 3 y -5.

C

Al sumar o restar 0 a un número cualquiera el resultado es el mismo número.
Al restar un número cualquiera al 0 sólo se cambia el signo al número.

E

Efectúe las siguientes operaciones:

a) $(-8)+0$ b) $0+(-9)$ c) $(+7)+0$

d) $0-(+9)$ e) $0-(-7)$ f) $0-(-19)$

g) $(+15)-0$ h) $(-5)-0$ i) $(-17)-0$

Contenido 7: Adición y sustracción combinadas (1)

P

Efectúe las operaciones en la expresión $(+5)-(+7)+(-3)-(-9)$.

S

$$
\begin{aligned}
(+5)-(+7)+(-3)-(-9) &= (+5)+(-7)+(-3)+(+9) && \text{Se convierten las restas en sumas}\\
&= (+5)+(+9)+(-7)+(-3) && \text{Se usa la conmutatividad de la suma}\\
&= \quad (+14) \quad + \quad (-10) && \text{Se efectúan las sumas } (+5)+(+9) \text{ y } (-7)+(-3)\\
&= \quad +(14-10)\\
&= \quad +4\\
&= \quad \mathbf{4} && \text{Se omite el signo}
\end{aligned}
$$

Por tanto, $(+5)-(+7)+(-3)-(-9)=\mathbf{4}$.

C

Para calcular el resultado de expresiones con sumas y restas en paréntesis:
1. Se convierte las restas a sumas.
2. Se suman por separado los números positivos y negativos.
3. Se efectúa la operación resultante.

E₁

Efectúe las siguientes operaciones:

a) $(+4)-(+7)+(-1)-(-3)$

b) $(+8)-(-5)+(-3)-(+7)$

c) $(-2)-(+6)+(-4)-(+3)$

Ejemplo Efectúe las operaciones $(-18)+(+5)-(-3)$.

$$
\begin{aligned}
(-18)+(+5)-(-3) &= (-18)+(+5)+(+3)\\
&= (-18)+(+8)\\
&= -(18-8)\\
&= \mathbf{-10}
\end{aligned}
$$

E₂

Efectúe las siguientes operaciones:

a) $(-10)+(+2)-(-7)$

b) $(+5)+(-3)-(-9)$

c) $(+12)-(-3)+(-8)$

Contenido 8: Adición y sustracción combinada (2)

P

Efectúe las operaciones en $5-9-3+4$.

S

La expresión dada tiene sumas y restas combinadas, sin paréntesis. Para calcular su valor se agrupan los números de acuerdo a su signo:

$$\begin{aligned} 5-9-3+4 &= 5+4-9-3 \\ &= \;\;9\;-\;12 \\ &= \mathbf{-3} \end{aligned}$$

Se agrupan números positivos 5 y 4, y los negativos -9 y -3

Se efectúan $5+4$ y $-9-3$

C

Para calcular el resultado de expresiones con sumas y restas indicadas sin paréntesis:

1. Se agrupan los números positivos y negativos.
2. Se suman por separado.
3. Se efectúa la última suma o resta indicada.

E₁

Efectúe las siguientes operaciones:

a) $3-8+2-9$ b) $-2+4+8-5$ c) $-6+9-4+7$

Ejemplo Efectúe las operaciones en $6-9+5$.

$$\begin{aligned} 6-9+5 &= 6+5-9 \\ &= 11-9 \\ &= \mathbf{2} \end{aligned}$$

Se agrupan los términos positivos

Se efectúa la suma $6+5$

Se efectúa la sustracción $11-9$

E₂

Efectúe las siguientes operaciones:

a) $7-9+3$ b) $-8+3-6$ c) $-5+7-2$

Contenido 9: Adición de decimales

P

Efectúe las siguientes sumas:

a) $(-3,1)+(-6,2)$

b) $(+7,9)+(-2,5)$

c) $(+3,7)+(-18,6)$

$-19,$	3
parte entera	parte decimal

S

a) Para efectuar esta suma, se escribe el signo común $-$ y la suma de los valores absolutos de los números.

$$(-3,1)+(-6,2)=-(3,1+6,2)$$
$$=\mathbf{-9,3}$$

$$\begin{array}{r} 3,1 \\ +\ 6,2 \\ \hline 9,3 \end{array}$$

b) Como $|+7,9|=7,9$, $|-2,5|=2,5$ y $|+7,9|>|-2,5|$, se escribe el signo $+$ seguido de $7,9-2,5$.

$$(+7,9)+(-2,5)=+(7,9-2,5)$$
$$=\mathbf{+5,4}$$

$$\begin{array}{r} 7,9 \\ -\ 2,5 \\ \hline 5,4 \end{array}$$

c) Como $|+3,7|=3,7$, $|-18,6|=18,6$ y $|-18,6|>|+3,7|$, se escribe el signo $-$ seguido de $18,6-3,7$.

$$(+3,7)+(-18,6)=-(18,6-3,7)$$
$$=\mathbf{-14,9}$$

$$\begin{array}{r} 1\,{}^{7}\cancel{8},{}^{1}6 \\ -\quad 3,7 \\ \hline 14,9 \end{array}$$

C

Para sumar números decimales se toma en cuenta los signos y luego se suman o restan los valores absolutos de los sumandos.

E

Efectúe las siguientes sumas:

a) $(-1,6)+(-4,2)$

b) $(+5,9)+(-2,3)$

c) $(-8,4)+(+7,1)$

d) $(-2,5)+(+9,8)$

e) $(+12,4)+(+5,1)$

f) $(-3,7)+(-0,5)$

g) $-2,7+5,9$

h) $-7,2+3,5$

i) $-2,9+6,1$

Contenido 10: Adición de fracciones

P

Efectúe las siguientes sumas:

a) $\left(-\frac{1}{5}\right)+\left(-\frac{3}{5}\right)$ b) $\left(-\frac{5}{3}\right)+\left(+\frac{7}{3}\right)$ c) $\left(+\frac{5}{4}\right)+\left(-\frac{2}{3}\right)$

S

a) Para efectuar la suma de $-\frac{1}{5}$ y $-\frac{3}{5}$ se antepone el signo $-$ a la suma de sus valores absolutos.

$$\left(-\frac{1}{5}\right)+\left(-\frac{3}{5}\right)=-\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{5}\right)$$
$$=-\left(\frac{1+3}{5}\right)$$
$$=-\mathbf{\frac{4}{5}}$$

b) Como $\left|-\frac{5}{3}\right|=\frac{5}{3}$, $\left|+\frac{7}{3}\right|=\frac{7}{3}$ y $\left|+\frac{7}{3}\right|>\left|-\frac{5}{3}\right|$ se escribe el signo $+$ seguido de $\frac{7}{3}-\frac{5}{3}$.

$$\left(-\frac{5}{3}\right)+\left(+\frac{7}{3}\right)=+\left(\frac{7}{3}-\frac{5}{3}\right)$$
$$=+\left(\frac{7-5}{3}\right)$$
$$=+\mathbf{\frac{2}{3}}$$

c) $\frac{5}{4}=\frac{5\times 3}{4\times 3}=\frac{15}{12}$

$\frac{2}{3}=\frac{2\times 4}{3\times 4}=\frac{8}{12}$

$+\frac{5}{4}=+\frac{15}{12}$ y $-\frac{2}{3}=-\frac{8}{12}$

así que para efectuar la suma se antepone el signo $+$ a la diferencia de los valores absolutos.

$$\left(+\frac{5}{4}\right)+\left(-\frac{2}{3}\right)=\left(+\frac{15}{12}\right)+\left(-\frac{8}{12}\right)$$
$$=+\left(\frac{15}{12}-\frac{8}{12}\right)$$
$$=+\left(\frac{15-8}{12}\right)$$
$$=+\mathbf{\frac{7}{12}}$$

C

Para sumar fracciones se toman en cuenta los signos y luego se suman o restan los valores absolutos de los sumandos.

E

Efectúe las siguientes sumas:

a) $\left(-\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{5}{3}\right)$ b) $\left(-\frac{7}{9}\right)+\left(+\frac{5}{9}\right)$ c) $\left(-\frac{4}{7}\right)+\left(+\frac{9}{7}\right)$

d) $\left(+\frac{5}{2}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)$ e) $\left(-\frac{8}{5}\right)+\left(+\frac{2}{3}\right)$ f) $\left(-\frac{3}{5}\right)+\left(+\frac{6}{5}\right)$

Contenido 11: Sustracción de decimales

P

Efectúa las siguientes sustracciones:

a) $(+3{,}9)-(+1{,}4)$ b) $(+7{,}5)-(-11{,}2)$ c) $(+2{,}7)-(+6{,}1)$

S

a) Se convierte la resta en una suma, y luego se efectúa la suma de números con signos diferentes.

$$\begin{aligned}(+3{,}9)-(+1{,}4)&=(+3{,}9)+(-1{,}4)\\&=+(3{,}9-1{,}4)\\&=\mathbf{2{,}5}\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{r}3{,}9\\-\ \ 1{,}4\\\hline 2{,}5\end{array}}$$

b) Como se está restando un negativo, la resta se transforma en una suma de números positivos.

$$\begin{aligned}(+7{,}5)-(-11{,}2)&=(+7{,}5)+(+11{,}2)\\&=+(7{,}5+11{,}2)\\&=\mathbf{18{,}7}\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{r}7{,}5\\+\ \ 11{,}2\\\hline 18{,}7\end{array}}$$

c) El cálculo es similar al inciso a).

$$\begin{aligned}(+2{,}7)-(+6{,}1)&=(+2{,}7)+(-6{,}1)\\&=-(6{,}1-2{,}7)\\&=-\mathbf{3{,}4}\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{r}{}^{5}\cancel{6},{}^{1}1\\-\ \ 2,\ 7\\\hline 3,\ 4\end{array}}$$

C

Para restar un número decimal de otro se convierte en una suma, cambiándole el signo al sustraendo, resultando una suma o diferencia que se efectúa normalmente.

E

Efectúe las siguientes sustracciones:

a) $(+8{,}5)-(+3{,}1)$ b) $(+6{,}8)-(-5{,}4)$ c) $(+4{,}1)-(+9{,}3)$

d) $(+1{,}7)-(-5{,}2)$ e) $(-7{,}9)-(-2{,}6)$ f) $(-1{,}4)-(-3{,}5)$

g) $(+9{,}6)-(+2{,}4)$ h) $(-3{,}9)-(+8{,}2)$ i) $(-6{,}5)-(-2{,}7)$

Contenido 12: Sustracción de fracciones

P

Efectúe las siguientes sustracciones:

a) $\left(-\frac{2}{7}\right)-\left(+\frac{6}{7}\right)$ b) $\left(+\frac{5}{3}\right)-\left(+\frac{4}{3}\right)$ c) $\left(-\frac{1}{4}\right)-\left(-\frac{2}{5}\right)$

S

a) Se convierte la resta en una suma, y luego se efectúa la suma de números con el mismo signo.

$$\begin{aligned}\left(-\frac{2}{7}\right)-\left(+\frac{6}{7}\right)&=\left(-\frac{2}{7}\right)+\left(-\frac{6}{7}\right)\\&=-\left(\frac{2}{7}+\frac{6}{7}\right)\\&=-\left(\frac{2+6}{7}\right)\\&=-\mathbf{\frac{8}{7}}\end{aligned}$$

b) La resta se convierte en una suma, y se efectúa la suma de números con diferentes signos, donde $\left|+\frac{5}{3}\right|>\left|-\frac{4}{3}\right|$.

$$\begin{aligned}\left(+\frac{5}{3}\right)-\left(+\frac{4}{3}\right)&=\left(+\frac{5}{3}\right)+\left(-\frac{4}{3}\right)\\&=+\left(\frac{5}{3}-\frac{4}{3}\right)\\&=+\left(\frac{5-4}{3}\right)\\&=\mathbf{\frac{1}{3}}\end{aligned}$$

c) Primero se transforma la resta en una suma, y como $-\frac{1}{4}=-\frac{5}{20}$ y $+\frac{2}{5}=+\frac{8}{20}$, para efectuar esta suma se antepone el signo $+$ a la diferencia de los valores absolutos.

$$\begin{aligned}\left(-\frac{1}{4}\right)-\left(-\frac{2}{5}\right)&=\left(-\frac{1}{4}\right)+\left(+\frac{2}{5}\right)\\&=\left(-\frac{5}{20}\right)+\left(+\frac{8}{20}\right)\\&=+\left(\frac{8}{20}-\frac{5}{20}\right)\\&=+\left(\frac{8-5}{20}\right)\\&=\mathbf{\frac{3}{20}}\end{aligned}$$

C

Para restar fracciones se toman en cuenta los signos y luego se suman o restan los valores absolutos de los sumandos.

E

Efectúe las siguientes sustracciones:

a) $\left(-\frac{1}{5}\right)-\left(+\frac{3}{5}\right)$ b) $\left(+\frac{5}{7}\right)-\left(+\frac{2}{7}\right)$ c) $\left(-\frac{8}{3}\right)-\left(-\frac{1}{3}\right)$

d) $\left(+\frac{5}{2}\right)-\left(-\frac{9}{4}\right)$ e) $\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(+\frac{4}{5}\right)$ f) $\left(-\frac{7}{2}\right)-\left(+\frac{5}{3}\right)$

Contenido 13: Comprobemos lo aprendido 2

E

1. Efectúe las siguientes operaciones:

a) $(-6)+(+4)$ b) $(+7)+(-9)$ c) $(-5)+(-2)$

d) $(+8)-(+3)$ e) $(-4)-(+7)$ f) $(+2)-(-6)$

g) $(+6)-(-13)$ h) $(-15)-(-19)$ i) $(-5{,}8)+(+9{,}2)$

j) $(-2{,}9)-(-8{,}5)$ k) $\left(+\frac{3}{7}\right)+\left(-\frac{9}{7}\right)$ l) $\left(+\frac{5}{2}\right)-\left(-\frac{7}{3}\right)$

2. Efectúe en cada inciso las siguientes operaciones indicadas:

a) $(+2)-(-7)-(+9)+(-5)$ b) $(-6)+(-9)-(-5)$

c) $16-7-14+7$ d) $8-12-(-4)$

Sección 3: Multiplicación y división con números positivos y negativos

Contenido 1: Multiplicación (1)

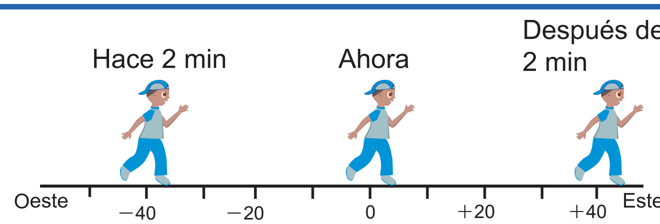
P

Ricardo se dirige hacia el este a 20 m por minuto. Sabiendo que en este momento se encuentra en el punto de referencia, complete la siguiente tabla:

Tiempo	Posición respecto al punto de referencia	velocidad $\times$ tiempo ➡ posición
Después de 2 min $(+2)$	40 m al este $(+40)$	$(+20)\times(+2)=$
Después de 1 min $(+1)$	20 m al este $(\quad)$	$(\quad)\times(\quad)=$
Ahora (0)	0 m $(\quad)$	$(\quad)\times(\quad)=$
Hace 1 min (-1)	20 m al oeste $(\quad)$	$(\quad)\times(\quad)=$
Hace 2 min (-2)	40 m al oeste $(\quad)$	$(\quad)\times(\quad)=$

S

Como se dirige al este a 20 m por minuto, $+20$ representa la velocidad. Luego, la tabla ya completada con la información solicitada es la siguiente:



Tiempo	Posición respecto al punto de referencia	velocidad $\times$ tiempo ➡ posición
Después de 2 min $(+2)$	40 m al este $(+40)$	$(+20)\times(+2)=+40$
Después de 1 min $(+1)$	20 m al este $(+20)$	$(+20)\times(+1)=+20$
Ahora (0)	0 m (0)	$(+20)\times 0=0$
Hace 1 min (-1)	20 m al oeste (-20)	$(+20)\times(-1)=-20$
Hace 2 min (-2)	40 m al oeste (-40)	$(+20)\times(-2)=-40$

C

Al multiplicar un número positivo por otro número:

1. Se determina el signo del producto de acuerdo al siguiente criterio:

$$(+)\times(+)\rightarrow(+),\ (+)\times(-)\rightarrow(-).$$

2. Se multiplican los valores absolutos de los números.

Ejemplo Efectúe las siguientes multiplicaciones:

a) $(+5)\times(+7)$ b) $(+6)\times(-8)$

a) $(+5)\times(+7)=+(5\times7)$
$=\mathbf{+35}$

b) $(+6)\times(-8)=-(6\times8)$
$=\mathbf{-48}$

E

Efectúe las siguientes multiplicaciones:

a) $(+3)\times(-5)$ b) $(+6)\times(-2)$ c) $(+4)\times(-9)$ d) $(+7)\times(-8)$

e) $(+9)\times(+6)$ f) $(+10)\times(-3)$ g) $(+2)\times(-11)$ h) $(+13)\times(-2)$

Contenido 2: Multiplicación (2)

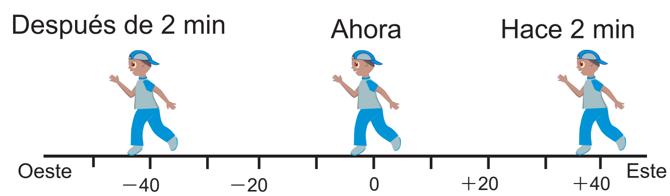
P

Ricardo se dirige hacia el oeste a 20 m por minuto. Sabiendo que en este momento se encuentra en el punto de referencia, complete la siguiente tabla:

Tiempo	Posición respecto al punto de referencia	velocidad × tiempo ➡ posición
Después de 2 min $(+2)$	40 m al oeste (-40)	$(-20) \times (+2) =$
Después de 1 min $(+1)$	20 m al oeste ( )	( ) × ( ) =
Ahora (0)	0 m ( )	( ) × ( ) =
Hace 1 min (-1)	20 m al este ( )	( ) × ( ) =
Hace 2 min (-2)	40 m al este ( )	( ) × ( ) =

S

Como se dirige al oeste a 20 m por minuto, -20 representa la velocidad. Luego, la tabla ya completada con la información solicitada es la siguiente:



Tiempo	Posición respecto al punto de referencia	velocidad × tiempo ➡ posición
Después de 2 min $(+2)$	40 m al oeste (-40)	$(-20) \times (+2) = -40$
Después de 1 min $(+1)$	20 m al oeste (-20)	$(-20) \times (+1) = -20$
Ahora (0)	0 m (0)	$(-20) \times 0 = 0$
Hace 1 min (-1)	20 m al este $(+20)$	$(-20) \times (-1) = +20$
Hace 2 min (-2)	40 m al este $(+40)$	$(-20) \times (-2) = +40$

C

Al multiplicar un número negativo por otro número:

1. Se determina el signo del producto de acuerdo con el siguiente criterio:
$$(-)\times(+)\to(-),\ (-)\times(-)\to(+)\,.$$
2. Se multiplica el valor absoluto de ambos números.

$(-20)\times(+2) = -(20\times 2) = -40$ $\qquad$ $(-20)\times(-1) = +(20\times 1) = +20$

Ejemplo

Efectúe las siguientes multiplicaciones:

a) $(-5)\times(+1)$ $\qquad$ b) $(-6)\times 0$ $\qquad$ c) $(-3)\times(-1)$

$$a\times 1 = 1\times a = a$$
$$a\times 0 = 0\times a = 0$$
$$a\times(-1) = (-1)\times a = a$$

a) $(-5)\times(+1) = -(5\times 1)$
$= \mathbf{-5}$

b) $(-6)\times 0 = \mathbf{0}$

c) $(-3)\times(-1) = +(3\times 1)$
$= \mathbf{3}$

E

Efectúe las siguientes multiplicaciones:

a) $(-3)\times(+8)$ $\qquad$ b) $(-9)\times(+5)$ $\qquad$ c) $(-4)\times(+6)$ $\qquad$ d) $(-7)\times(-2)$

e) $(+6)\times(-1)$ $\qquad$ f) $(-9)\times 0$ $\qquad$ g) $(-13)\times(+2)$ $\qquad$ h) $(-10)\times(+7)$

Contenido 3: Propiedad conmutativa y asociativa de la multiplicación

P_1

Compare el resultado de $7\times(-9)$ y $(-9)\times7$.

Observe que:
$7\times(-9)=(+7)\times(-9)$

S_1

Se desarrollan ambas expresiones por separado:

$$7\times(-9)=-(7\times9) \qquad (-9)\times7=-(9\times7)$$
$$=-63 \qquad\qquad =-63$$

$$\mathbf{7\times(-9)=(-9)\times7}$$

Se observa que el orden de los factores no altera el resultado final.

P_2

Compare el resultado de $[(-8)\times2]\times(-3)$ y $(-8)\times[2\times(-3)]$.

S_2

Se desarrollan ambas expresiones:

$$\begin{aligned}[(-8)\times2]\times(-3)&=[-(8\times2)]\times(-3)\\&=(-16)\times(-3)\\&=+(16\times3)\\&=48\end{aligned} \qquad \begin{aligned}(-8)\times[2\times(-3)]&=(-8)\times[-(2\times3)]\\&=(-8)\times(-6)\\&=+(8\times6)\\&=48\end{aligned}$$

Se ha encontrado que el resultado es el mismo:

$$\mathbf{[(-8)\times2]\times(-3)=(-8)\times[2\times(-3)]}$$

C

Propiedad conmutativa de la multiplicación

La multiplicación de dos números a y b no resulta afectada si se hacen en orden diferente, es decir

$$a\times b=b\times a$$

Propiedad asociativa de la multiplicación

La multiplicación de tres números a, b y c no se afecta si se multiplican dos cualesquiera de ellos y el resultado se multiplica al número restante, es decir

$$(a\times b)\times c = a\times(b\times c)$$

Ejemplo Efectúe $(-5)\times9\times(-2)$ utilizando la propiedad asociativa.

$$\begin{aligned}(-5)\times9\times(-2)&=[(-5)\times9]\times(-2)\\&=[-(5\times9)]\times(-2)\\&=(-45)\times(-2)\\&=+(45\times2)\\&=\mathbf{90}\end{aligned} \qquad \begin{aligned}(-5)\times9\times(-2)&=9\times[(-5)\times(-2)]\\&=9\times[+(5\times2)]\\&=9\times(+10)\\&=+(9\times10)\\&=\mathbf{90}\end{aligned}$$

E

Efectúe las siguientes operaciones utilizando la propiedad asociativa:

a) $(-6)\times[(-3)\times2]$ b) $[4\times(-5)]\times(-2)$ c) $(-5)\times2\times(-8)$

d) $(-4)\times3\times(-5)$ e) $(-3)\times(-12)\times(-1)$ f) $(+10)\times(-3)\times6$

Contenido 4: Multiplicación con más de dos números

Repaso

Un número entero positivo es par si al dividirlo por 2 el residuo es cero o de otra manera la división es exacta.

- ✓ 6 es un número par porque $6 \div 2 = 3$ y el residuo es 0.
- ✓ 24 es un número par porque $24 \div 2 = 12$ y el residuo es 0.

Un número entero positivo es impar si al dividirlo por 2 el residuo es 1, en otras palabras la división no es exacta.

- ✓ 9 es un número impar porque al dividirlo por 2 el cociente es 3 y residuo es 1.
- ✓ 15 es un número impar porque si se divide por 2 el cociente es 7 y el residuo 1.

E_1

Escriba cada número en la casilla correspondiente.

7, 4, 12, 18, 27, 29

Número par	Número impar

P

Efectúe los siguientes productos:

a) $(-2) \times 5 \times (-3)$ b) $4 \times (-1) \times (-6) \times (-2)$

S

a) $(-2) \times 5 \times (-3) = -10 \times (-3)$
$= \mathbf{30}$

Hay tres factores: dos negativos y uno positivo.
Resulta un producto positivo.

b) $4 \times (-1) \times (-6) \times (-2) = -4 \times (-6) \times (-2)$
$= 24 \times (-2)$
$= \mathbf{-48}$

Hay tres factores negativos y uno positivo.
El resultado es un número negativo.

C

Al multiplicar más de dos números, el producto es positivo si el número de factores negativos es par y negativo si el número de factores negativos es impar.

Ejemplo ¿Cuál es el resultado de $(-3) \times 2 \times (-1) \times 4$?

Como la cantidad de factores negativos es 2 (número par), el resultado es un número positivo. Multiplicando los números:

$$(-3) \times 2 \times (-1) \times 4 = +(3 \times 2 \times 1 \times 4)$$
$$= \mathbf{24}$$

E_2

Efectúe los siguientes productos:

a) $(-4) \times 2 \times (-6)$ b) $(-3) \times (-5) \times (-3)$ c) $7 \times 3 \times (-2)$

d) $(-2) \times 4 \times (-1) \times 5$ e) $7 \times 3 \times (-3) \times 2$ f) $5 \times (-2) \times (-3) \times (-2)$

Contenido 5: Multiplicación con decimales

P

Efectúe los siguientes productos:

a) $(+2)\times(-1{,}3)$ b) $(-13{,}2)\times(-0{,}4)$ c) $(-4{,}1)\times(+2{,}5)$

S

a) Para efectuar este producto se escribe el signo $-$ y luego el producto de los valores absolutos.

$$(+2)\times(-1{,}3)=-(2\times 1{,}3)$$
$$=-\mathbf{2{,}6}$$

$$\begin{array}{r} 1{,}3 \\ \times\quad 2 \\ \hline 2{,}6 \end{array}$$

b) Se escribe el signo $+$ y luego el producto de los valores absolutos.

$$(-13{,}2)\times(-0{,}4)=+(13{,}2\times 0{,}4)$$
$$=\mathbf{5{,}28}$$

$$\begin{array}{r} {}^{1}13{,}2 \\ \times\quad 0{,}4 \\ \hline 5{,}28 \end{array}$$

c) El cálculo es similar a a).

$$(-4{,}1)\times(+2{,}5)=-(4{,}1\times 2{,}5)$$
$$=-\mathbf{10{,}25}$$

$$\begin{array}{r} 4{,}1 \\ \times\quad 2{,}5 \\ \hline 205 \\ 82 \\ \hline 10{,}25 \end{array}$$

Ley de los signos para la multiplicación

$(+)\times(+)=(+)$; $(+)\times(-)=(-)$

$(-)\times(-)=(+)$; $(-)\times(+)=(-)$

C

Para multiplicar decimales se toma en cuenta la ley de los signos y luego se multiplican los valores absolutos de los factores.

E

Efectúe los siguientes productos:

a) $(+3)\times(-2{,}1)$ b) $(-4{,}3)\times(-0{,}2)$ c) $(-3{,}1)\times(-2{,}2)$

d) $(-4)\times(+1{,}6)$ e) $(+2{,}7)\times(-0{,}3)$ f) $(-1{,}4)\times(-2{,}3)$

Contenido 6: Multiplicación con fracciones

P

Efectúe los siguientes productos:

a) $(+3)\times\left(-\frac{2}{7}\right)$ b) $\left(-\frac{5}{9}\right)\times\left(-\frac{3}{8}\right)$ c) $\left(-\frac{15}{4}\right)\times\left(+\frac{7}{5}\right)$

S

a) Para efectuar este producto se escribe el signo $-$ y luego el producto de los valores absolutos.

$$\begin{aligned}(+3)\times\left(-\tfrac{2}{7}\right)&=-\left(3\times\tfrac{2}{7}\right)\\&=-\frac{3\times 2}{7}\\&=-\mathbf{\frac{6}{7}}\end{aligned}$$

b) Para efectuar este producto se escribe el signo $+$ y luego el producto de los valores absolutos. Se simplifica siempre que sea posible.

$$\begin{aligned}\left(-\tfrac{5}{9}\right)\times\left(-\tfrac{3}{8}\right)&=+\left(\tfrac{5}{9}\times\tfrac{3}{8}\right)\\&=\frac{5\times\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{3}{\cancel{9}}\times 8}\\&=\mathbf{\frac{5}{24}}\end{aligned}$$

c) Para efectuar este producto se escribe el signo $-$ y luego el producto de los valores absolutos.

$$\begin{aligned}\left(-\tfrac{15}{4}\right)\times\left(+\tfrac{7}{5}\right)&=-\left(\tfrac{15}{4}\times\tfrac{7}{5}\right)\\&=-\frac{\overset{3}{\cancel{15}}\times 7}{4\times\underset{1}{\cancel{5}}}\\&=-\mathbf{\frac{21}{4}}\end{aligned}$$

C

Para multiplicar fracciones se toma en cuenta la ley de los signos y luego se multiplican los valores absolutos de los factores.

E

Efectúe los siguientes productos:

a) $(+5)\times\left(-\frac{3}{7}\right)$ b) $(-2)\times\left(+\frac{4}{9}\right)$ c) $\left(-\frac{2}{3}\right)\times\left(-\frac{5}{7}\right)$

d) $\left(-\frac{3}{5}\right)\times\left(+\frac{2}{9}\right)$ e) $\left(-\frac{7}{10}\right)\times\left(-\frac{5}{2}\right)$ f) $\left(+\frac{16}{7}\right)\times\left(-\frac{14}{4}\right)$

Contenido 7: Potenciación

P

¿Existe una manera reducida de expresar los productos?

a) 4×4 b) $4\times4\times4$

S

a) El producto 4×4 significa que el número 4 se multiplica por sí mismo 2 veces. Esto puede resumirse escribiendo $4\times4=\mathbf{4^2}$, y se lee "cuatro al cuadrado".

b) De manera análoga, el producto indicado $4\times4\times4$ puede escribirse de manera breve como $4\times4\times4=\mathbf{4^3}$, y se lee "cuatro al cubo".

C

Potencia de un número es el resultado que se obtiene al multiplicar este consigo mismo cierta cantidad de veces. El número se llama **base** y la cantidad de veces que se multiplica se llama **exponente**.

base

$4\times4\times4=4^3$ ← exponente

potencia

Ejemplo 1 ¿Cuál es el resultado de las siguientes potencias?

a) $(-2)^3$ b) $\left(-\frac{3}{4}\right)^2$ c) $(-1)^4$

Si la base es negativa y el exponente par, el resultado es positivo.

Si la base es negativa y el exponente impar, el resultado es negativo.

a) $(-2)^3=(-2)\times(-2)\times(-2)$

$=-(2\times2\times2)$

$=\mathbf{-8}$

b) $\left(-\frac{3}{4}\right)^2=\left(-\frac{3}{4}\right)\times\left(-\frac{3}{4}\right)$

$=+\left(\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\right)$

$=\frac{3\times3}{4\times4}$

$=\mathbf{\frac{9}{16}}$

c) $(-1)^4=(-1)\times(-1)\times(-1)\times(-1)$

$=+(1\times1\times1\times1)$

$=\mathbf{1}$

$(-1)^4$ se lee "-1 a la cuatro"

Ejemplo 2 Calcule el resultado de $(-3)^2$ y -3^2.

$(-3)^2=(-3)\times(-3)$

$=+(3\times3)$

$=\mathbf{9}$

$-3^2=-(3\times3)$

$=\mathbf{-9}$

Los resultados son distintos porque en el primer caso el signo es de la base y en el segundo caso el $-$ afecta a la potencia.

E

Efectúe las siguientes operaciones:

a) 3^2 b) $(-6)^2$ c) $(-7)^2$

d) $(-2)^2$ e) -4^2 f) -3^3

g) $(-2)^4$ h) $\left(\frac{1}{7}\right)^2$ i) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3$

Contenido 8: División con números positivos y negativos

P1 Efectúe la división indicada $(-8)\div(+2)$.

S1

El resultado de la división $(-8)\div(+2)$ es un número que cumple la igualdad:

$$\square\times(+2)=-8$$

Se observa que $(-4)\times(+2)=-8$. Esto significa:

$$(-8)\div(+2)=\mathbf{-4}$$

Al dividir -8 por $+2$, números con signos distintos, resulta el número negativo -4.

> Recuerde que:
> $8\div2=4$
> porque $4\times2=8$

P2 Efectúe la división indicada $(-6)\div(-3)$.

S2

El resultado de la división $(-6)\div(-3)$ es un número que cumple:

$$\square\times(-3)=-6$$

Se observa que $(+2)\times(-3)=-6$. Esto significa:

$$(-6)\div(-3)=\mathbf{+2}$$

Al dividir -6 por -3, números con signos iguales, da como resultado el número positivo $+2$.

C

- ✔ Al dividir dos números con signos distintos el resultado es un número negativo que se obtiene al dividir los valores absolutos de los números.
- ✔ Al dividir dos números con el mismo signo el resultado es un número positivo que se obtiene al dividir los valores absolutos de los números.

Signo distinto

$$(-8)\div(+2)=-(8\div2)$$
$$=-4$$

Mismo signo

$$(-6)\div(-3)=+(6\div3)$$
$$=+2$$

Ejemplo Efectúe las siguientes divisiones:

a) $(+18)\div(+6)$ b) $(-35)\div(-7)$ c) $63\div(-9)$ d) $(-32)\div(+8)$

a) $(+18)\div(+6)=+(18\div6)$
$=\mathbf{+3}$

b) $(-35)\div(-7)=+(35\div7)$
$=\mathbf{+5}$

c) $63\div(-9)=-(63\div9)$
$=\mathbf{-7}$

d) $(-32)\div(+8)=-(32\div8)$
$=\mathbf{-4}$

> Ley de los signos para la división
> $(+)\div(+)\rightarrow(+)$; $(+)\div(-)\rightarrow(-)$
> $(-)\div(-)\rightarrow(+)$; $(-)\div(+)\rightarrow(-)$

E

Efectúe las siguientes divisiones:

a) $(+14)\div(-2)$ b) $(-21)\div(-3)$ c) $(-48)\div(+8)$ d) $(+54)\div(+6)$

e) $45\div(-5)$ f) $91\div7$ g) $(-84)\div(-4)$ h) $(+78)\div(-3)$

Contenido 9: División con fracciones positivas y negativas

P1

Complete en los recuadros los números que cumplen las igualdades propuestas.

a) $\frac{2}{5}\times\square=1$ b) $\left(-\frac{2}{5}\right)\times\square=1$

S1

a) El espacio en blanco se llena con el número $\frac{5}{2}$ porque

$$\frac{2}{5}\times\boxed{\frac{5}{2}}=\frac{\cancel{2}\times\cancel{5}}{\cancel{5}\times\cancel{2}}=1$$

b) En este caso el espacio en blanco se llena con $-\frac{5}{2}$ porque

$$\left(-\frac{2}{5}\right)\times\boxed{\left(-\frac{5}{2}\right)}=+\frac{\cancel{2}\times\cancel{5}}{\cancel{5}\times\cancel{2}}=1$$

C1

Un número distinto de cero es el **recíproco** de otro si el producto de ambos es 1.

P2

Compare los resultados de $18\div(-3)$ y $18\times\left(-\frac{1}{3}\right)$.

S2

Se desarrollan ambas expresiones por separado:

$$18\div(-3)=-(18\div3)$$
$$=-6$$

$$18\div(-3)=\frac{18}{-3}=-\frac{18}{3}$$

$$(+18)\times\left(-\frac{1}{3}\right)=-\left(18\times\frac{1}{3}\right)$$
$$=-\frac{18}{3}$$
$$=-6$$

El recíproco de -3 es $-\frac{1}{3}$.

Resulta que $\mathbf{18\div(-3)=18\times\left(-\frac{1}{3}\right)}$.

C2

Para dividir un número por otro se multiplica el primero por el recíproco del segundo.

Ejemplo ¿Cuál es el resultado de las siguientes divisiones?

a) $\frac{3}{5}\div\left(-\frac{2}{7}\right)$ b) $\left(-\frac{9}{4}\right)\div\left(-\frac{3}{2}\right)$

a) $\frac{3}{5}\div\left(-\frac{2}{7}\right)=\frac{3}{5}\times\left(-\frac{7}{2}\right)$

$$=-\left(\frac{3}{5}\times\frac{7}{2}\right)$$
$$=-\frac{3\times7}{5\times2}$$
$$=-\mathbf{\frac{21}{10}}$$

b) $\left(-\frac{9}{4}\right)\div\left(-\frac{3}{2}\right)=\left(-\frac{9}{4}\right)\times\left(-\frac{2}{3}\right)$

$$=+\left(\frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{4}_{2}}\times\frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{3}_{1}}\right)$$
$$=+\frac{3\times1}{2\times1}$$
$$=\mathbf{\frac{3}{2}}$$

E

Efectúe las siguientes divisiones indicadas:

a) $\left(-\frac{1}{7}\right)\div\left(-\frac{2}{5}\right)$ b) $\frac{3}{4}\div(-5)$ c) $\left(-\frac{2}{3}\right)\div8$ d) $\left(-\frac{8}{6}\right)\div\left(-\frac{4}{9}\right)$

e) $\left(-\frac{9}{2}\right)\div\left(-\frac{5}{3}\right)$ f) $\left(-\frac{15}{4}\right)\div\frac{1}{6}$ g) $\frac{14}{9}\div\left(-\frac{8}{3}\right)$ h) $\left(-\frac{18}{5}\right)\div\left(-\frac{3}{10}\right)$

Contenido 10: Multiplicación y división combinadas

P

Efectúe las operaciones $9\div\left(-\frac{9}{7}\right)\times(-2)$.

S

$9\div\left(-\frac{9}{7}\right)\times(-2)=9\times\left(-\frac{7}{9}\right)\times(-2)$ Se convierte la división en multiplicación

$=+\left(\cancel{9}^{1}\times\frac{7}{\cancel{9}_{1}}\times2\right)$ Se escribe el signo $+$ porque hay dos negativos

$=+\frac{1\times7\times2}{1}$ Se indica la multiplicación de fracciones

$=\mathbf{14}$

C

Para calcular el valor de expresiones con multiplicaciones y divisiones combinadas:

1. Se convierten las divisiones en multiplicaciones.
2. Se encuentra el signo del resultado tomando el cuenta la ley de los signos para la multiplicación, se efectúan los productos indicados y se simplifica, si es posible.

Ejemplo Efectúe las siguientes operaciones:

a) $(-4)\div\frac{6}{5}\times(-9)$

b) $\frac{9}{2}\times\left(-\frac{5}{3}\right)\div7$

a) $(-4)\div\frac{6}{5}\times(-9)=(-4)\times\frac{5}{6}\times(-9)$

$=+\left(\cancel{4}^{2}\times\frac{5}{\cancel{\cancel{6}}_{\cancel{3}\,1}}\times\cancel{9}^{3}\right)$

$=+\frac{2\times5\times3}{1\times1\times1}$

$=\mathbf{30}$

b) $\frac{9}{2}\times\left(-\frac{5}{3}\right)\div7=\frac{9}{2}\times\left(-\frac{5}{3}\right)\times\frac{1}{7}$

$=-\left(\frac{\cancel{9}^{3}}{2}\times\frac{5}{\cancel{3}_{1}}\times\frac{1}{7}\right)$

$=-\frac{3\times5\times1}{2\times1\times7}$

$=\mathbf{-\frac{15}{14}}$

E

Efectúe las siguientes operaciones:

a) $3\div\left(-\frac{3}{4}\right)\times(-7)$

b) $7\times\left(-\frac{2}{5}\right)\div(-2)$

c) $(-9)\div(-6)\times\left(-\frac{4}{5}\right)$

d) $\left(-\frac{1}{9}\right)\div(-8)\times\frac{4}{3}$

e) $\frac{3}{4}\times\left(-\frac{2}{5}\right)\div\frac{3}{2}$

f) $\left(-\frac{5}{7}\right)\div\left(-\frac{2}{3}\right)\div\left(-\frac{4}{5}\right)$

Sección 4: Operaciones combinadas

Contenido 1: Expresiones con operaciones combinadas sin signos de agrupación

P Efectúe las operaciones en $4+6\times(-3)$.

S

$4+6\times(-3)=4+(-18)$ Se efectúa el producto $6\times(-3)$

$=-(18-4)$

$=\mathbf{-14}$

C

Para calcular el valor de expresiones numéricas con operaciones combinadas sin signos de agrupación que indiquen el orden de ejecución de las operaciones, primero se efectúan las multiplicaciones y divisiones y después las sumas y restas.

Ejemplo Efectúe las siguientes operaciones:

a) $(-15)\div5+9$ b) $(-5)-(-21)\div3$ c) $6\times(-2)+8$

a) $(-15)\div5+9=-3+9$ Se efectúa la división $(-15)\div5$

$=\mathbf{6}$

b) $(-5)-(-21)\div3=(-5)-(-7)$ Se efectúa la división $(-21)\div3$

$=\mathbf{2}$

c) $6\times(-2)+8=(-12)+8$ Se efectúa la multiplicación $6\times(-2)$

$=\mathbf{-4}$

E

Efectúe en cada inciso las operaciones combinadas:

a) $2+3\times(-5)$ b) $-6\div3+7$ c) $8+(-4)\times(-2)$

d) $(-21)\div7-2$ e) $(-4)\times3+10$ f) $9-(-28)\div(-4)$

g) $15-(-9)\div3$ h) $12+5\times(-3)$ i) $(-7)-8\times(-3)$

Contenido 2: Operaciones combinadas con signos de agrupación

P

¿Cuál es el resultado de $5\times[9-(17-6)]$?

Signos de agrupación
( ) : Paréntesis
[ ] : Corchetes

S

$5\times[9-(17-6)]=5\times[9-11]$ Se efectúa $17-6$

$=5\times(-2)$ Se efectúa $9-11$

$=\mathbf{-10}$

C

En las expresiones numéricas con operaciones combinadas y con signos de agrupación, se efectúan primero las operaciones dentro de paréntesis y luego las operaciones que quedan indicadas dentro de corchetes.

Ejemplo Efectúe las siguientes operaciones:

a) $6-(32\div8+5\times3)$ b) $(-2)\times[4-(21\div7+12)]$

a) $6-(32\div8+5\times3)$

$=6-(4+15)$ Se efectúa $32\div8$ y 5×3

$=6-19$ Se efectúa $4+15$

$=\mathbf{-13}$

b) $(-2)\times[4-(21\div7+12)]$

$=(-2)\times[4-(3+12)]$ Se efectúa $21\div7$

$=(-2)\times[4-15]$ Se efectúa $3+12$

$=(-2)\times(-11)$ Se efectúa $4-15$

$=\mathbf{22}$

E

Efectúe en cada inciso las siguientes operaciones:

a) $5\times[1-(7-3)]$ b) $2\times[8-(15-4)]$

c) $9-(14\div2+4\times3)$ d) $(-3)\times[6-(12\div4-7)]$

e) $[(-3)+(-9)]\div[(-2)\times(-3)]$

Contenido 3: Propiedad distributiva

P

Efectúe las operaciones indicadas $(-3)\times[5+(-7)]$ y $(-3)\times5+(-3)\times(-7)$ y compare los resultados obtenidos.

S

Se efectúan las operaciones por separado en ambas expresiones.

$$(-3)\times[5+(-7)]=(-3)\times(-2)$$
$$=6$$

$$(-3)\times5+(-3)\times(-7)=(-15)+21$$
$$=6$$

Ha dado el mismo resultado:

$$\mathbf{(-3)\times[5+(-7)]=(-3)\times5+(-3)\times(-7)}$$

C

La propiedad distributiva del producto respecto a la suma establece que:

$$a\times(b+c)=a\times b+a\times c$$

para números cualesquiera a, b y c.

Ejemplo Calcule el resultado de $7\times(-31)+7\times21$, primero efectuando directamente las operaciones indicadas, luego aplicando la propiedad distributiva.

Se efectúan las operaciones indicadas:

$$7\times(-31)+7\times21=(-217)+147$$
$$=\mathbf{-70}$$

Se aplica la propiedad distributiva:

$$7\times(-31)+7\times21=7\times(-31+21)$$
$$=7\times(-10)$$
$$=\mathbf{-70}$$

E

Efectúe las siguientes operaciones.

a) $4\times10+4\times(-20)$

b) $5\times(-8)+5\times(-2)$

c) $2\times(-7)+2\times(-13)$

d) $6\times(-3)+6\times(-4)$

e) $(-2)\times(-8)+(-2)\times13$

f) $(-3)\times25+(-3)\times(-17)$

Contenido 4: Aplicación de las operaciones con números positivos y negativos

Ejemplo En un restaurante normalmente llegan 95 personas a almorzar diariamente. La tabla muestra la diferencia entre la cantidad de personas que asistieron cada día y las 95 esperadas. Complete la tabla.

Día	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
Diferencia	-20	$+12$	-5	$+24$	-14	$+23$	$+31$
Total de personas							

Para calcular el total de personas presentes cada día se suma la diferencia con las 95 personas que se pensaba llegarían:

Lunes: $95+(-20)=75$
Martes: $95+(+12)=107$
Miércoles: $95+(-5)=90$
Jueves: $95+(+24)=119$
Viernes: $95+(-14)=81$
Sábado: $95+(+23)=118$
Domingo: $95+(+31)=126$

Recuerde que: un número positivo indica aumento, y uno negativo representa disminución.

La tabla se completa de la siguiente manera:

Día	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
Diferencia	-20	$+12$	-5	$+24$	-14	$+23$	$+31$
Total de personas	**75**	**107**	**90**	**119**	**81**	**118**	**126**

E

En el puesto de frutas de Don Andrés se vendieron 129 mandarinas el jueves. La tabla muestra la diferencia de mandarinas que se vendieron el resto de los días respecto al jueves. Complete en ella los datos faltantes:

Día	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
Diferencia en la cantidad de mandarinas	$+15$	-20	-38	0	$+6$	$+45$	-12
Total de mandarinas vendidas				**129**			

Contenido 5: Comprobemos lo aprendido 3

E

1. Efectúe en cada inciso las operaciones.

a) $(-4)\times(+9)$ b) $(-8)\times(-5)$ c) $(-12)\times(-7)$

d) $0\times(-6)$ e) $-(-19)$ f) $(-8)^2$

g) $(-56)\div 7$ h) $40\div(-8)$ i) $(-48)\div(-3)$

2. Efectúe en cada inciso las operaciones.

a) $5\div\left(-\frac{5}{3}\right)\times(-9)$ b) $8\times\left(-\frac{3}{4}\right)\div 6$

c) $(-3)\times(-2)\div\frac{2}{5}$ d) $\frac{1}{6}\times\left(-\frac{2}{5}\right)\div\left(-\frac{7}{3}\right)$

3. Efectúe en cada inciso las operaciones.

a) $5+6\times(-3)-2$ b) $2\times 3-(-9)+15$

c) $3+8\div 2-7\times 4$ d) $(-2)^2-(-9)+4\times 3$

4. Efectúe en cada inciso las operaciones.

a) $12\div[(9-7)\times(5-8)]$ b) $2\times[7+(8-3\times 6)]$

c) $(-4)\times[2-(18\div 3+9)]$ d) $(19-13)\div[3\times 5-(2+7)]$

Desafío

Aplicación de las operaciones con números positivos y negativos

Ejemplo

Fernando y Julia comienzan un juego (tomando el lugar donde se encuentran como el mismo punto de partida) que consiste en lanzar una moneda; si cae "cara" el jugador avanza 3 pasos en línea recta; si es "escudo" retrocede 2 pasos en la misma dirección. Gana el que avanza más pasos después de 7 lanzamientos.

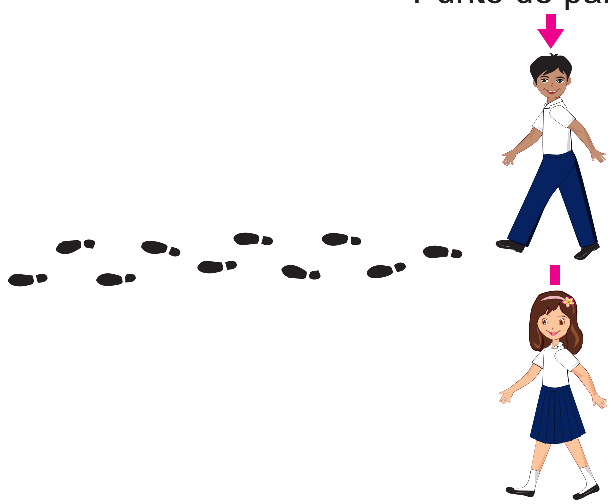
a) ¿A cuántos pasos del punto de partida se encuentra Fernando?

b) ¿A cuántos pasos del punto de partida se encuentra Julia?

c) ¿Quién es el ganador?

Para esta situación:
Los números positivos indican avance y los negativos retroceso.

Punto de partida



---

a) Fernando avanzó 4 veces tres pasos desde el punto de partida:
El avance total es $4\times(+3)=+12$ pasos donde el signo $+$ significa avance.

b) Julia avanzó 5 veces tres pasos desde el punto de partida:
El avance total es $5\times(+3)=+15$

c) Evidentemente **Julia es la ganadora** de este juego, pues Julia se encuentra a 11 pasos del punto de partida $+11>+6$.

Desafío

Aplicación de las operaciones con números positivos y negativos

E

Francisco y Luisa comienzan un juego (tomando el lugar donde se encuentran como el mismo punto de partida) que consiste en lanzar una moneda; si cae "cara" el jugador avanza 3 pasos en línea recta; si es "escudo" retrocede 2 pasos en la misma dirección. Gana el que avance más pasos después de 9 lanzamientos.

a) ¿Cuántos pasos avanza Francisco respecto al punto de partida si obtuvo 7 veces caras?

b) ¿Cuántos pasos retrocede Francisco con 2 veces "escudo"?

c) ¿A cuántos pasos del punto de partida se encuentra Francisco?

d) ¿Cuántos pasos avanza Luisa con 6 veces "cara"?

e) ¿Cuántos pasos retrocede Luisa con 3 veces "escudo"?

f) ¿A cuántos pasos del punto de partida se encuentra Luisa?

g) ¿Quién es el ganador?

Unidad 3

Álgebra

Sección 1 Expresiones algebraicas

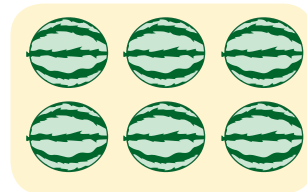
Sección 2 Operaciones con expresiones algebraicas

Sección 1: Expresiones algebraicas

Contenido 1: Concepto de expresión algebraica

P

En un puesto de frutas hay cajas con la misma cantidad de sandías. Si en cada caja hay 6 sandías, ¿cuántas hay en 2 cajas?, ¿y en 3 cajas? ¿De qué manera se puede expresar el número de sandías que hay en cierta cantidad de cajas?



S

Según los datos del problema,

En una caja hay $\mathbf{1 \times 6 = 6}$ sandías
En 2 cajas hay $\mathbf{2 \times 6 = 12}$ sandías
En 3 cajas hay $\mathbf{3 \times 6 = 18}$ sandías

Entonces,

(Cantidad de cajas) $\times$ (Cantidad de sandías por caja) $=$ (Total de sandías)

Si se utiliza a para denotar la cantidad desconocida de cajas, la cantidad total de sandías en esta es $a \times 6$.

Cantidad de cajas	Cantidad de sandías
1	1×6
2	2×6
3	3×6
4	4×6
$\vdots$	$\vdots$
a	$a \times 6$

C

Una **variable** es una letra que representa una cantidad desconocida.
Una expresión formada por números y variables enlazadas por signos de operaciones se conoce como **expresión algebraica**.

Ejemplo Escriba la expresión algebraica que representa el total de dinero en x monedas de C$5 y y monedas de C$1.

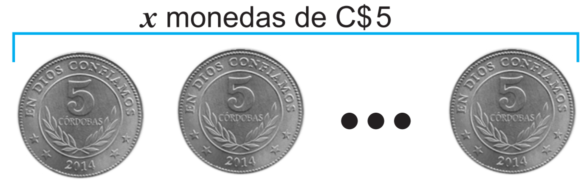
En x monedas de C$5 hay $x \times 5$ córdobas.

En y monedas de C$1 hay $y \times 1$ córdobas.

Se expresa el total de dinero sumando ambas cantidades:

$$x \times 5 + y$$

x monedas de C$5



y monedas de C$1

E

Escriba en cada inciso la expresión algebraica que se deriva de las siguientes situaciones:

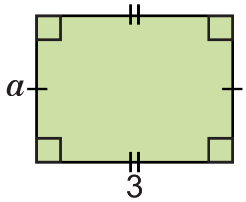
a) El total de jocotes en x bolsas, si en cada una hay 15 jocotes.
b) El costo de a chocolates de C$10 cada uno y b galletas de C$6 cada una.
c) La cantidad de cuadernos que hay en 12 mochilas, si en cada una hay y cuadernos.
d) La cantidad de dinero que resulta de restar x billetes de C$10 a y billetes de C$20.

Contenido 2: Reglas convencionales que se utilizan con expresiones algebraicas (1)

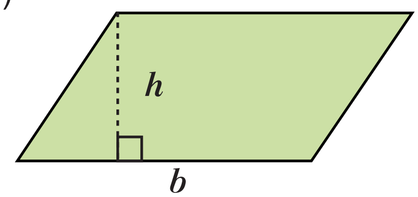
P

Escriba la expresión algebraica que representa el área de las siguientes figuras:

a)



b)



S

a) La expresión algebraica que representa el área de un rectángulo como el producto de su base 3 por la altura a es

$$\mathbf{3\times a}$$

b) La expresión algebraica que representa el área de un paralelogramo como el producto de su base b por la altura h es

$$\mathbf{b\times h}$$

En las expresiones algebraicas se ignorará el signo $\times$ para los productos; se escribirán primero los números y las letras después, respetando en estas el orden alfabético:

$$\mathbf{3\times a=3a} \qquad \mathbf{b\times h=bh}$$

C

Para expresar productos sin utilizar el signo $\times$:

Se escribe el número antes de la variable	$x\times 8=8x$
Si hay más de una variable, se escriben en orden alfabético	$x\times 3\times y=3xy$
Si las variables aparecen dentro de paréntesis, se escriben a la derecha del número.	$(a-b)\times 6=6(a-b)$
Si se repite una variable, esta se escribe con un exponente que indica las veces que aparece como factor.	$a\times a=a^2$

También se utiliza un punto "·" para expresar productos:

$8x=8\cdot x$

$3xy=3\cdot x\cdot y$

$a^2=a\cdot a$

Ejemplo Escriba las siguientes expresiones algebraicas sin utilizar el signo $\times$:

a) $1\times b$ b) $(-1)\times b$ c) $a\times(-7)$ d) $(-5)\times b\times a$

a) $1\times b=\mathbf{b}$ b) $(-1)\times b=\mathbf{-b}$ c) $a\times(-7)=\mathbf{-7a}$ d) $(-5)\times b\times a=\mathbf{-5ab}$

E

Escriba las siguientes expresiones algebraicas sin utilizar el signo $\times$:

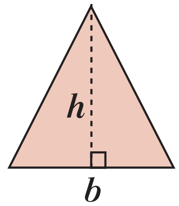
a) $a\times 7$ b) $y\times x$ c) $b\times a\times 2$ d) $(x+y)\times 5$

e) $1\times y$ f) $(-8)\times a$ g) $y\times(-2)\times x$ h) $x\times x\times x$

Contenido 3: Reglas convencionales que se utilizan con expresiones algebraicas (2)

P

Escriba la expresión algebraica que representa el área del siguiente triángulo.



En la figura,
h representa la altura
y b la base del triángulo.

S

La expresión algebraica que representa el área de un triángulo como el producto de su base por la altura entre 2 es

$$(bh)\div 2$$

La expresión anterior se representará como la fracción $\frac{bh}{2}$.

C

En las expresiones algebraicas en lugar de $a \div b$ se escribirá $\frac{a}{b}$.

Ejemplo 1 Escriba las siguientes expresiones algebraicas sin utilizar los signos $\times$ y $\div$:

a) $x\div 4$ b) $9\div y$ c) $2\times a\div 5$ d) $(a\times b)\div 3$

a) $x\div 4=\frac{x}{4}$

b) $9\div y=\frac{9}{y}$

c) $2\times a\div 5=\frac{2a}{5}$

d) $(a\times b)\div 3=\frac{ab}{3}$

También:
$\frac{x}{4}=\frac{1}{4}x$, $\frac{2a}{5}=\frac{2}{5}a$
$\frac{ab}{3}=\frac{1}{3}ab$

E1

Escriba las siguientes expresiones algebraicas sin utilizar los signos $\times$ y $\div$:

a) $a\div 7$ b) $5\times a\div 3$ c) $(x\times y)\div 5$

Ejemplo 2 Escriba las siguientes expresiones algebraicas sin utilizar el signo $\div$:

a) $-6\div x$ b) $a\div(-2)$ c) $(a+b)\div(-5)$ d) $-3\div(-y)$

a) $-6\div x=\frac{-6}{x}=-\frac{6}{x}$

b) $a\div(-2)=\frac{a}{-2}=-\frac{a}{2}$

c) $(a+b)\div(-5)=\frac{a+b}{-5}=-\frac{a+b}{5}$

d) $-3\div(-y)=\frac{-3}{-y}=\frac{3}{y}$

Aunque
$\frac{a}{-2}=-\frac{a}{2}$,
se escribirá el signo antes de la fracción.

E2

Escriba las siguientes expresiones algebraicas sin utilizar el signo $\div$:

a) $-x\div(-2)$ b) $b\div(-8)$

c) $(a-b)\div(-3)$ d) $-9\div(x+y)$

Contenido 4: Traducción del lenguaje común al lenguaje algebraico (1)

P

Carolina va al supermercado a comprar con un billete de C$200. Si compra 9 botellas de jugo a x córdobas cada una:

a) Escriba las expresiones algebraicas que representa el dinero que pagó y lo que recibió de cambio.

b) ¿Qué representa la expresión $12x$?

S

a) Si cada botella de jugo cuesta x córdobas, Carolina gastó en la compra de las 9 botellas

$$\text{C\$}9x$$

quedándole como cambio

$$\text{C\$}200-9x$$

b) Como x es el precio de una botella de jugo, entonces $12x$ representa **el precio de 12 botellas de jugo.**

C

Para traducir expresiones de nuestro lenguaje común al algebraico, que está constituido por números y signos, se asumen las cantidades desconocidas como letras o variables que cumplen con todas las propiedades. Se pueden sumar, restar, multiplicar, dividir y elevar a un exponente.

Ejemplo En una fiesta hay x niños sentados en mesas pequeñas y y adultos sentados en mesas grandes.

a) Escriba las expresiones algebraicas que representan la cantidad de niños sentados alrededor de 4 mesas pequeñas y la cantidad de adultos alrededor de 7 mesas grandes.

b) Escriba la expresión algebraica que representa la cantidad total de niños y adultos en 4 mesas pequeñas y 7 mesas grandes.

---

a) Si en cada mesa pequeña hay x niños, entonces en 4 mesas hay $\mathbf{4x}$ niños.

Si en cada mesa grande hay y adultos, entonces en 7 mesas hay $\mathbf{7y}$ adultos.

b) En total hay $\mathbf{4x+7y}$ personas.

E

1. Escriba las expresiones algebraicas que representan las siguientes situaciones:

   a) El dinero que queda luego de comprar 5 cuadernos que valen C$$x$ cada uno con un billete de C$100.

   b) El total de personas en x carros y y motos, si en cada carro hay 4 personas y en cada moto hay 2 personas.

2. Traslade al lenguaje común las siguientes expresiones algebraicas si a es el precio en córdobas de un pantalón y b el precio en córdobas de una camisa.

   a) $3a+5b$ b) $300-2a$ c) $500-(a+b)$

Contenido 5 : Traducción del lenguaje común al lenguaje algebraico (2)

P

a) Un carro recorre $x\,km$ en 2 horas, ¿qué expresión algebraica representa la velocidad del carro?

b) ¿Qué expresión representa la distancia recorrida en y horas si el carro va a $60\,km/h$?

c) ¿Qué expresión representa el tiempo en que se recorren 40 km si el carro va a $z\,km/h$?

La velocidad representa la distancia recorrida en una unidad de tiempo.

$60\,km/h$ se lee "60 km por hora" y significa que se recorre $60\,km$ cada hora.

S

a) La velocidad se encuentra dividiendo la distancia recorrida entre el tiempo en que recorrió dicha distancia. La expresión que representa la velocidad es:

$$x \div 2 = \boldsymbol{\frac{x}{2}}\ (km/h)$$

b) Si el carro avanza $60\,km$ cada hora y han transcurrido y horas, entonces la expresión que representa la distancia recorrida es:

$$y \times 60 = \mathbf{60}\boldsymbol{y}\ (km)$$

c) Si el carro va a $z\,km/h$, entonces la expresión que representa el tiempo en que recorre $40\,km$ es:

$$40 \div z = \boldsymbol{\frac{40}{z}}\ (h)$$

C

Para representar distancias y velocidades como una expresión algebraica:

(Velocidad) = (Distancia) ÷ (Tiempo)   (Distancia) = (Velocidad) × (Tiempo)

(Tiempo) = (Distancia) ÷ (Velocidad)

Dependiendo de la unidad de medida de la distancia y el tiempo, así será la unidad de medida de la velocidad:

km/h se lee "kilómetro por hora"	m/min se lee "metro por minuto"	m/s se lee "metro por segundo"

E

1. Representa con expresiones algebraicas las siguientes cantidades.
   a) La velocidad de una moto que recorre $9\,km$ en x horas.
   b) La distancia (en kilómetros) recorrida en 4 horas por un carro, si el carro va a una velocidad de $a\ \ km/h$.
   c) El tiempo (en horas) en que un bus recorre $55\,km$, si va a una velocidad de $x\ \ km/h$.

2. Julia camina durante x minutos a una velocidad de $70\,m/min$, pero luego empieza a caminar a una velocidad de $35\,m/min$ por y minutos. ¿Qué representan las siguientes expresiones?

   a) $70x$ b) $35y$ c) $70x+35y$

Contenido 6: Término algebraico (variable y coeficiente)

P

Dada la expresión algebraica $2x + 5y$, identifique las variables y los productos indicados de números y variables.

S

Las variables son las letras que aparecen en la expresión: x, y .
Los productos indicados son $2x$ y $5y$, los cuales se llaman términos, y los números 2 y 5 son sus respectivos coeficientes.

Término	Variable	Coeficiente
$2x$	x	2
$5y$	y	5

C

- ✓ Los **términos** son expresiones algebraicas que no contienen sumas o restas.
- ✓ El **coeficiente** es el número que multiplica a la variable.

Ejemplo Identifique la variable y el coeficiente de cada término en $3x-y+\frac{z}{5}$.

Observe que: $3x-y+\frac{z}{5}=3x+(-y)+\frac{z}{5}$.

	Término	Variable	Coeficiente
a)	$3x$	x	3
b)	$-y$	y	-1
c)	$\frac{z}{5}$	z	$\frac{1}{5}$

Recuerde que:

$-x=(-1)\times x$

E

Identifique la variable y el coeficiente de cada término en $-4a-b+\frac{3}{2}c$

	Término	Variable	Coeficiente

Contenido 7: Valor numérico de una expresión algebraica (1)

P

El dinero que queda luego de comprar con un billete de C\$50 un cuaderno que vale C\$$x$ se puede expresar como $50-x$. Si el cuaderno vale C\$20, ¿cuánto dinero queda?

S

Si el cuaderno vale C\$20, significa que $x=20$. Si escribimos 20 en vez de x en la expresión, queda:

$$50-\boxed{x}$$
$$\downarrow \text{Se sustituye } x=20$$
$$50-\boxed{20}=30$$

Luego de comprar el cuaderno quedan **C\$30**.

C

El **valor numérico de una expresión algebraica** en una variable es el número que se obtiene al sustituir esta variable por un número y efectuar las operaciones indicadas.

Ejemplo 1 Calcule el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas con los valores dados de la variable:

a) $x-12$, si $x=-5$ b) $-x$, si $x=-8$

Se sustituye $x=-5$ en la expresión:

$$\begin{aligned} x-12 &= -5-12 \\ &= \mathbf{-17} \end{aligned}$$

Se sustituye $x=-8$ en la expresión:

$$\begin{aligned} -x &= -(-8) \\ &= \mathbf{8} \end{aligned}$$

E_1

Calcule el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas con los valores dados de la variable:

a) $18-x$, si $x=6$ b) $-x$, si $x=-7$

c) $25-x$, si $x=-10$ d) $-a-6$, si $a=-2$

Ejemplo 2 Calcule el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas con los valores dados de la variable:

a) $2a+9$, si $a=3$ b) $-4a+1$, si $a=2$

Se sustituye $a=3$ en la expresión:

$$\begin{aligned} 2a+9 &= (2)(3)+9 \\ &= 6+9 \\ &= \mathbf{15} \end{aligned}$$

Se sustituye $a=2$ en la expresión:

$$\begin{aligned} -4a+1 &= (-4)(2)+1 \\ &= -8+1 \\ &= \mathbf{-7} \end{aligned}$$

Al multiplicar dos números se usarán paréntesis en lugar de $\times$:
$-4\times 2 = (-4)(2)$

E_2

Calcule el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas con los valores dados de la variable:

a) $5a$, si $a=9$ b) $-6a$, si $a=-4$

c) $3x+1$, si $x=2$ d) $5x-7$, si $x=-3$

Contenido 8: Valor numérico de una expresión algebraica (2)

P

Sustituya en las expresiones algebraicas los valores dados para las variables y realice las operaciones indicadas.

a) $\frac{16}{x}$, si $x=8$ b) $\frac{x}{10}$, si $x=5$ c) $2a+5b$, si $a=3$ y $b=-1$

S

a) Se sustituye $x=8$ en:

$$\frac{16}{x}=\frac{\overset{2}{\cancel{16}}}{\underset{1}{\cancel{8}}}=\mathbf{2}$$

b) Se sustituye $x=5$ en:

$$\frac{x}{10}=\frac{\overset{1}{\cancel{5}}}{\underset{2}{\cancel{10}}}=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

c) Se sustituyen $a=3$ y $b=-1$ en:

$$\begin{aligned}2a+5b&=(2)(3)+(5)(-1)\\&=6-5\\&=1\end{aligned}$$

C

El valor numérico de una expresión con una o más variables se calcula sustituyendo los números dados, en lugar de las variables y realizando las operaciones indicadas.

Ejemplo Calcule el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas para los valores dados de las variables:

a) $3a-2b$, si $a=1$ y $b=-3$ b) $-a-5b$, si $a=4$ y $b=3$

c) x^2, si $x=-2$ d) $-x^2$, si $x=2$

a) Se sustituye $a=1$ y $b=-3$ en:

$$\begin{aligned}3a-2b&=(3)(1)-(2)(-3)\\&=3-(-6)\\&=3+6\\&=\mathbf{9}\end{aligned}$$

b) Se sustituye $a=4$ y $b=3$ en:

$$\begin{aligned}-a-5b&=-(4)-(5)(3)\\&=-4-15\\&=\mathbf{-19}\end{aligned}$$

c) Se sustituye $x=-2$ en:

$$\begin{aligned}x^2&=(-2)^2\\&=(-2)(-2)\\&=\mathbf{4}\end{aligned}$$

d) Se sustituye $x=2$ en:

$$\begin{aligned}-x^2&=(-1)(2^2)\\&=(-1)(4)\\&=\mathbf{-4}\end{aligned}$$

E

Calcule el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas para los valores dados de las variables:

a) $\frac{12}{x}$, si $x=3$ b) $\frac{10}{x}$, si $x=-5$

c) $5a+3b$, si $a=1$ y $b=2$ d) $2a-7b$, si $a=3$ y $b=1$

e) $3a+b$, si $a=2$ y $b=-4$ f) $-4a-3b$, si $a=-5$ y $b=2$

g) x^2, si $x=-4$ h) $-x^2$, si $x=3$

Contenido 9: Comprobemos lo aprendido 1

E

1. Escriba las siguientes expresiones sin utilizar $\times$ y $\div$:

   a) $y\times 7$ b) $x\times(-3)$ c) $6\div y$

   d) $a\div(-9)$ e) $b\times 5\times a$ f) $2\div(x\times y)$

2. Escriba la expresión algebraica que representa cada una de las siguientes situaciones:

   a) El total de latas de jugo que hay en x cajas, si en cada una hay 12 latas.

   b) El dinero que queda luego de comprar 7 caramelos que valen C\$$x$ cada uno con un billete de C\$50 .

   c) El total de dinero en una billetera, si hay a billetes de C\$20 y b billetes de C\$10.

3. Calcule el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas con los valores dados de las variables:

   a) $21-x$, si $x=10$ b) $-3a$, si $a=4$

   c) $\frac{x}{3}$, si $x=15$ d) $8a+5$, si $a=-6$

   e) $4x+7y$, si $x=3$ y $y=2$ f) $2a-5b$, si $a=-7$ y $b=-3$

   g) x^2, si $x=8$ h) $-2x^2$, si $x=3$

Sección 2: Operaciones con expresiones algebraicas

Contenido 1: Términos semejantes

P

Si x representa la cantidad de naranjas, y la cantidad de piñas y z la cantidad de bananos que están en cada bolsa. Escriba en la línea correspondiente los términos de la izquierda que representan cantidades de naranjas, piñas y bananos respectivamente.

$2x$	$3z$	$5y$
$2y$	$6z$	x
y	$3x$	$4z$

Naranjas: ____________________

Piñas: ____________________

Bananos: ____________________

S

- ✓ Los términos x, $2x$, $3x$ en la variable x representan la cantidad de naranjas que hay en una, dos y tres bolsas.
- ✓ Los términos y, $2y$, $5y$ en la variable y representan la cantidad de piñas que hay en una, dos y cinco bolsas.
- ✓ Los términos $3z$, $4z$, $6z$ en la variable es z representan la cantidad de bananos que hay en tres, cuatro y seis bolsas.

Naranjas: $x, 2x, 3x$

Piñas: y, $2y$, $5y$

Bananos: $3z$, $4z$, $6z$

C

Los términos que tienen las mismas variables elevadas a los mismos exponentes se llaman **términos semejantes**. No importa que los coeficientes sean diferentes.

Ejemplo Identifique en cada inciso si los términos son semejantes. Justifique.

a) $7a$ y $-3a$

b) $2xy$ y $9xy$

c) $8b$ y $13a$

d) $3a$ y $5a^2$

a) **Son semejantes** porque $7a$ y $-3a$ tienen la misma variable elevada al mismo exponente.

b) **Son semejantes** porque $2xy$ y $9xy$ tienen las mismas variables elevadas a los mismos exponentes.

c) **No son semejantes** porque $8b$ y $13a$ tienen distintas variables.

d) **No son semejantes** porque $3a$ y $5a^2$, aunque tienen la misma variable, están elevadas a diferentes exponentes.

E

Ubique en la fila correspondiente cada uno de los siguientes términos dependiendo de si es semejante a $12a$, $4xy$ y $-5m$.

$$8m,\ -9a,\ -m,\ xy,\ 3m,\ 7m,$$
$$15a,\ -3xy,\ 4a,\ 13m,\ 6xy$$

Términos semejantes a:

$12a$: ______________________________

$4xy$: ______________________________

$-5m$: ______________________________

Contenido 2: Simplificación de términos semejantes

P

Andrés tiene 3 piezas de madera de $x\,cm$ de largo cada una, y compra en una ferretería 2 piezas más del mismo largo.

a) Escriba la expresión algebraica que representa el largo total de las 5 piezas.

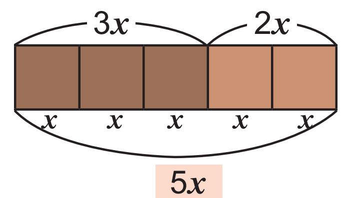
b) Si se tuvieran 7 piezas de las mismas y se retiraran 3, escriba la expresión algebraica que representa la longitud total de las piezas restantes.

S

a) Las 3 piezas de madera de $x\,cm$ de largo miden en total $3x\,cm$ y las 2 piezas agregadas miden en total $2x\,cm$. En la figura se puede ver que

$$3x+2x=(3+2)x=5x$$

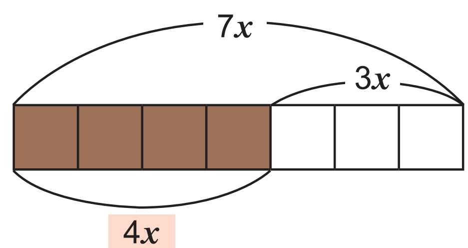
El largo total es de $\mathbf{5x\,cm}$.



b) Si de 7 piezas de longitud $x\,cm$ se quitan 3 piezas entonces, de acuerdo con la figura, la longitud total de las piezas restantes es $4x$. Es decir:

$$7x-3x=(7-3)x=4x$$

El largo total de las piezas restantes es $\mathbf{4x\,cm}$.



C

Para simplificar o reducir términos semejantes se suman los coeficientes con sus propios signos y se escribe la variable con el mismo exponente.

Ejemplo Encuentre en cada inciso el término que resulta de simplificar la expresión algebraica.

a) $5a-8a$

b) $2a+7a-a$

a) $5a-8a=(5-8)a$
$\quad =\mathbf{-3a}$

b) $2a+7a-a=(2+7-1)a$
$\quad =(9-1)a$
$\quad =\mathbf{8a}$

E

Encuentre en cada inciso el término que resulta de simplificar la expresión algebraica.

a) $5x+2x$ b) $8x+6x$ c) $9x-4x$

d) $2x-7x$ e) $-5x+x$ f) $7x+2x+5x$

g) $3x+8x-2x$ h) $9a-2a-4a$ i) $-3a-4a-a$

Contenido 3: Adición de expresiones algebraicas

P

Efectúe la suma de $3x+7$ con $2x-6$.

S

La expresión que representa en forma horizontal la suma es $(3x+7)+(2x-6)$. Para efectuarla se realiza lo siguiente:

$$\begin{aligned}(3x+7)+(2x-6)&=3x+\boxed{7}+2x\boxed{-6}\\&=3x+2x+7-6\\&=(3+2)x+(7-6)\\&=\mathbf{5x+1}\end{aligned}$$

Esta suma también se puede escribir de forma vertical:

1. Se ubican primero los términos con variable alineados verticalmente.
2. Se alinean en otra columna los números.

$$\begin{array}{rr} & 3x+7\\ +) & 2x-6\\ \hline & \mathbf{5x+1}\end{array}$$

C

Para sumar expresiones algebraicas:

1. Se quitan los paréntesis conservando los mismos signos en cada uno de los términos.
2. Se agrupan términos semejantes.
3. Se simplifican términos semejantes.

Ejemplo 1 Efectúe la adición $5x+(3-9x)$.

$$\begin{aligned}5x+(3-9x)&=5x+3-9x\\&=5x-9x+3\\&=(5-9)x+3\\&=\mathbf{-4x+3}\end{aligned}$$

E1

Efectúe las siguientes operaciones:

a) $(2x+5)+(7x-4)$ b) $(3x-7)+(2x+1)$ c) $8x+(4-3x)$

d) $2+(3x-7)$ e) $(-5x+2)+(x+7)$ f) $(4x-7)+(-9x+1)$

Ejemplo 2 Efectúe la operación $4-7x-5+x$.

$$\begin{aligned}4-7x-5+x&=-7x+x+4-5\\&=(-7+1)x+(4-5)\\&=-6x+(-1)\\&=\mathbf{-6x-1}\end{aligned}$$

Se observa que $-6x-1$ no se puede simplificar porque $-6x$ y -1 no son términos semejantes.

E2

Efectúe las siguientes operaciones:

a) $3x-4-9x+5$ b) $6-2x+3-5x$ c) $8+5x-3x+1$

Contenido 4: Sustracción de expresiones algebraicas

P

Encuentre la expresión que representa restar $2x+1$ de $3x-6$.

Restar B de A significa efectuar
A−B
A: minuendo B: sustraendo

S

La expresión que representa en forma horizontal restar $2x+1$ de $3x-6$ es $(3x-6)-(2x+1)$.

$(3x-6)-(2x+1)=(3x-6)+(-2x-1)$	Se cambia de signo a los términos del sustraendo
$=3x-6-2x-1$	Se quitan paréntesis
$=3x-2x-6-1$	Se agrupan términos semejantes
$=(3-2)x+(-6-1)$	Se reducen términos semejantes
$=\mathbf{x-7}$	Se efectúan operaciones indicadas

C

Para restar dos expresiones algebraicas:
1. Se cambian los signos de los términos del sustraendo.
2. Se agrupan y reducen términos semejantes.

Ejemplo Efectúe las siguientes sustracciones:

a) $(7x-2)-(2x-5)$ b) $3x-(9-5x)$

a) $$\begin{aligned}(7x-2)-(2x-5)&=(7x-2)+(-2x+5)\\&=7x-2x-2+5\\&=(7-2)x+(-2+5)\\&=\mathbf{5x+3}\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}3x-(9-5x)&=3x+(-9+5x)\\&=3x+5x-9\\&=(3+5)x-9\\&=\mathbf{8x-9}\end{aligned}$$

E

Efectúe las siguientes sustracciones:

a) $(5x+2)-(3x+7)$ b) $(x+3)-(4x+8)$ c) $5x-(2-7x)$

d) $6-(2x+1)$ e) $(6x+2)-(-3x+2)$ f) $(9x-4)-(2x+3)$

g) $(3x-5)-(7x-1)$ h) $(8x-1)-(-x+4)$ i) $(4x+6)-(-2x-5)$

Contenido 5: Multiplicación de un número por una expresión algebraica

P

Efectúe las siguientes multiplicaciones:

a) $3(2x)$ b) $4(3x+2)$

S

a) $3(2x)=(3)(2)x$ Se usa la propiedad asociativa

$=\mathbf{6x}$ Se efectúa la operación indicada

b) $4(3x+2)=(4)(3x)+(4)(2)$ Se usa la propiedad distributiva

$=(4)(3)x+(4)(2)$ Se usa la propiedad asociativa

$=\mathbf{12x+8}$ Se efectúan las operaciones indicadas

Propiedad asociativa:
$a(bc)=(ab)c$

Propiedad distributiva:
$a(b+c)=ab+ac$

C

1. Para multiplicar un número por un término, se multiplica el número por el coeficiente del término y la variable queda igual.
2. Para multiplicar un número por una expresión algebraica, se multiplica el número por cada uno de los términos de esta.

Ejemplo 1 Efectúe las siguientes multiplicaciones de un número por un término.

a) $5(-3x)$ b) $-4(-8x)$

Se usa la propiedad asociativa del producto y se efectúa el producto indicado.

a) $5(-3x)=(5)(-3)x$
$=\mathbf{-15x}$

b) $-4(-8x)=(-4)(-8)x$
$=\mathbf{32x}$

E_1

Efectúe las siguientes multiplicaciones de un número por un término.

a) $4(6x)$ b) $-5(-2x)$ c) $-\frac{1}{4}(12x)$

Ejemplo 2 Efectúe las siguientes multiplicaciones de un número por una expresión algebraica.

a) $3(6x-1)$ b) $-2(5x-7)$

Se usa la propiedad distributiva del producto y se efectúan los productos indicados.

a) $3(6x-1)=(3)(6x)+(3)(-1)$
$=(3)(6)x+(3)(-1)$
$=\mathbf{18x-3}$

b) $-2(5x-7)=(-2)(5x)+(-2)(-7)$
$=(-2)(5)x+(+14)$
$=\mathbf{-10x+14}$

E_2

Efectúe las siguientes multiplicaciones de un número por una expresión algebraica.

a) $6(2x+7)$ b) $2(3x-5)$ c) $-4(5x-8)$

Contenido 6: División de una expresión algebraica por un número

P

Efectúe las siguientes divisiones:

a) $12x \div 6$ b) $18x \div \left(-\frac{3}{2}\right)$ c) $(8x+10) \div 2$

S

a) $12x \div 6 = \dfrac{\overset{2}{\cancel{12}}x}{\underset{1}{\cancel{6}}}$ Se expresa la división como una fracción

$= \mathbf{2x}$ Se simplifica

Recuerde que:

$a \div \dfrac{b}{c} = a \times \dfrac{c}{b}$

b) $18x \div \left(-\frac{3}{2}\right) = (\overset{6}{\cancel{18}}x)\left(-\dfrac{2}{\underset{1}{\cancel{3}}}\right)$ Se usa la definición de división y se simplifica

$= \mathbf{-12x}$ Se efectúa el producto indicado

Propiedad distributiva:

$(a+b)c = ac+bc$

c) $(8x+10) \div 2 = (8x+10)\left(\frac{1}{2}\right)$ Se usa la definición de división

$= (8x)\left(\frac{1}{2}\right) + (10)\left(\frac{1}{2}\right)$ Se utiliza la propiedad distributiva

$= \dfrac{\overset{4}{\cancel{8}}}{\underset{1}{\cancel{2}}}x + \dfrac{\overset{5}{\cancel{10}}}{\underset{1}{\cancel{2}}}$ Se efectúan las multiplicaciones y se simplifica

$= \mathbf{4x+5}$

C

1. Para dividir un término por un número se divide el coeficiente por el número y la variable queda igual.
2. Para dividir una expresión algebraica por un número se divide cada uno de los términos por el número.

E

Efectúe en cada inciso la división indicada.

a) $21x \div 7$ b) $16x \div (-4)$ c) $8x \div \left(-\frac{2}{3}\right)$

d) $(14x+8) \div 2$ e) $(12x+6) \div (-6)$ f) $(15x-10) \div 5$

Contenido 7: Simplificación de expresiones algebraicas

P

Simplifique la expresión algebraica $3(2x+6)+5(2x-1)$.

S

Se eliminan los paréntesis haciendo uso de la propiedad distributiva:

Propiedad Distributiva
$a(b+c)=ab+ac$

$$\begin{aligned} 3(2x+6)+5(2x-1) &= (3)(2x)+(3)(6)+(5)(2x)+(5)(-1) \\ &= 6x+18+10x-5 \\ &= 6x+10x+18-5 \\ &= \mathbf{16x+13} \end{aligned}$$

C

Para simplificar expresiones algebraicas que contienen paréntesis:

1. Se efectúan las multiplicaciones indicadas usando la propiedad distributiva.
2. Se reducen términos semejantes.

Ejemplo Simplifique en cada inciso la expresión algebraica dada.

a) $4(3x+5)-2(x-8)$ b) $4(x-6)-3(-5x-7)$

a) $$\begin{aligned} 4(3x+5)-2(x-8) &= (4)(3x)+(4)(5)-(2)(x)-(2)(-8) \\ &= 12x+20-2x+16 \\ &= 12x-2x+20+16 \\ &= \mathbf{10x+36} \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 4(x-6)-3(-5x-7) &= (4)(x)+(4)(-6)-(3)(-5x)-(3)(-7) \\ &= 4x-24+15x+21 \\ &= 4x+15x-24+21 \\ &= \mathbf{19x-3} \end{aligned}$$

E

Simplifique en cada inciso la expresión algebraica dada.

a) $4(6x+3)+5(2x-1)$ b) $6(x+4)+2(5x-7)$ c) $3(2x-7)+5(x-4)$

d) $6(x+4)-2(5x+7)$ e) $2(8x-6)-4(x-2)$ f) $3(x-1)-7(-2x+3)$

Contenido 8: Comprobemos lo aprendido 2

E

1. Una con una línea los términos que son semejantes.

$5x$ •	• a
$12a$ •	• $15xy$
$7xy$ •	• $8b$
$3b$ •	• $-9x$

2. Encuentre en cada inciso el término que resulta de simplificar las siguientes expresiones algebraicas.

a) $3x+6x$ b) $9x-2x$ c) $-3x-5x$

d) $4x+x+3x$ e) $7x+8x-5x$ f) $4x-7x-9x$

3. Efectúe en cada inciso las operaciones indicadas.

a) $(3a+7)+(6a-2)$ b) $2a-6+5a-3$

c) $9a-(2-3a)$ d) $(4a+9)-(a+7)$

4. Efectúe en cada inciso las operaciones indicadas.

a) $-2(7x)$ b) $3(5x-2)$

c) $18x\div(-9)$ d) $(12x-8)\div 4$

5. Simplifique en cada inciso la expresión algebraica dada.

a) $3(2x+5)+6(x-2)$ b) $5(3x-2)+2(6x-1)$

c) $2(x+8)-4(3x+1)$ d) $7(x-4)-3(2x-5)$

Unidad 4

Ecuaciones de Primer Grado

Sección 1: Ecuaciones de primer grado

Contenido 1: Igualdad numérica

P

Observe las siguientes balanzas que están en equilibrio y escriba las igualdades que se pueden deducir de cada situación:

Situación 1

Situación 2

Situación 3

S

Situación 1

$3=3$

Situación 2

$1+1+1=3$

Situación 3

$1+1+1=1+2$

C

- ✓ Una igualdad representa dos cantidades o expresiones matemáticas que tienen el mismo valor numérico.
- ✓ El signo "=" se lee "es igual a".

Ejemplo Complete el recuadro con un número entero que satisfaga la igualdad.

a) $6+\boxed{}=11$ b) $-9-\boxed{}=-23$ c) $(3)(\boxed{})=60$

a) $6+\boxed{5}=11$ b) $-9-\boxed{14}=-23$ c) $(3)(\boxed{20})=60$

E

Complete, en cada inciso, el recuadro con un número entero que satisfaga la igualdad.

a) $3+\boxed{}=9$ b) $-4-\boxed{}=-15$ c) $(5)(\boxed{})=30$

d) $15-\boxed{}=-4$ e) $-11+\boxed{}=16$ f) $(\boxed{})(8)=-32$

Contenido 2: Solución de una ecuación de primer grado

P

En una librería se compra cierta cantidad de lápices y un cuaderno por un total de C$34. El precio de cada uno de los lápices es C$5 y el del cuaderno es C$14. ¿Cuántos lápices se compraron?

S

Si x es la cantidad de lápices, el costo total de estos más el costo del cuaderno es $5x+14$, formándose la ecuación $5x+14=34$. Para encontrar el valor de x se tantean algunos enteros razonablemente escogidos que puedan cumplir la igualdad.

Valor de la variable x	Valor numérico de la expresión $5x + 14$
1	$(5)(1) + 14 = 19$
2	$(5)(2) + 14 = 24$
3	$(5)(3) + 14 = 29$
4	$(5)(4) + 14 = 34$

El valor de x que cumple la igualdad $5x+14=34$ es 4. Por tanto se compraron **4 lápices**.

La igualdad de dos expresiones matemáticas que incluye una variable, como $5x+14=34$, se llama **ecuación de primer grado**. En una ecuación, el valor desconocido se representa por una **variable** x (a la que se llama también incógnita) y las expresiones a ambos lados del signo igual ($=$) se llaman **lados.**

lados

$$5x+14=34$$

variable

C

Resolver una ecuación de primer grado con una variable es obtener el número que al sustituirlo en la ecuación cumpla la igualdad. Ese número se llama **solución de la ecuación**.

Ejemplo Identifique la ecuación que tiene al número 5 como solución.

a) $3x-5=10$ b) $2x+18=20$

a) Se sustituye $x=5$ en:

$3x-5=(3)(5)-5=15-5=10$

Verificándose que, **5 es solución de $3x-5=10$**

b) Si se sustituye $x=5$ en:

$2x+18=(2)(5)+18=10+18=28\neq20$

Se encuentra que, **5 no es solución de $2x+18=20$**

"$\neq$" se lee "es distinto de"

E

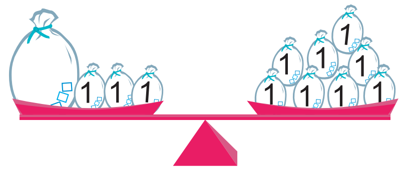
Identifique la ecuación que tiene al número 3 como solución.

a) $4x+10=22$ b) $-6x+1=17$ c) $-3x+1=6x-17$

Contenido 3: Propiedades de la igualdad

P

Encuentre los kg de azúcar que debe contener la bolsa grande para mantener en equilibrio la balanza de la figura.

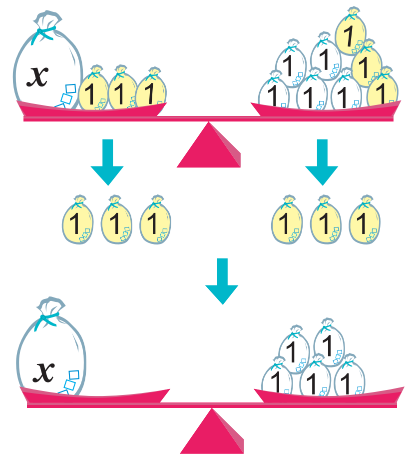


S

Sea x el peso desconocido en kg de la bolsa grande de azúcar. Se sabe que el peso en los dos platillos de la balanza es igual, por lo que se puede plantear la siguiente ecuación:

$$x+3=8$$
$$x+3-3=8-3$$
$$x=5$$

La bolsa grande contiene **5kg.**



C

Propiedades de la igualdad

Propiedad 1	Si $a=b$, entonces $a+c=b+c$.	Si se suma el mismo número en ambos lados de una igualdad esta se mantiene.
Propiedad 2	Si $a=b$, entonces $a-c=b-c$.	Si se resta el mismo número en ambos lados de una igualdad esta se mantiene.
Propiedad 3	Si $a=b$, entonces $ac=bc$.	Si se multiplica el mismo número en ambos lados de una igualdad esta se mantiene.
Propiedad 4	Si $a=b$, entonces $\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$.	Si se divide por el mismo número, con $c\neq 0$, en ambos lados de una igualdad esta se mantiene.
Propiedad 5	Si $a=b$, entonces $b=a$.	Si se intercambian el lado izquierdo y el derecho, la igualdad se mantiene.

Para resolver una ecuación se busca que sólo la variable quede en el lado izquierdo aplicando las propiedades de la igualdad.

Ejemplo Resuelva la ecuación $x-4=1$, aplicando la propiedad 1.

$$x-4=1$$
$$x-4+4=1+4 \qquad \text{Se suma 4 a ambos lados de la ecuación}$$
$$\boldsymbol{x=5}$$

E

Resuelva las siguientes ecuaciones aplicando la propiedad 1:

a) $x-9=3$ b) $x-12=-9$ c) $x-8=-10$

Contenido 4: Solución de ecuaciones de primer grado utilizando propiedades de la igualdad

Ejemplo 1 Resuelva la ecuación $x+12=10$, aplicando la propiedad 2.

$x+12=10$

$x+12-12=10-12$ Se resta 12 en ambos lados de la ecuación

$x=-2$

Propiedad 2
Si $a=b$, entonces $a-c=b-c$.

E1

Resuelva las siguientes ecuaciones de primer grado aplicando la propiedad 2:

a) $x+7=-1$ b) $x+4=-1$ c) $x+6=9$

Ejemplo 2 Resuelva la ecuación $\frac{x}{5}=4$, aplicando la propiedad 3.

$\frac{x}{5}=4$

$\frac{x}{5}(5)=(4)(5)$ Se multiplica 5 en ambos lados de la ecuación

$x=20$

Propiedad 3
Si $a=b$, entonces $ac=bc$.

E2

Resuelva las siguiente ecuaciones de primer grado aplicando la propiedad 3:

a) $\frac{x}{7}=2$ b) $\frac{x}{5}=-4$ c) $\frac{x}{-10}=-3$

Ejemplo 3 Resuelva la ecuación $3x=18$, aplicando la propiedad 4.

$3x=18$

$\frac{3}{3}x=\frac{18}{3}$ Se divide por 3 en ambos lados de la ecuación

$x=6$

Propiedad 4
Si $a=b$, entonces $\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$, $c\neq 0$.

E3

Resuelva las siguientes ecuaciones de primer grado aplicando la propiedad 4:

a) $4x=40$ b) $8x=24$ c) $-x=6$

Ejemplo 4 Resuelva la ecuación $11=x+15$, aplicando las propiedades 2 y 5.

$11=x+15$

$x+15=11$ Se intercambian el lado izquierdo y el derecho

$x+15-15=11-15$ Se resta 15 en ambos lados de la ecuación

$x=-4$

Propiedad 5
Si $a=b$, entonces $b=a$.

E4

Resuelva las siguientes ecuaciones de primer grado aplicando las propiedades:

a) $22=x+8$ b) $-18=x-4$ c) $-16=-x+5$

Contenido 5: Comprobemos lo aprendido 1

E

1. Complete con un número el recuadro de los siguientes ejercicios para hacer cumplir la igualdad:

   a) $18 + \square = 30$ b) $-24 - \square = -25$ c) $3(\square) = 6$

   d) $23 - \square = -12$ e) $-20 + \square = 38$ f) $(\square)(4) = -28$

2. Investigue si el número 3 es solución de algunas de las siguientes ecuaciones:

   a) $2x + 8 = 16$ b) $-5x + 1 = -14$

   c) $4x - 4 = 5x - 7$ d) $-3x - 12 = -21$

3. Resuelva las siguientes ecuaciones, aplicando la propiedad 1 de la igualdad:

   a) $x - 19 = 13$ b) $x - 14 = -3$ c) $x - 6 = -5$ d) $x - 15 = 12$

4. Resuelva las siguientes ecuaciones, aplicando la propiedad 2 de la igualdad:

   a) $x + 8 = -2$ b) $x + 12 = 4$ c) $x + 20 = -18$ d) $x + 30 = 20$

5. Resuelva las siguientes ecuaciones, aplicando la propiedad 3 de la igualdad:

   a) $\frac{x}{4} = 5$ b) $\frac{x}{6} = -3$ c) $\frac{x}{-8} = -5$ d) $\frac{x}{3} = 7$

6. Resuelva las siguientes ecuaciones, aplicando la propiedad 4 de la igualdad:

   a) $3x = 30$ b) $5x = 45$ c) $-x = 13$ d) $9x = 54$

7. Resuelva las siguientes ecuaciones, aplicando las propiedades 1 y 5 de la igualdad:

   a) $40 = x - 12$ b) $-24 = x - 16$ c) $16 = x - 5$ d) $-18 = x - 20$

Sección 2: Solución de ecuaciones de primer grado

Contenido 1: Transposición de términos en una ecuación de primer grado

P

Resuelva la ecuación $x+4=10$.

S

Se aplica la propiedad 2 de la igualdad:

$$x+4=10$$
$$x=10-4$$
$$\boldsymbol{x=6}$$

Se observa que el término que estaba en el lado izquierdo $(+4)$ pasa al lado derecho con el signo cambiado (-4)

C

Cuando un término de una ecuación pasa de un lado a otro, su signo cambia. Este proceso se conoce como **transposición de términos.**

Ejemplo Resuelva la ecuación $x-6=-18$ por transposición de términos.

$$x-6=-18$$
$$x=-18+6 \quad \text{Se transpone } -6$$
$$\boldsymbol{x=-12}$$

E

1. Complete con un número el recuadro de los siguientes ejercicios para hacer cumplir la igualdad:

a) $x+2=8$

$x=8-\square$

$x=\square$

b) $2-x=-12$

$-x=-12-\square$

$-x=\square$

$x=\square$

c) $-10=x-2$

$-x=-2+\square$

$-x=\square$

$x=\square$

2. Resuelva las siguientes ecuaciones utilizando transposición de términos:

a) $x+8=15$ b) $x-3=14$ c) $18=x+7$

Contenido 2: Ecuaciones de la forma $ax \pm b = d \pm cx$

P

Resuelva las siguientes ecuaciones de primer grado:

a) $3x + 2 = 10 - 5x$

b) $-2x - 4 = 14 + 7x$

S

a) $3x + 2 = 10 - 5x$

$3x + 5x = 10 - 2$ Se transpone $-5x$ y 2 a lados contrarios de la igualdad

$8x = 8$

$\frac{8}{8}x = \frac{8}{8}$ Se aplica la propiedad 4 de la igualdad

$\boldsymbol{x = 1}$

b) $-2x - 4 = 14 + 7x$

$-2x - 7x = 14 + 4$ Se transpone $7x$ y -4 a lados contrarios de la igualdad

$-9x = 18$

$\frac{-9}{-9}x = \frac{18}{-9}$ Se aplica la propiedad 4 de la igualdad

$\boldsymbol{x = -2}$

C

Para resolver una ecuación de la forma $ax \pm b = d \pm cx$:

1. Se transponen los términos en "x" al lado izquierdo de la ecuación y todas las cantidades conocidas al lado derecho.
2. Se reducen términos semejantes transformando la ecuación a la forma $ex = f$, con $e \neq 0$.
3. Se aplica la propiedad 4 para obtener $x = \frac{f}{e}$.

E

Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $4x - 10 = 11 - 3x$

b) $-3x - 8 = 16 + 9x$

c) $3x + 6 = 3 + 4x$

d) $-3x + 8 = 18 + 7x$

Contenido 3: Ecuaciones con signos de agrupación

P

Resuelva la siguiente ecuación de primer grado: $2(x+4)+20=18+4x$.

S

Propiedad distributiva

$a(b+c)=ab+ac$

$$2(x+4)+20=18+4x$$

$$2x+(2)(4)+20=18+4x \qquad \text{Se aplica la propiedad distributiva}$$

$$2x+8+20=18+4x$$

$$2x-4x=18-20-8 \qquad \text{Se transponen } 4x\text{, 20 y 8}$$

$$-2x=-10$$

$$\frac{-2}{-2}x=\frac{-10}{-2} \qquad \text{Se aplica la propiedad 4}$$

$$\boldsymbol{x=5}$$

C

Para resolver una ecuación de primer grado con uno o dos paréntesis:

1. Se aplica la propiedad distributiva para eliminar los paréntesis.
2. Se transponen todas las cantidades conocidas al lado derecho y las que tienen incógnita al lado izquierdo.
3. Se transforma la ecuación a la forma $ax=c$ y se aplica la propiedad 4.

Ejemplo Resuelva la ecuación $-5(3x+7)=4(-3x+6)-11$.

$$-5(3x+7)=4(-3x+6)-11$$

$$(-5)(3x)+(-5)(7)=(4)(-3x)+(4)(6)-11$$

$$-15x-35=-12x+24-11$$

$$-15x+12x=24-11+35$$

$$-3x=48$$

$$\frac{-3}{-3}x=\frac{48}{-3}$$

$$\boldsymbol{x=-16}$$

E

Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $2(x+6)+2=13+3x$ b) $-4(2x+4)=2(4x+1)-14$ c) $-3(4x+1)=5(-6x+7)-2$

Contenido 4: Ecuaciones con coeficientes decimales

P

Resuelva las siguientes ecuaciones de primer grado con coeficientes decimales:

a) $0{,}4x = 1{,}6$ b) $0{,}2x + 0{,}2 = 4{,}7 - 0{,}3x$

S

Antes de resolver las ecuaciones, se multiplican ambos lados por 10:

a) $0{,}4x = 1{,}6$

$$0{,}4x(10) = (1{,}6)(10) \qquad \text{Se aplica propiedad 3}$$
$$4x = 16$$
$$\frac{4}{4}x = \frac{16}{4} \qquad \text{Se aplica propiedad 4}$$
$$\boldsymbol{x = 4}$$

b) $0{,}2x + 0{,}2 = 4{,}7 - 0{,}3x$

$$(0{,}2x + 0{,}2)(10) = (4{,}7 - 0{,}3x)(10) \qquad \text{Se aplica propiedad 3}$$
$$2x + 2 = 47 - 3x \qquad \text{Se transpone } -3x \text{ y } 2$$
$$2x + 3x = 47 - 2$$
$$5x = 45$$
$$\frac{5}{5}x = \frac{45}{5} \qquad \text{Se aplica propiedad 4}$$
$$\boldsymbol{x = 9}$$

C

Para resolver una ecuación de primer grado con coeficientes decimales, se convierte en una ecuación con coeficientes enteros, multiplicando estos por 10 si el mayor número de cifras decimales es uno, por 100 si el mayor número de cifras decimales es dos, etc. Luego se resuelve la ecuación con coeficiente entero.

E

Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $0{,}8x = 2{,}4$ b) $0{,}5x + 0{,}8 = 2{,}6 - 0{,}4x$

c) $0{,}3x = 9{,}6$ d) $0{,}6x + 0{,}3 = 2{,}5 - 0{,}5x$

Contenido 5: Ecuaciones de la forma $\frac{a}{b}x = \frac{c}{d}$

P

Resuelva las siguientes ecuaciones de primer grado con coeficientes fraccionarios:

a) $\frac{2}{3}x = -\frac{1}{2}$

b) $-\frac{3}{5}x = \frac{6}{15}$

S

a)

$$\frac{2}{3}x = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{3}x(6) = \left(-\frac{1}{2}\right)(6)$$ Se multiplican ambos lados por el m.c.m. de 2 y 3 que es 6

$$4x = -3$$

$$\frac{4}{4}x = -\frac{3}{4}$$ Se aplica la propiedad 4

$$\boldsymbol{x = -\frac{3}{4}}$$

b)

$$-\frac{3}{5}x = \frac{6}{15}$$

$$-\frac{3}{5}x(15) = \left(\frac{6}{15}\right)(15)$$ Se multiplican ambos lados por el m.c.m. de 5 y 15 que es 15

$$-9x = 6$$

$$\frac{-9}{-9}x = \frac{6}{-9}$$ Se aplica la propiedad 4

$$\boldsymbol{x = -\frac{2}{3}}$$

C

Para resolver una ecuación de primer grado de la forma $\frac{a}{b}x = \frac{c}{d}$ con b y d distintos de cero:

1. Se multiplican ambos lados de la ecuación por el m.c.m. de los denominadores b y d.
2. Se resuelve la ecuación obtenida aplicando la propiedad 4.

E

Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{1}{4}x = -\frac{2}{3}$

b) $-\frac{5}{6}x = \frac{3}{7}$

c) $\frac{x-3}{4} = 5$

d) $-\frac{2}{5}x = -8$

Contenido 6: Comprobemos lo aprendido 2

E

1. Resuelva las siguientes ecuaciones de primer grado, aplicando transposición de términos:

   a) $3x+4=13$ b) $5x-7=23$ c) $-3x-5=-2x+4$ d) $5-3x=6x-2$

2. Resuelva las siguientes ecuaciones de primer grado con paréntesis:

   a) $4(x-3)=3x-7$ b) $3x+2(3x-1)=16$ c) $-3(4x+2)=2(-x+5)+4$

3. Resuelva las siguientes ecuaciones de primer grado con coeficientes decimales:

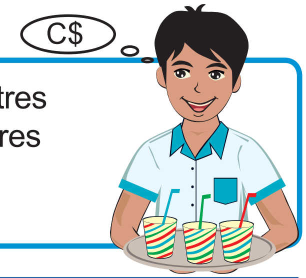
   a) $0{,}8x+0{,}2=-0{,}6$ b) $0{,}5x-1=0{,}2x+2$ c) $0{,}25x-3=0{,}5x+5$

4. Resuelva las siguientes ecuaciones de primer grado llevándolas a la forma $\frac{a}{b}x=\frac{c}{d}$, si fuese necesario:

   a) $\frac{1}{6}x-2=-\frac{x}{3}$ b) $\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}x$ c) $\frac{x-2}{2}=\frac{3+2x}{3}$

   d) $x-4=2+\frac{x}{7}$ e) $\frac{1}{4}x+2=-1+x$

Contenido 7: Aplicación de ecuaciones de primer grado (1)



P

Un vendedor de refrescos hace un balance de pérdidas o ganancias cada tres días. En el primer día ganó C$250, en el segundo perdió C$120 y en los tres días logró un total de C$600. ¿Cuánto ganó en el tercer día?

S

Sea x la ganancia obtenida en el tercer día. Se plantea la ecuación:

$$\begin{pmatrix}\text{Ganancia del}\\ \text{primer día}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\text{Pérdida del}\\ \text{segundo día}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\text{Ganancia del}\\ \text{tercer día}\end{pmatrix}=\left(\text{Total}\right)$$

$$\begin{array}{rcrcrcl} 250 & - & 120 & + & x & = & 600\\ & & 130 & + & x & = & 600\\ & & & & x & = & 600-130\\ & & & & x & = & 470 \end{array}$$

Por tanto, la ganancia en el tercer día es de **C$470**.

C

Para resolver problemas aplicando ecuaciones de primer grado:

1. Se identifica la cantidad que funcionará como variable.
2. Se escribe la ecuación de primer grado utilizando los datos del problema.
3. Se resuelve la ecuación encontrando así la respuesta del problema.

Ejemplo Andrea compró 4 cuadernos con un billete de C$500 y recibió C$180 de cambio. ¿Cuánto vale cada cuaderno?

Sea x el precio de cada cuaderno. El total a pagar por los 4 cuadernos es $4x$. Luego se plantea la ecuación.

$$\begin{pmatrix}\text{Valor del billete}\\ \text{entregado}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\text{Costo de 4}\\ \text{cuadernos}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{Cambio}\\ \text{recibido}\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rcrcl} 500 & - & 4x & = & 180\\ & - & 4x & = & 180-500\\ & & -4x & = & -320\\ & & x & = & \dfrac{-320}{-4}\\ & & x & = & 80 \end{array}$$

Por tanto, el costo de cada cuaderno es de **C$80**.

E

Resuelva los siguientes problemas aplicando ecuaciones de primer grado:

a) Una persona que vende en el mercado revisa sus cuentas cada tres días. El primer día ganó C$300, el segundo día perdió C$170 y en los tres días obtuvo una ganancia total de C$800. ¿Cuánto ganó el tercer día?

b) Juan compró 3 libras de carne con un billete de C$500 y recibió C$230 de cambio. ¿Cuánto vale una libra de carne?

Contenido 8: Aplicación de ecuaciones de primer grado (2)

P

Ricardo gasta C$ 930 al comprar un pantalón y una camisa. Sin embargo desconoce el precio de cada prenda, aunque sí sabe que el pantalón cuesta el doble del precio de la camisa.
¿Cuál es el precio de cada prenda?

S

Sea x el precio de la camisa, luego el precio del pantalón es $2x$. El total gastado es 930 córdobas, por tanto:

$$\begin{array}{ccccc} \left(\begin{array}{l}\text{Precio del}\\ \text{pantalón}\end{array}\right) & + & \left(\begin{array}{l}\text{Precio de}\\ \text{la camisa}\end{array}\right) & = & \left(\begin{array}{c}\text{Gasto}\\ \text{Total}\end{array}\right) \\ 2x & + & x & = & 930 \\ & & 3x & = & 930 \\ & & x & = & \dfrac{930}{3} \\ & & x & = & 310 \end{array}$$

Precio del pantalón
$2x = 2(310) = 620$

Por consiguiente, **el precio de la camisa es C$ 310 y el del pantalón es C$ 620.**

Ejemplo José tiene una cantidad x de córdobas y Pedro tiene C$ 2 más que José. Si entre ambos reúnen C$ 900. ¿Cuántos córdobas tiene cada uno?

Sea x la cantidad de córdobas que tiene José.
Sea $x+2$ la cantidad de córdobas que tiene Pedro.

$$\begin{array}{ccccc} \left(\begin{array}{l}\text{Cantidad de}\\ \text{córdobas de José}\end{array}\right) & + & \left(\begin{array}{l}\text{Cantidad de}\\ \text{córdobas de Pedro}\end{array}\right) & = & \left(\begin{array}{c}\text{Total}\\ \text{córdobas}\end{array}\right) \\ x & + & x+2 & = & 900 \\ 2x & + & 2 & = & 900 \\ & & 2x & = & 900-2 \\ & & x & = & \dfrac{898}{2} \\ & & x & = & 449 \end{array}$$

Pedro tiene
$x+2 = 449+2$
$= 451$ córdobas

Por consiguiente, **José tiene C$ 449 y Pedro tiene C$ 451.**

E

Resuelva los siguientes problemas aplicando ecuaciones de primer grado:

a) María gasta C$ 960 al comprar una blusa y una cartera. Se sabe que la cartera vale el doble de lo que vale la blusa. ¿Cuánto cuesta cada artículo?

b) Roberto gana x córdobas por un día de trabajo y Luis gana C$ 5 más que Roberto. Si juntos recibieron C$ 735. ¿Cuántos córdobas ganó cada uno?

Unidad 5

Proporcionalidad

Sección 1: Proporcionalidad directa

Contenido 1: Concepto de función

P

Sea y la distancia en metros recorrida por una persona en x segundos; si se conoce que avanza 2 metros por segundos.

a) Complete la tabla.

x (s)	1	2	3	4	5
y (m)					

Se escribirá:
segundo → s
metro → m

b) Escriba la expresión que representa la relación entre x y y.

S

a) Como la persona avanza 2 metros por segundo, entonces para determinar la distancia recorrida se multiplican los 2 metros por el número de segundos:

x (s)	1	2	3	4	5
y (m)	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**

¿Cómo se podría interpretar cada columna?

b) La distancia se encuentra multiplicando los 2 metros que corre por cada segundo con el número de segundos, entonces: $y = 2x$.

C

Si al dar un valor a x se determina un único valor de y, se dice que **y está en función de x.**

Ejemplo 1 Sea y el cambio en córdobas recibido después de comprar con un billete de C\$ 10 un producto que vale C\$$x$.

a) Complete la tabla

x (C\$)	1	2	3	4	5
y (C\$)					

b) Escriba la relación entre x y y.

a) Para determinar el cambio recibido y se resta de 10 el precio x del producto comprado.

x (C\$)	1	2	3	4	5
y (C\$)	**9**	**8**	**7**	**6**	**5**

b) Se observa que cada valor de x determina un único valor de y, entonces y está en función de x. Esta relación se expresa con la igualdad $y = 10 - x$.

Ejemplo 2 ¿Es posible expresar la cantidad y de camisetas que posee una persona en función del número x de pantalones que tiene en su guardarropa?

Evidentemente, el número de pantalones de una persona no influye sobre el número de camisas que pueda tener. Por tanto, no es posible.

E

1. Escriba la expresión que representa la relación entre x y y.

a) Si un atleta recorre 45 metros por minuto, la distancia y en metros que recorre en x minutos.

b) En una bolsa que contiene 20 jocotes, el número y de jocotes que quedan después de sacar x de ellos.

2. Identifique en cuáles de las siguientes situaciones y está en función de x:

a) La distancia y en kilómetros recorrida por una carro en x horas, si este avanza 60 kilómetros por hora.

b) La cantidad y de puertas en una casa, si viven en esta x personas.

c) El dinero y en córdobas que valen x naranjas, si una de estas vale C\$ 4.

Contenido 2: Concepto de proporcionalidad directa

P

Un ciclista avanza 3 metros por segundo. Sean y los metros que recorre en x segundos.

a) Complete la tabla

x (s)	1	2	3	4	5	6	7
y (m)							

b) ¿Cuántos metros avanza en 4 segundos? ¿Y en 7 segundos?

c) Escriba la expresión que representa la relación entre la distancia y en metros y la cantidad x de segundos.

S

a) Si el ciclista avanza cada segundo 3 metros, entonces se multiplica por 3 la cantidad de segundos:

x (s)	1	2	3	4	5	6	7
y (m)	$(3)(1)=\mathbf{3}$	$(3)(2)=\mathbf{6}$	$(3)(3)=\mathbf{9}$	$(3)(4)=\mathbf{12}$	$(3)(5)=\mathbf{15}$	$(3)(6)=\mathbf{18}$	$(3)(7)=\mathbf{21}$

b) Se observa que el ciclista avanza **12 metros en 4 segundos** y **21 metros en 7 segundos.**

c) De la tabla se obtiene la expresión:

Distancia $=$ (3m por segundos)$\times$(cantidad de segundos)

La igualdad anterior se expresa utilizando las variables x y y en la forma $y=3x$.

Se dice que y está en función de x o que y es directamente proporcional a x.

C

Si dos variables x y y están relacionadas por la igualdad:

$$y=ax$$

se dice que y **es directamente proporcional a** x.
Al número a se le llama **constante de proporcionalidad**.

E

Indique en cada situación si y es directamente proporcional a x; si ese es el caso, encuentre la constante de proporcionalidad.

a) La distancia y (en metros) que recorre una moto en x segundos, si avanza 20m por segundo.

b) La cantidad total y de cuadernos en x cajas, si en cada caja hay 15 cuadernos.

c) El costo C\$ y de comprar x galletas a C\$10 cada galleta.

d) El área y en cm^2 de un rectángulo cuya base mide 4cm y la altura $x\,cm$.

Recuerda que en un rectángulo:
Área $=$ (Base)(Altura)

Contenido 3: Relación de proporcionalidad directa en forma de ecuación

P

En un supermercado 6 naranjas valen C$24.

a) ¿Cuánto vale una naranja?

b) Complete la tabla

x (naranjas)	0	1	2	3	4	5	6
y (C$)							24

c) ¿Es el costo total y en córdobas de las naranjas directamente proporcional a la cantidad x de naranjas compradas?, ¿por qué?

d) Si la cantidad de naranjas se duplica, ¿qué pasa con el precio? ¿y si se triplica?

S

a) Para saber el precio de una naranja se divide el costo total entre la cantidad de naranjas que se compraron:

Precio de una naranja $=24 \div 6 = \mathbf{4}$ **(C$)**.

Observe que:

Costo total = $\left(\text{Precio de una naranja}\right) \times \left(\text{Cantidad de naranjas}\right)$

b) La tabla completa es:

x (naranjas)	0	1	2	3	4	5	6
y (C$)	$(4)(0)=\mathbf{0}$	$(4)(1)=\mathbf{4}$	$(4)(2)=\mathbf{8}$	$(4)(3)=\mathbf{12}$	$(4)(4)=\mathbf{16}$	$(4)(5)=\mathbf{20}$	$(4)(6)=\mathbf{24}$

c) El costo total y en córdobas de las naranjas **sí es directamente proporcional** a la cantidad x de naranjas compradas porque y se puede escribir en función de x mediante la ecuación $y=4x$.

Observe que:

$\frac{4}{1} = 4$

$\frac{8}{2} = 4$

$\vdots$

$\frac{24}{6} = 4$

d) Si la cantidad de naranjas se duplica (se multiplica por 2), el costo total también se duplica.

Si la cantidad de naranjas se triplica (se multiplica por 3), el costo total también se triplica.

×2 ×3 ×4

x (naranjas)	1	2	3	4
y (C$)	4	8	12	16

×2 ×3 ×4

C

Para establecer la ecuación de proporcionalidad directa entre las variables x y y:

1. Se calcula la constante de proporcionalidad a con dos valores dados de las variables x y y:
$$\frac{y}{x} = a$$
2. Se sustituye el valor de a en la expresión $y = ax$

E

Encuentre la ecuación que indique la relación entre x y y utilizando los valores dados y complete la tabla en cada caso sabiendo que y es directamente proporcional a x.

a)

x	0	1	2	3	4	5
y				15		

b)

x	0	1	2	3	4	5
y						10

c)

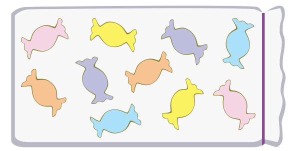
x	0	1	2	3	4	5
y			18			

Contenido 4: Proporcionalidad directa con $a > 0$

P

Carla compra en el supermercado bolsas de caramelos, con 10 unidades cada una.

Si x representa la cantidad de bolsas compradas y y el número de caramelos en x bolsas:



a) ¿Se puede establecer una relación de proporcionalidad directa entre x y y?

b) Complete la tabla

x (bolsas)	0	1	2	3	4	5	6
y (caramelos)							

S

a) Cada bolsa comprada tiene 10 caramelos. Entonces:

(Total de caramelos) $=$ (10) $\times$ (cantidad de bolsas)

Se establece inmediatamente una relación de proporcionalidad directa entre y y x con la ecuación:

$$y = 10x$$

b) Se sustituye cada valor dado de x en la expresión anterior para completar la tabla.

x (bolsas)	0	1	2	3	4	5	6
y (caramelos)	**0**	**10**	**20**	**30**	**40**	**50**	**60**

E

Establezca la relación de proporcionalidad directa entre las variables y complete la tabla.

a) La cantidad y de jabones en x paquetes, si cada uno de estos contiene 3 jabones.

x (paquetes)	0	1	2	3	4	5	6
y (jabones)							

b) El número y de estudiantes en x grupos de 7 estudiantes cada uno.

x (grupos)	0	1	2	3	4	5	6
y (estudiantes)							

c) El área y en cm^2 de un rectángulo de $5cm$ de base y $x\,cm$ de altura.

x (cm)	0	1	2	3	4	5	6
y (cm^2)							

Contenido 5: Proporcionalidad directa con valores negativos

Ricardo corre $2m$ por segundo hacia el este. Si x representa el tiempo (en segundos) y y la distancia (en metros) a la que se encuentra del punto de referencia.

a) Complete la tabla.

x (s)	−3	−2	−1	0	1	2	3
y (m)							

b) ¿A qué distancia se encuentra 3 segundos después de pasar por el punto de referencia?

c) ¿A qué distancia se encontraba 2 segundos antes de haber pasado por el punto de referencia?

d) Escriba y en función de x.

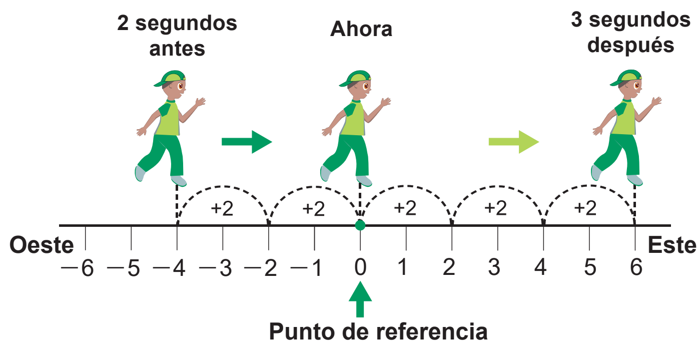
e) Si el tiempo se duplica, ¿qué sucede con la distancia recorrida?, ¿y si se triplica?

Para este problema convenimos:

El tiempo antes de que Ricardo pase por el punto de referencia se considerará negativo. Una posición al oeste de dicho punto será negativa y al este, positiva.

a)

x (s)	−3	−2	−1	0	1	2	3
y (m)	**−6**	**−4**	**−2**	**0**	**2**	**4**	**6**



b) Como Ricardo corre $2m$ cada segundo, entonces en 3 segundos se encuentra a **6m al este** del punto de referencia, porque

$$(2)(+3)=+6.$$

c) Los 2 segundos antes de haber pasado por el punto de referencia se representan con −2. Si corre $2m$ cada segundo, entonces:

$$(2)(-2)=-4.$$

Luego, Ricardo se encontraba a **4m al oeste** del punto de referencia.

d) Según los dos incisos anteriores:

(Distancia recorrida en metros) = (Velocidad constante de $2m/s$) × (tiempo)

Entonces y se puede expresar en función de x como $\boldsymbol{y=2x}$. Esto significa que y es directamente proporcional a x.

e) Se observa en la tabla de abajo que si el tiempo se duplica, la distancia recorrida también se duplica; si el tiempo se triplica, la distancia también se triplica.

x (s)	−3	−2	−1	0	1	2	3
y (m)	−6	−4	−2	0	2	4	6

C

Dos variables directamente proporcionales continúan siéndolo aunque las variables tomen valores negativos.

Ejemplo

Si y es directamente proporcional a x, escriba y en la forma $y = ax$, después complete la tabla.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y						3			

De la tabla se tiene que $y=3$ cuando $x=1$, y como y es directamente proporcional a x, entonces se calcula la constante de proporcionalidad:

$$a = \frac{3}{1} = 3$$

Pudiéndose escribir a y en la forma $y = 3x$.

Se sustituyen los valores de x en la expresión anterior para encontrar los de y.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	**-12**	**-9**	**-6**	**-3**	**0**	**3**	**6**	**9**	**12**

E

Suponiendo que y es directamente proporcional a x, escriba y en la forma $y=ax$ y complete cada tabla

a)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y						5			

b)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y							8		

Contenido 6: Plano cartesiano

Definición

El **plano cartesiano** es un plano dotado de un sistema de coordenadas rectangulares que está formado por dos rectas perpendiculares, una horizontal y otra vertical, llamadas **ejes**, que se intersectan en un punto O llamado **origen**.

La recta horizontal se conoce como **eje de las x o de las abscisas** y la recta vertical como **eje de las y o de las ordenadas** (véase la figura).

Cada punto del plano queda determinado por el **par ordenado** (x, y); a x se le llama **primera coordenada** y a y **segunda coordenada**.

Los valores del eje x ubicados:

a la derecha de O son positivos.

a la izquierda de O son negativos.

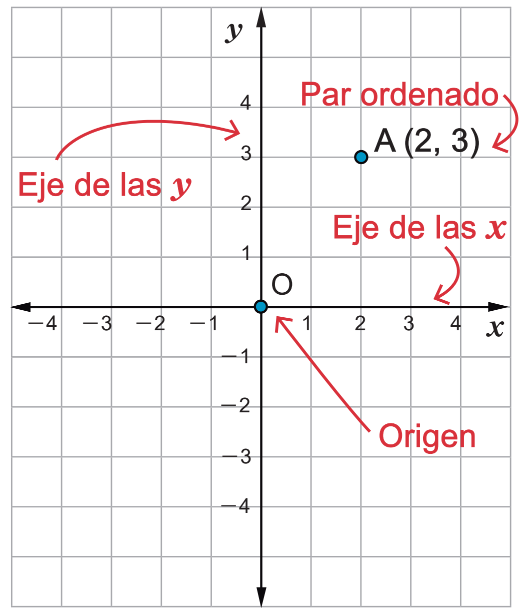
Los valores del eje y ubicados:

arriba de O son positivos.

debajo de O son negativos.

Puede verse en la figura el punto A (2, 3).

El par ordenado del origen es (0, 0).



P

Ubique en el plano cartesiano las parejas de valores dados.

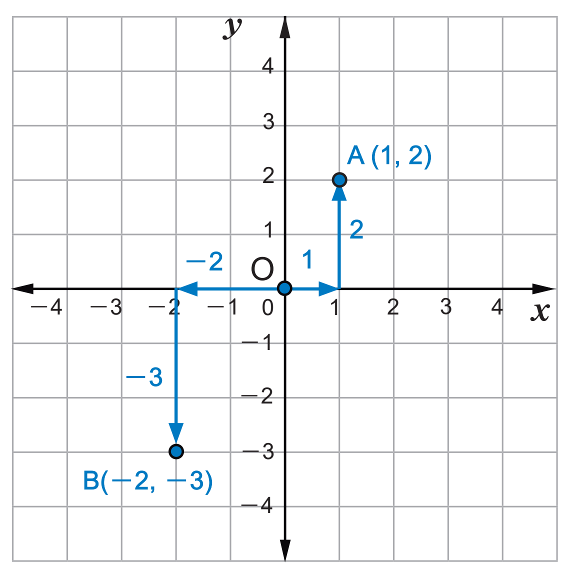
a) A(1, 2)

b) B(−2, −3)

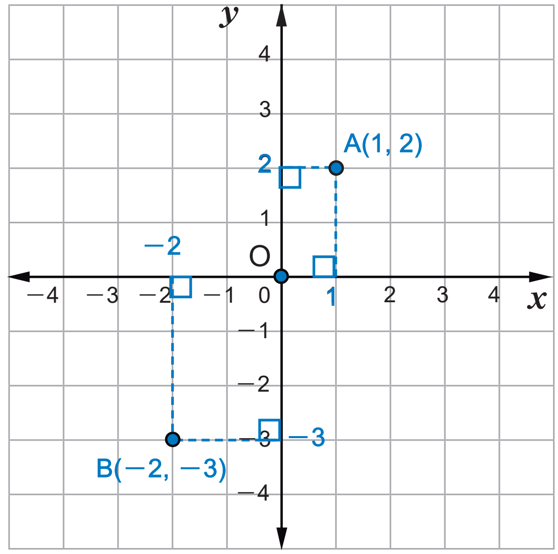
S

a) El punto A(1, 2) queda ubicado si se desplaza 1 unidad sobre el eje x a la derecha del origen y a continuación dos unidades hacia arriba paralelo al eje y.

b) Para ubicar el punto B(−2, −3) se desplaza 2 unidades sobre el eje x, a la izquierda del origen, y 3 unidades hacia abajo de O paralelo al eje y.



Otra forma:



C

Para ubicar un punto (x, y) en el plano se ubica horizontalmente el valor de x y de ese punto se ubica verticalmente el valor de y.

E

a) Escriba los pares ordenados que corresponden a los puntos G, H, I y J de la figura.

b) Ubique en el mismo plano cartesiano los puntos:

A(2, 5),

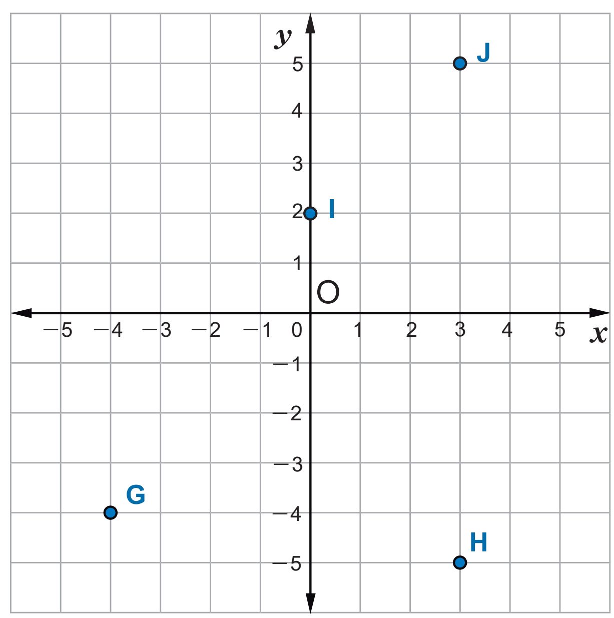
B(−3, −1),

C(2, −3),

D(−1, 4),

E(3, 0),

F(0, −2).



Contenido 7: Gráfica de la proporcionalidad directa con $a>0$

P

Si y es directamente proporcional a x y se puede escribir en la forma $y=2x$, complete la tabla y ubique los puntos obtenidos en el plano cartesiano.
¿Qué gráfica originan los puntos?

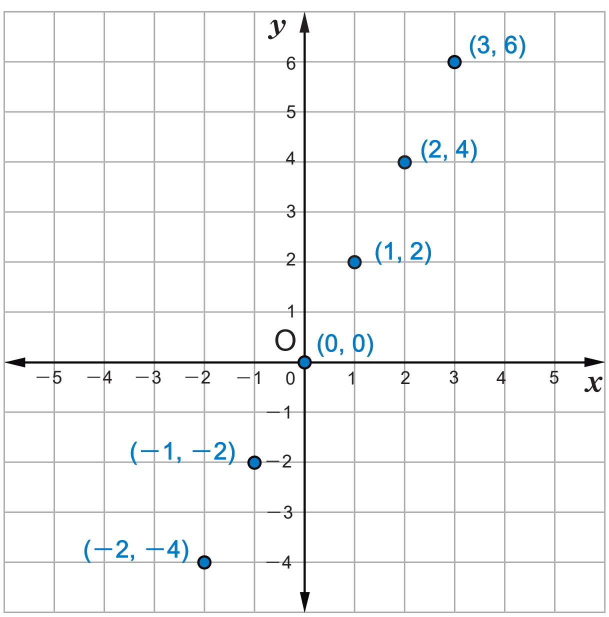
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

S

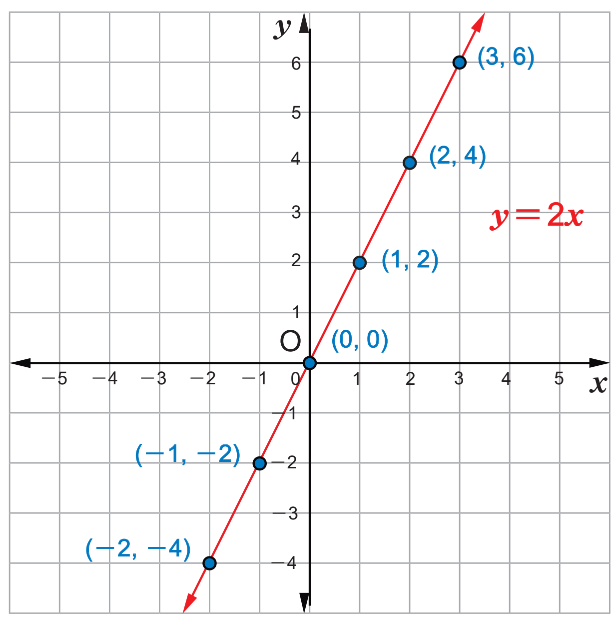
Se completa la tabla con los valores encontrados para y mediante sustituciones de x: por ejemplo, si $x=2$, $y=(2)(2)=4$, formando el par (2, 4).

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	**-6**	**-4**	**-2**	**0**	**2**	**4**	**6**

Se ubican los puntos correspondientes en el plano cartesiano:



Se unen todos los puntos mediante una línea recta:



C

Al unir los puntos procedentes de una tabla de valores de $y=ax$ con $a>0$ se forma una recta, llamada **gráfica** de la proporcionalidad directa.

La gráfica de $y=ax$ con $a>0$ pasa por el origen.

E

En cada inciso complete la tabla y trace la gráfica

a) $y=3x$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

b) $y=4x$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

Observación

Gráfica de la proporcionalidad directa con $a>0$ y valores decimales para x

P

Si y es directamente proporcional a x y se puede escribir de la forma $y=2x$. Complete la tabla y ubique los puntos en el plano cartesiano. ¿Qué figura van formando los puntos?

x	-3	$-2,5$	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y													

S

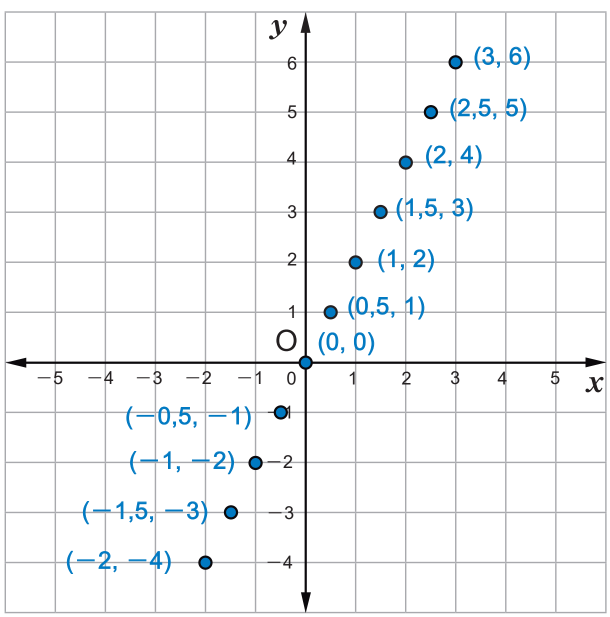
Se completa la tabla con los valores encontrados para y mediante sustituciones de x en la ecuación $y=2x$. Por ejemplo:

Si $x=-2$, $y=(2)(-2)=-4$, formando el par $(2, -4)$.

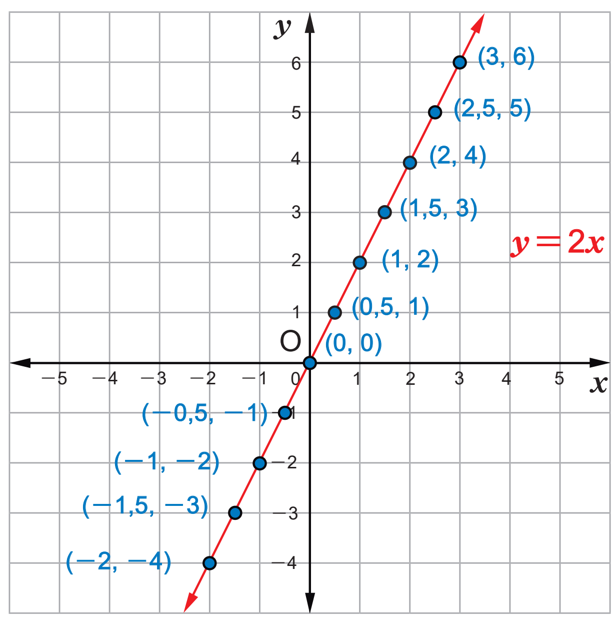
Si $x=1{,}5$, $y=(2)(1{,}5)=3$, formando el par $(1{,}5 , 3)$.

x	-3	$-2,5$	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y	**-6**	**-5**	**-4**	**-3**	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

Se ubican los puntos correspondientes en el plano cartesiano:



Se unen todos los puntos mediante una línea recta:



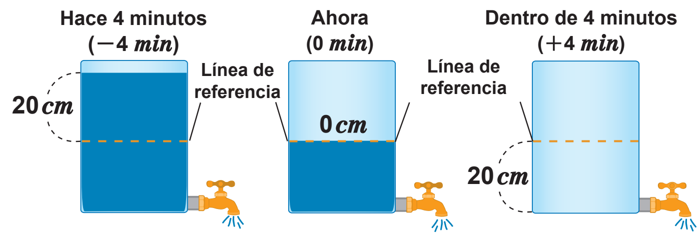
Contenido 8: Proporcionalidad directa con $a<0$

P

En un recipiente el nivel del agua alcanza una altura de 20 cm sobre cierta línea de referencia. Hace 4 minutos se abrió la llave provocando una disminución del nivel del agua de 5 cm por minuto. Según la ilustración la línea de referencia es la altura del nivel del agua que hay ahora en el recipiente y se tomará como 0 cm. La variable x representa el tiempo en minutos y y es la altura del nivel del agua (en centímetros) del recipiente con respecto a la línea de referencia.

a) Complete la tabla.

$x\,(min)$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y\,(cm)$	20					-5			



b) ¿Cuál es la altura del nivel del agua con respecto a la línea de referencia luego de 3 minutos de haber abierto la llave?

c) ¿Es y directamente proporcional a x?

S

a) Hace 4 minutos ($x=-4$) el agua del recipiente alcanzaba una altura de 20 cm sobre la línea de referencia; al abrir la llave la altura va disminuyendo 5 cm cada minuto.

Entonces:

$x\,(min)$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y\,(cm)$	20	15	10	5	0	-5	-10	-15	-20

b) En la tabla $x=3$, $y=-15$ significa que dentro de 3 minutos la altura del nivel del agua estará 15 cm debajo de la línea de referencia.

c) Para saber si x y y son directamente proporcionales se calculan los cocientes $\frac{y}{x}$ $(x\neq 0)$

$$\frac{20}{-4}=-5,\quad \frac{15}{-3}=-5,\quad \frac{10}{-2}=-5,\quad \frac{5}{-1}=-5,$$

$x\neq 0$ se lee
"x es distinto de cero"

$$\frac{-5}{1}=-5,\quad \frac{-10}{2}=-5,\quad \frac{-15}{3}=-5,\quad \frac{-20}{4}=-5$$

Como todos los cocientes dan -5, y es directamente proporcional a x. La constante de proporcionalidad es $a=-5$. Entonces y se puede escribir en función de x como:

$$y=-5x$$

C

En la proporcionalidad directa la constante de proporcionalidad puede tomar valores negativos.

E

1. Resuelva el problema anterior, pero ahora la altura del nivel del agua disminuye $4\,cm$ por minuto cuando la llave está abierta.

   a) Complete la tabla

$x\,(min)$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y\,(cm)$	16				0	-4			

   b) Escriba y en función de x mediante una ecuación de la forma $y = ax$.

2. Complete cada tabla asumiendo que y es directamente proporcional a x y escriba a y en la forma $y = ax$.

   a)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y					0	-2			

   b)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y					0	-3			

Contenido 9: Gráfica de la proporcionalidad directa con $a<0$

P

Si y es directamente proporcional a x y se puede escribir en la forma $y=-2x$, complete la tabla y ubique los puntos que resulten en el plano cartesiano. ¿Qué gráfica generan los puntos?

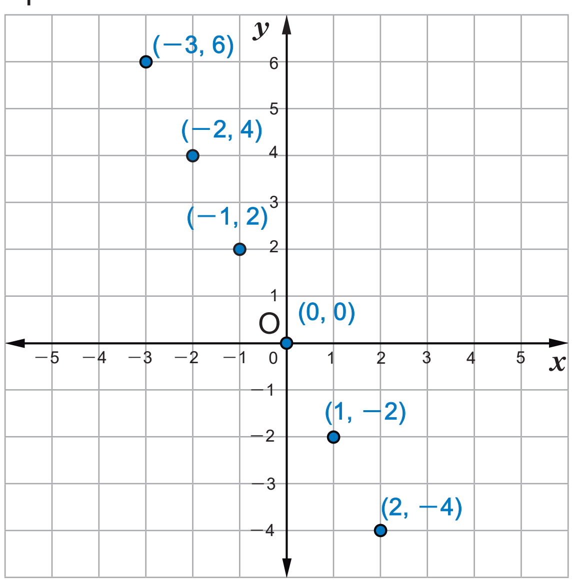
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

S

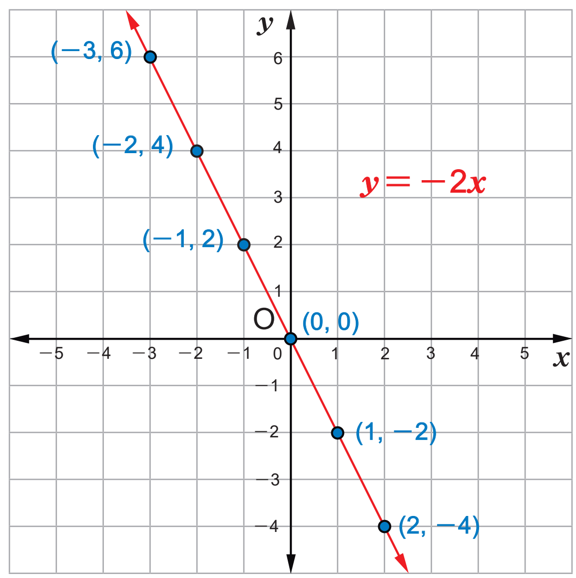
Se completa la tabla con los valores encontrados para y mediante sustituciones de x en la ecuación $y=-2x$. Por ejemplo: si $x=-3$, $y=(-2)(-3)=6$; si $x=1$, $y=(-2)(1)=-2$. Los puntos que se determinan son $(-3, 6)$ y $(1, -2)$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	**6**	**4**	**2**	**0**	**-2**	**-4**	**-6**

Se ubican los puntos correspondientes en el plano cartesiano:



Se unen todos los puntos mediante una línea recta:



C

Al unir los puntos que proceden de una tabla de valores para $y=ax$ con $a<0$ la gráfica de la proporcionalidad directa que se forma es una recta, que pasa por el origen.

E

Complete la tabla en cada inciso y trace en el plano cartesiano la gráfica originada por los puntos encontrados.

a) $y=-4x$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

b) $y=-3x$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

Contenido 10: Gráfica de la proporcionalidad directa ($a>0$ y $a<0$) a partir de dos puntos

P

Grafique las ecuaciones de las proporcionalidades directas $y=3x$ y $y=-4x$.

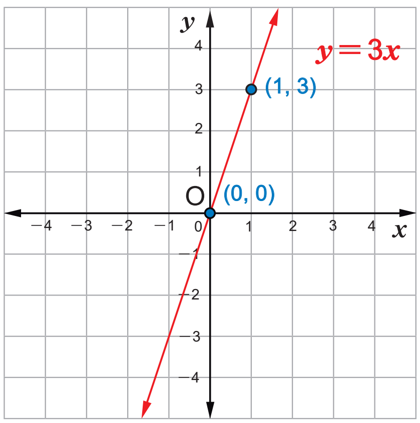
S

Se sabe que la gráfica de la ecuación proporcionalidad directa pasa por el origen, así que para trazarla solamente se determina otro punto.

Si se hace $x=1$, en la primera ecuación se tiene

$$y=(3)(1)=3$$

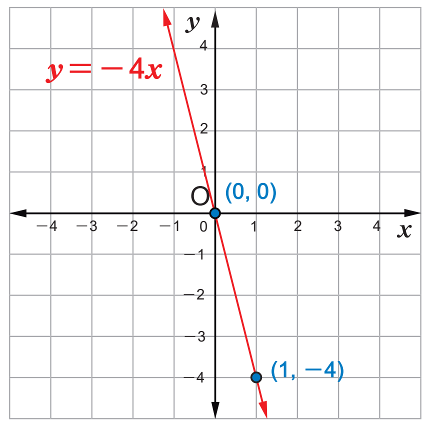
Luego, la gráfica pasa además por el punto (1, 3)



Si se hace $x=1$, en la segunda ecuación se obtiene

$$y=(-4)(1)=-4$$

Por lo tanto, la gráfica pasa por el punto (1, -4)



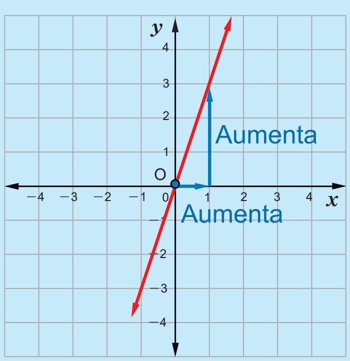
C

Para graficar la proporcionalidad directa $y=ax$:

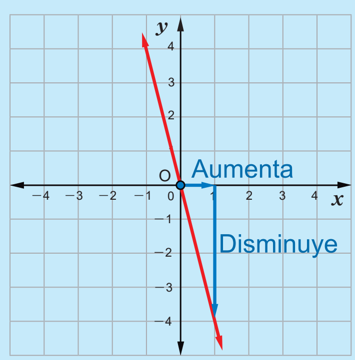
1. Se ubica el origen en el plano cartesiano y cualquier otro punto (x, y) que cumpla la relación $y=ax$.
2. Se traza la línea recta que pasa por esos dos puntos.

En la gráfica de $y=ax$:

Si $a>0$, la gráfica **crece** hacia la derecha



Si $a<0$, la gráfica **decrece** hacia la derecha



E

Trace la gráfica de:

a) $y=5x$ b) $y=6x$ c) $y=-5x$ d) $y=-x$

Contenido 11: Intervalos numéricos

P

Ubique en la recta numérica los números con las propiedades indicadas

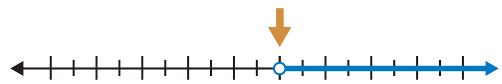
a) mayores que 2
b) menores que -3
c) mayores o iguales que -1
d) menores o iguales que 4
e) mayores que 1 y menores que 6

○ ➡ Si la variable no toma ese valor

● ➡ Si la variable toma ese valor

S

a) En la recta numérica los números mayores que 2 se encuentran a la derecha del 2:

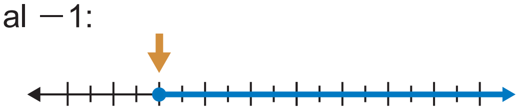


La expresión "un número x es mayor que 2" se escribe simbólicamente como $x > 2$.

b) En la recta numérica los números menores que -3 se encuentran a la izquierda del -3:

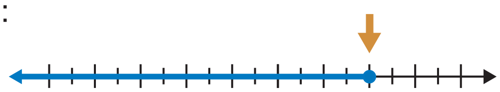
La expresión "un número x es menor que -3" se escribe simbólicamente como $x < -3$.

c) En la recta numérica los números mayores o iguales que -1 se encuentran a la derecha del -1, incluyendo al -1:



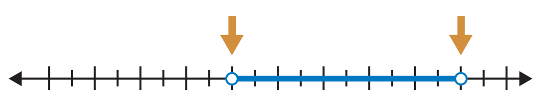
La expresión "un número x es mayor o igual que -1" se escribe simbólicamente como $x \geq -1$.

d) En la recta numérica "los números menores o iguales que 4" se encuentran a la izquierda del 4, incluyendo al 4:



La expresión "un número x es menor o igual que 4" se escribe simbólicamente como $x \leq 4$.

e) En la recta numérica los números mayores que 1 y menores que 6 se encuentran entre 1 y 6:



La expresión "x es un número mayor que 1 y menor que 6" se escribe simbólicamente como $1 < x < 6$.

C

Expresiones como $x > 2$, $x < -3$, $x \geq -1$, $x \leq 4$, y $1 < x < 6$ representan conjuntos de números llamados **intervalos numéricos**.

Ejemplo Observe con atención la siguiente tabla.

	Se lee	Representación en la recta numérica
$x < 1$	x es menor que 1	
$x > -3$	x es mayor que -3	
$x \leq 4$	x es menor o igual que 4	
$x \geq -2$	x es mayor o igual que -2	
$-1 < x < 3$	x es mayor que -1 y menor que 3	

E

Complete la tabla tomando como pauta el ejemplo anterior.

	Se lee	Representación en la recta numérica
$x < 3$		
	x es mayor o igual que -6	
$-5 < x < 9$		
		

Contenido 12: Gráfica de la proporcionalidad directa con $b \leq x \leq c$

P

Si Carolina camina 2 km por hora hacia el parque que se encuentra a 6 km de su casa:

a) Exprese la variable y (kilómetros caminados) en función de la variable x (horas que camina) de la forma $y=ax$.

b) ¿En cuántas horas llega al parque desde su casa?

c) Determine los valores que puede tomar x.

d) Trace la gráfica.

e) Determine los valores que puede tomar y.

S

a) Como Carolina camina 2 km cada hora, entonces

$$y=2x$$

b) Para saber en cuanto tiempo llega al parque (en este caso $y=6$) se resuelve la ecuación:

$$2x = 6$$
$$x = \frac{6}{2}$$
$$x = 3$$

Luego, Carolina llega en **3 horas** al parque saliendo desde su casa.

c) Se ha acordado que x representa las horas que Carolina camina, si aún no ha salido de casa $x=0$ que es el valor mínimo y del inciso b) se sabe que llega al parque en 3 horas, siendo este el valor máximo ($x=3$). Esto se expresa como:

$$\mathbf{0 \leq x \leq 3}$$

d) Cuando $x=0$:

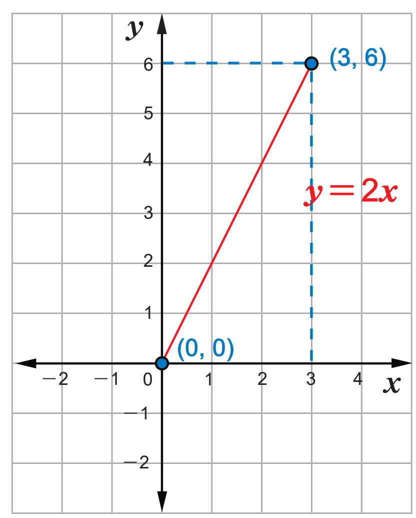
$$y = (2)(0) = 0$$

Entonces, $y=0$, obteniendo el punto (0, 0)

y cuando $x=3$:

$$y = (2)(3) = 6$$

Entonces, $y=6$. El otro punto es (3, 6).



e) El parque se encuentra a 6 km de la casa de Carolina, entonces la distancia que puede caminar está entre 0 km (no ha salido de casa) hasta 6 km (llega al parque). Esto se puede expresar como:

$$\mathbf{0 \leq y \leq 6}$$

En la gráfica se puede identificar los valores que toma y.

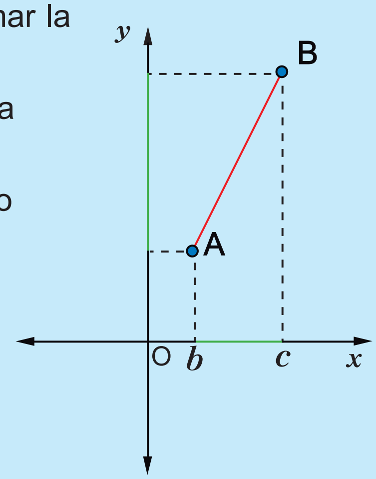
C

El **dominio** de una función son todos los valores que puede tomar la variable x.

El **rango** de una función son todos los valores que puede tomar la variable y.

Para trazar la gráfica de la proporcionalidad directa $y=ax$ cuando $b \leq x \leq c$:

1. Se determinan los valores de y correspondientes a $x=b$ y $x=c$.
2. Se ubican los dos puntos A y B en el plano.
3. Se traza el segmento que une los dos puntos.



Ejemplo Trace la gráfica de $y=-5x$, con $-2 \leq x \leq 1$ y determine dominio, rango.

Para determinar los valores que toma la variable y, se sustituye $x=-2$ y $x=-1$ en $y=-5x$:

Si $x=-2$, $y=(-5)(-2)=10$.
Obteniéndose el punto $(-2, 10)$

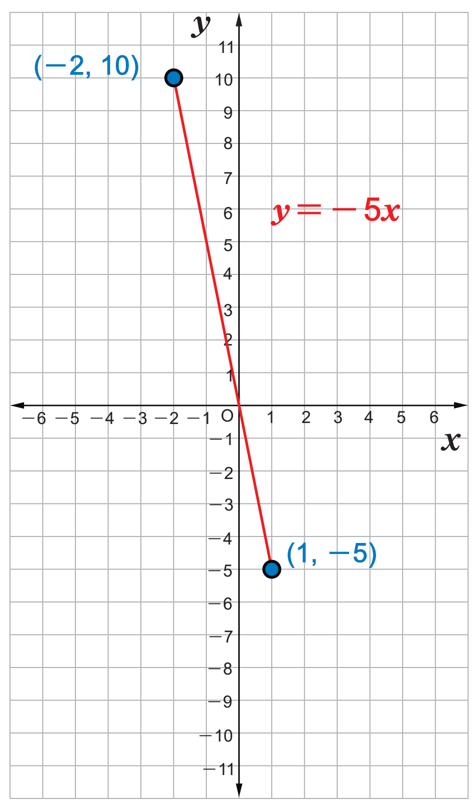
Si $x=1$, $y=(-5)(1)=-5$.
Obteniéndose el punto $(1, -5)$

Se ubican los puntos $(-2, 10)$ y $(1, -5)$ en el plano cartesiano. Luego se traza el segmento que une los dos puntos.

El dominio de la función son todos los valores que puede tomar la variable x, es decir,

$$-2 \leq x \leq 1$$

El rango es: $-5 \leq y \leq 10$.



E

Trace la gráfica, determine dominio y rango de las siguientes funciones:

a) $y=3x$, con $0 \leq x \leq 3$

b) $y=-2x$, con $-1 \leq x \leq 4$

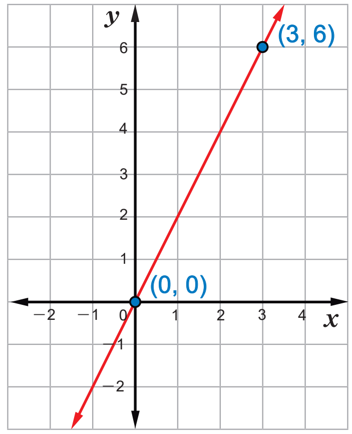
c) $y=2x$, con $-3 < x < 1$

d) $y=-4x$, con $-2 < x < 0$

Contenido 13: Ecuación de la proporcionalidad directa a partir de la gráfica

P

Determine la ecuación que representa la gráfica de la proporcionalidad directa siguiente:



S

La gráfica de la proporcionalidad directa $y = ax$ pasa por el origen (0, 0) y por (3, 6), por lo tanto

$$\frac{y}{x} = \frac{6}{3} = 2$$

constante de proporcionalidad.

La ecuación de la proporcionalidad directa es:

$$y = 2x$$

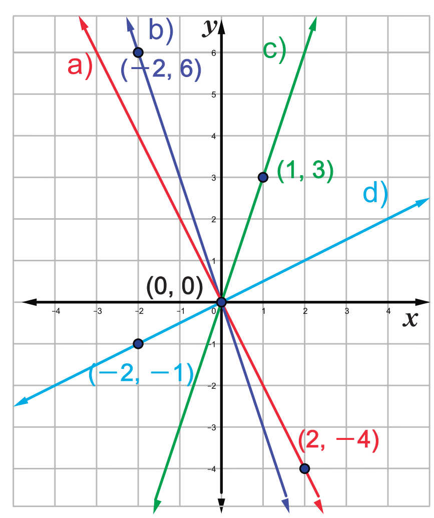
C

Para determinar la ecuación de la proporcionalidad directa a partir de su gráfica:

1. Se elige un punto de la gráfica identificando sus coordenadas.
2. Se sustituyen en la ecuación $\frac{y}{x} = a$ los valores de las coordenadas del punto elegido para calcular el valor de a.
3. Se sustituye en la ecuación $y = ax$ el valor encontrado de a en el paso 2.

E

Escribe la ecuación $y = ax$ de cada proporcionalidad directa a partir de los puntos que aparecen en cada recta.



Contenido 14: Comprobemos lo aprendido 1

1. Identifique las situaciones donde y es directamente proporcional a x.
   a) El precio y en córdobas de x litros de leche, si cada litro vale C$ 18.
   b) La cantidad y de mascotas en una casa y la cantidad x de niños que habitan en ella.
   c) El total y de galletas que hay en x bolsas, si en cada bolsa hay 6 galletas.
   d) La talla y de zapatos de una persona y su edad x.

2. En cada inciso y es directamente proporcional a x. Complete la tabla y escriba a y en función de x en la forma $y=ax$.

a)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y							6		

b)

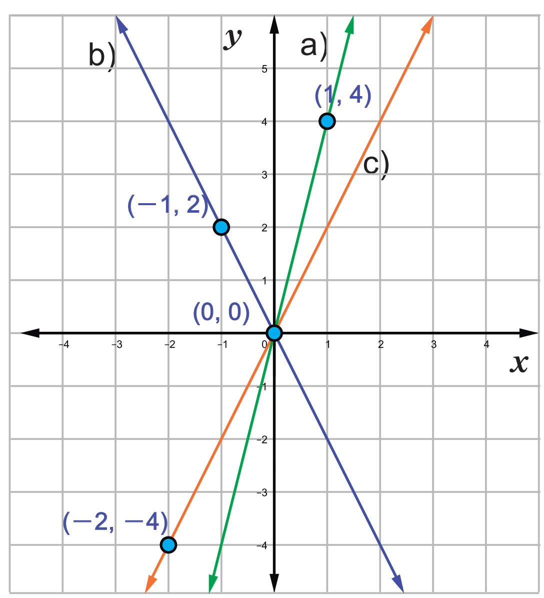
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y						-4			

c)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y						-2			

3. Trace la gráfica de la proporcionalidad directa en cada caso.
   a) $y=5x$ b) $y=-6x$ c) $y=\frac{1}{4}x$ d) $y=-0{,}5x$

4. Escribe la ecuación $y=ax$ de cada proporcionalidad directa a partir de los puntos que aparecen en cada recta.



Sección 2: Proporcionalidad inversa

Contenido 1: Concepto de proporcionalidad inversa

P

Para repartir 6ℓ de jugo en x botellas la capacidad de cada botella es de y ℓ. Por ejemplo, si para repartir en 3 botellas, la capacidad de cada botella debe ser de 2 ℓ.

Se escribirá:
litros → ℓ

a) Complete la tabla.

x(botellas)	1	2	3	4	5
$y(\ell)$			2		

b) ¿Cuántas botellas de 3ℓ de capacidad son necesarias?

c) Escriba la expresión que representa la relación entre las x botellas y los y ℓ de capacidad de cada una.

S

a) Como para repartir 6ℓ de jugo en 3 botellas, la capacidad de cada botella debe ser de 2ℓ: $6=3\times 2$, entonces:

(Total de ℓ de jugo) = (Cantidad de botellas) × (Capacidad de cada botella)

Por lo tanto,

(Capacidad de cada botella) = (Total de ℓ de jugo) ÷ (Cantidad de botellas)

x(botellas)	1	2	3	4	5
$y(\ell)$	$6\div 1=$ **6**	$6\div 2=$ **3**	$6\div 3=2$	$6\div 4=$ **1,5**	$6\div 5=$ **1,2**

b) Se observa en la tabla que si la capacidad es de 3ℓ se necesitan **2 botellas**.

c) De la tabla se puede concluir que y se puede expresar en función de x como

$$y=\frac{6}{x}$$

Se advierte que al multiplicar la cantidad de botellas y la capacidad de cada botella el resultado siempre es 6 (el total de ℓ de jugo $xy=6$).

C

Si dos variables x y y están relacionadas por una expresión de la forma $y=\dfrac{a}{x}$ se dice que y es **inversamente proporcional** a x, o de otra manera que x y y son inversamente proporcionales. Al número a se le llama **constante de proporcionalidad.**

E

Indique en cada situación si y es inversamente proporcional a x; si ese es el caso, encuentre la constante de proporcionalidad.

a) La cantidad y de caramelos que reciben x niños, si hay 24 caramelos en total.

b) La cantidad y de lapiceros que se puede comprar con C\$50, sabiendo que cada lapicero vale C\$$x$.

c) La cantidad y de mandarinas en cada bolsa si se quiere guardar 12 mandarinas en x bolsas.

Contenido 2: Relación de proporcionalidad inversa en forma de ecuación

P

Para recorrer 12km se debe avanzar a una velocidad de $x km/h$ durante y horas. Si la velocidad es de 6km/h, se recorre esa misma distancia en 2 horas.

a) Complete la tabla a partir de los valores dados para x.

$x(km/h)$	1	2	3	4	5	6
$y(h)$						2

b) ¿El tiempo y en horas en el que se recorre los 12km es inversamente proporcional a la velocidad $x km/h$ con que se avanza? ¿por qué?

c) Si la velocidad a la que se avanza se duplica, ¿qué pasa con el tiempo en que se recorre los 12km? ¿y si se triplica la velocidad?

S

a) Moviéndose a una velocidad de 6km/h se recorre los 12km en 2 horas ($12 = 6 \times 2$), entonces:

(distancia en km) = (velocidad en km/h) × (tiempo en horas)

Por lo tanto,

(tiempo en horas) = (distancia en km) ÷ (velocidad en km/h)

Esto nos permite completar la tabla

$x(km/h)$	1	2	3	4	5	6
$y(h)$	$\frac{12}{1} = \mathbf{12}$	$\frac{12}{2} = \mathbf{6}$	$\frac{12}{3} = \mathbf{4}$	$\frac{12}{4} = \mathbf{3}$	$\frac{12}{5} = \mathbf{2{,}4}$	$\frac{12}{6} = \mathbf{2}$

b) En efecto la cantidad y de horas en que se recorre los 12km es inversamente proporcional a la velocidad en $x km/h$ con que se avanza, porque según la tabla anterior y se puede escribir en función de x mediante la ecuación $y = \frac{12}{x}$.

Observe que:

$(1)(12) = 12$
$(2)(6) = 12$
$(3)(4) = 12$
$(4)(3) = 12$
$(5)(2{,}4) = 12$
$(6)(2) = 12$

c) Si la velocidad se duplica (se multiplica por 2), el tiempo en que se recorre los 12km disminuye a la mitad (se multiplica por $\frac{1}{2}$).

Si la velocidad se triplica (se multiplica por 3), el tiempo en que se recorre los 12km disminuye a una tercera parte (se multiplica por $\frac{1}{3}$).

×2 ×3 ×4

$x\ (km/h)$	1	2	3	4
$y\ (h)$	12	6	4	3

$\times\frac{1}{2}$ $\times\frac{1}{3}$ $\times\frac{1}{4}$

C

Para establecer una proporcionalidad inversa entre las variables x y y mediante una ecuación:

1. Se calcula la constante de proporcionalidad a con dos valores particulares de las variables:

$$xy = a$$

2. Se sustituye el valor encontrado de a en la expresión

$$y = \frac{a}{x}$$

obteniendo la ecuación deseada.

E

Encuentre la expresión que indica la relación entre x y y, y complete la tabla si en cada caso y es inversamente proporcional a x.

a) $y = 8$, si $x = 3$

x	1	2	3	4
y			8	

b) $y = 9$, si $x = 2$

x	1	2	3	4
y		9		

c) $y = 10$, si $x = 3$

x	1	2	3	4
y			10	

Contenido 3: Proporcionalidad inversa con $a > 0$

P

Se debe recorrer $18km$ a una velocidad de $x km/h$ durante y horas.

a) Establezca una relación de proporcionalidad inversa entre y y x.

b) Complete la tabla.

$x(km/h)$	1	2	3	4	5	6
$y(h)$						

S

a) Como se deben recorrer $18km$, entonces:

(distancia en km) $=$ (velocidad en km/h) $\times$ (tiempo en horas)

Para saber en cuántas horas se recorre los $18km$ se usa la expresión:

(tiempo en horas) $=$ (distancia en km) $\div$ (velocidad en km/h)

Haciendo las sustituciones respectivas se tiene:

$$y = \frac{18}{x}$$

que establece una relación de proporcionalidad inversa entre x y y.

b) Se sustituyen los valores de x en la expresión anterior para obtener los valores de y.

$x(km/h)$	1	2	3	4	5	6
$y(h)$	**18**	**9**	**6**	**4,5**	**3,6**	**3**

C

Para establecer una relación de proporcionalidad inversa entre las variables x y y, se expresa y en función de x, de la forma $y = \frac{a}{x}$, $x \neq 0$.

E

Establezca la relación de proporcionalidad inversa entre las variables indicadas y complete la tabla.

a) Se recorren $12km$ en y horas avanzando $x km$ por hora.

x (km/h)	1	2	3	4	5	6
y (h)						

b) Carolina empaca 18 libros en x cajas con y libros en cada caja.

x (cajas)	1	2	3	6
y (libros)				

Contenido 4: Proporcionalidad inversa con valores negativos

P

Las variables x y y son inversamente proporcionales relacionadas por la expresión $y = \frac{12}{x}$.

a) Complete la tabla siguiente

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
y													

$x \neq 0$ porque no se puede dividir por cero.

b) Cuando $x > 0$, si los valores de x se multiplican por 2, 3 y 4, ¿qué sucede con los valores de y?

c) Cuando $x < 0$, si los valores de x se multiplican por 2, 3 y 4, ¿qué sucede con los valores de y?

S

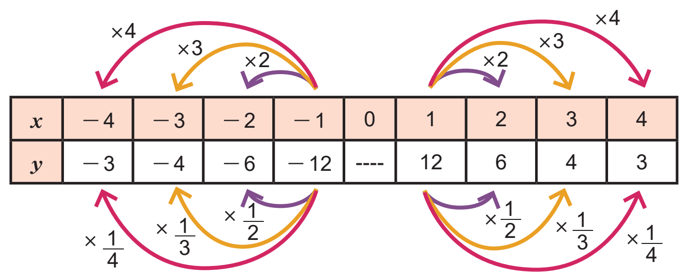
a) Al sustituir cada valor dado en la tabla de x en la expresión $y = \frac{12}{x}$ resulta:

Observe que siempre: $xy = 12$

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
y	**-2**	**$-2{,}4$**	**-3**	**-4**	**-6**	**-12**	----	**12**	**6**	**4**	**3**	**2,4**	**2**

Significa que el valor de y no existe

b) Cuando $x > 0$, si los valores de x se multiplican por 2, 3 y 4 los valores de y quedan multiplicados por $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$.



c) Cuando $x < 0$, si los valores de x se multiplican por 2, 3 y 4, los valores de y quedan multiplicados por $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$.

C

Dos variables x y y inversamente proporcionales continúan siéndolo a pesar de que las variables tomen valores negativos.

E

En cada inciso se asume que y es inversamente proporcional a x. Complete la tabla y exprese y en la forma $y = \frac{a}{x}$.

a)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y						6			

b)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y								5	

Contenido 5: Gráfica de la proporcionalidad inversa con $a > 0$

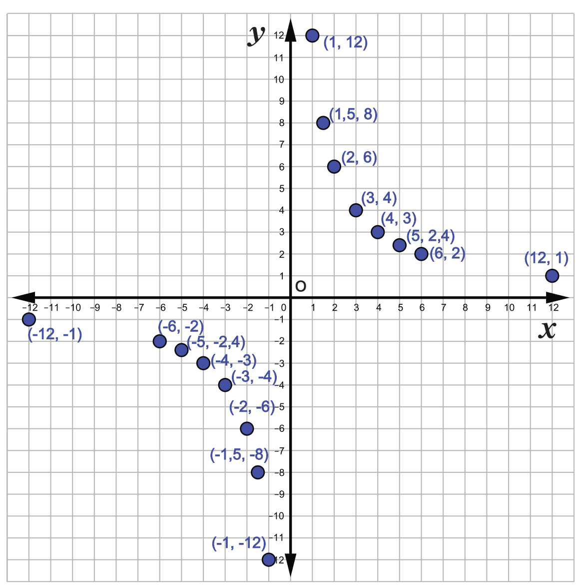
P

En la tabla se presentan algunos valores de las variables x y y que cumplen con la proporcionalidad inversa $y = \frac{12}{x}$. Ubique los puntos en el plano cartesiano.

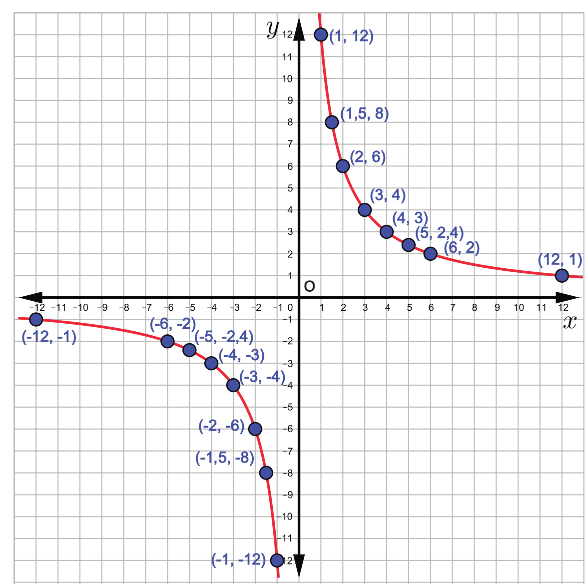
x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
y	-2	$-2,4$	-3	-4	-6	-12	----	12	6	4	3	2,4	2

S

Se ubican en el plano cartesiano los puntos obtenidos de la tabla.

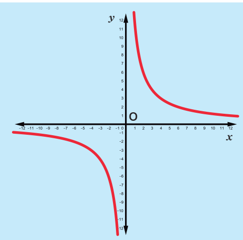


Se unen los puntos ubicados anteriormente formándose la gráfica.



C

La gráfica de proporcionalidad inversa $y = \frac{a}{x}$ con $a > 0$ es una hipérbola como se muestra en la figura de la derecha.



E

Complete la tabla y grafique las siguientes proporcionalidades inversas:

a) $y = \frac{6}{x}$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y						6			

b) $y = \frac{9}{x}$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y						9			

Contenido 6: Proporcionalidad inversa con $a<0$

P

Asumiendo que y se puede escribir en función de x mediante la igualdad $y=-\frac{12}{x}$, complete la tabla siguiente y diga si ambas variables son inversamente proporcionales.

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
y		2,4			6		----	-12		-4		$-2,4$	

S

Se sustituye cada valor de x en la expresión $y=-\frac{12}{x}$. Por ejemplo para $x=-6$, $y=-\frac{12}{-6}=2$; si $x=2$, $y=-\frac{12}{2}=-6$.

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
y	**2**	2,4	**3**	**4**	6	**12**	----	-12	**-6**	-4	**-3**	$-2,4$	**-2**

Para saber si son inversamente proporcionales puede verse que los productos xy de sus valores particulares son iguales a $-$**12**, siendo esta la constante de proporcionalidad.

C

La constante de proporcionalidad en la proporcionalidad inversa puede tomar valores negativos.

Ejemplo

Si y es inversamente proporcional a x, complete la tabla y escriba a y en la forma $y=\frac{a}{x}$.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y					----	-24			

Según la tabla cuando $x=1$, $y=-24$. Para encontrar la constante de proporcionalidad se multiplican los valores dados de las dos variables, así tenemos

$$xy=(1)(-24)=-24,$$

Como x y y son inversamente proporcionales y -24 es la constante de proporcionalidad, se puede expresar y en función de x como:

$$y=-\frac{24}{x}$$

Sustituyendo los valores de x en la expresión anterior, la tabla se completa así:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	**6**	**8**	**12**	**24**	----	**-24**	**-12**	**-8**	**-6**

E

Complete las tablas, considerando que y es inversamente proporcional a x. Exprese a y en la forma $y=\frac{a}{x}$.

a)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y					----	-6			

b)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y					----	-18			

Contenido 7: Gráfica de la proporcionalidad inversa con $a<0$

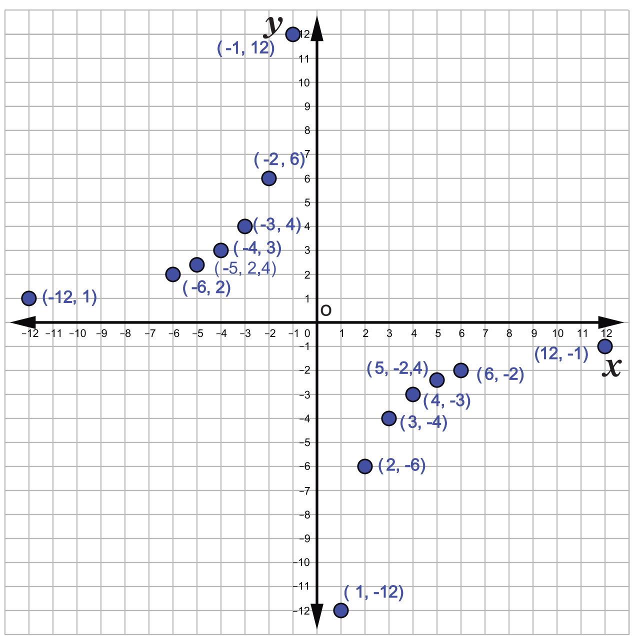
P

En la tabla se presentan algunos valores de las variables x y y que cumplen con la proporcionalidad inversa $y=-\frac{12}{x}$. Ubique los puntos en el plano cartesiano.

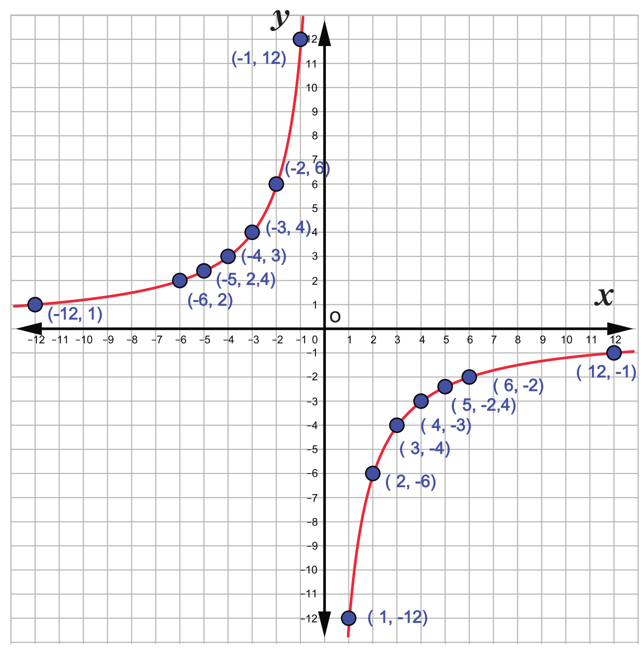
x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
y	2	2,4	3	4	6	12	----	-12	-6	-4	-3	$-2,4$	-2

S

Se ubican en el plano cartesiano los puntos obtenidos de la tabla.

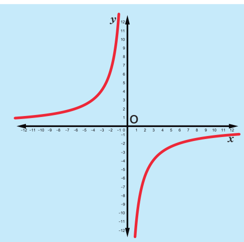


Se unen los puntos ubicados anteriormente formándose la gráfica.



C

La gráfica de proporcionalidad inversa $y=\frac{a}{x}$ con $a<0$ es una hipérbola como se muestra en la figura de la derecha.



E

Complete las tablas y grafique las siguientes proporcionalidades inversas:

a) $y=-\frac{6}{x}$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y					----	-6			

b) $y=-\frac{9}{x}$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y					----	-9			

Contenido 8: Comprobemos lo aprendido 2

E

1. Determine en cada inciso cuáles de las siguientes parejas de variables son directa o inversamente proporcionales.

   a) Se reparten 24 galletas a x niños, recibiendo y galletas cada niño.

   b) La cantidad y de cuadernos contenidos en x mochilas, si en cada una de estas se guardan 6 cuadernos.

   c) Los $y\ell$ que hay en x botellas, si en cada botella caben 3ℓ.

   d) La cantidad y de chocolates que se pueden comprar con C$48, si cada chocolate vale C$$x$.

2. Complete las siguientes tablas considerando que:

   a) y es directamente proporcional a x

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y						-8	

   b) y es inversamente proporcional a x

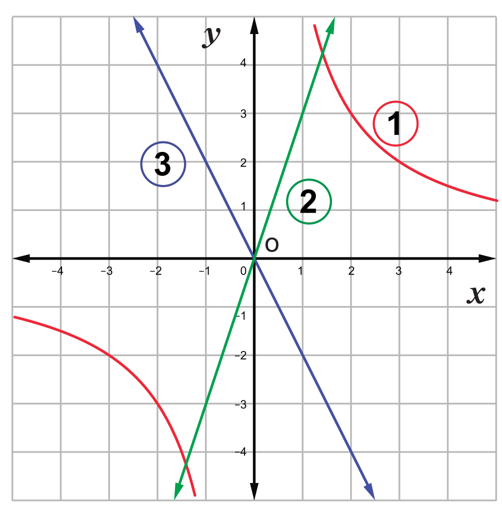
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y			6				

3. Indique el número de la gráfica de la derecha que corresponde a la ecuación dada.

   a) $y=3x$

   b) $y=-2x$

   c) $y=\dfrac{6}{x}$



Sección 3: Aplicaciones de proporcionalidad directa e inversa

Contenido 1: Regla de tres simple directa

P

En la siguiente tabla x y y son directamente proporcionales. Calcule el valor de d.

x	3	5
y	6	d

S

Como x y y son directamente proporcionales, el cociente $\frac{y}{x}$ es siempre el mismo para cualquier valor de las variables. Entonces de esto se desprende que

$$\frac{d}{5} = \frac{6}{3}$$

$$\left(\frac{d}{\cancel{5}_{1}}\right)(\cancel{15}^{3}) = \left(\frac{6}{\cancel{3}_{1}}\right)(\cancel{15}^{5})$$

Se multiplica por el m.c.m. de 3 y 5

$$3d = (6)(5)$$
$$3d = 30$$
$$d = \frac{30}{3}$$
$$d = 10$$

C

La **regla de tres simple directa** es una forma de resolver problemas de proporcionalidad directa entre tres valores conocidos y uno desconocido, estableciendo una relación de proporcionalidad directa entre todos ellos.

1. Se plantea la ecuación $ad = bc$.
2. Se despeja el valor desconocido.

x	a	c
y	b	d

Ejemplo Encuentre el valor de c en la tabla si las variables x y y son directamente proporcionales usando el diagrama adjunto.

x	2	c
y	-8	-16

Se observa que el diagrama funciona por la proporcionalidad directa, que da lugar a la igualdad $(2)(-16) = (-8)c$.

x	2	c
y	-8	-16

$$(2)(-16) = (-8)c$$
$$-8c = -32$$
$$c = \frac{-32}{-8}$$
$$c = 4$$

E

Calcule el valor desconocido en cada tabla, si se asume que las variables x y y son directamente proporcionales.

a)

x	3	5
y	9	d

b)

x	2	c
y	8	12

c)

x	-2	3
y	4	d

d)

x	a	6
y	3	-18

e)

x	-4	c
y	8	-12

f)

x	-3	b
y	-15	10

Observación

Otra manera de calcular el valor de d del problema inicial en este contenido, utilizando la propiedad de las proporciones:

x	3	5
y	6	d

La tabla se lee en la forma siguiente:
3 es a 6 como 5 es a d

Esta proporción se escribe en símbolos:
$3 : 6 :: 5 : d$

Utilizando la **propiedad fundamental de las proporciones:**

$$a : b :: c : d,\ ad = bc,$$

$3 : 6 :: 5 : d$ se puede traducir como la igualdad

$$3d = (6)(5)$$

Luego,

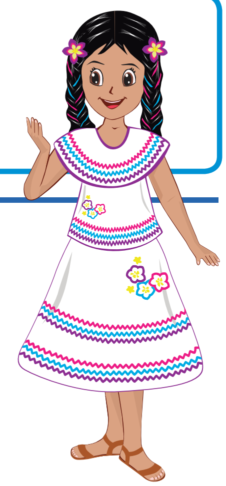
$$d = \frac{30}{3}$$

$$d = \mathbf{10}$$

Contenido 2: Aplicación de la proporcionalidad directa (1)

P

Gabriela lee una receta de pastel donde se indica que por cada 2 libras de harina hay que añadir 8 huevos. Si quiere preparar un pastel con 5 libras de harina, ¿cuántos huevos necesita?



S

1. Se identifican las variables que describen el problema:
   x: cantidad de libras de harina
   y: cantidad de huevos para el pastel
2. Es evidente que entre **más** libras de harina se utilicen para el pastel, **más** huevos se necesitarán; así que las variables x y y son directamente proporcionales:
   Sea d, el número de huevos necesarios para elaborar un pastel de 5 libras.

x (lb de harina)	2	5
y (huevos)	8	d

lb : libras

3. Se aplica regla de tres simple directa:

$$(2)d = (8)(5)$$

$$2d = 40$$

$$d = \frac{40}{2}$$

$$d = 20$$

Se necesitan **20 huevos** para preparar un pastel con 5 lb de harina.

C

Para resolver problemas de situaciones prácticas que involucren proporcionalidad directa entre dos variables:

1. Se identifican las variables.
2. Se comprueba que las variables sean directamente proporcionales.
3. Se aplica la regla de tres simple directa para encontrar el valor desconocido.

E

Resuelve los siguientes problemas:

a) En una cafetera se vierten 4 cucharadas de café molido para preparar dos tazas de dicha bebida. Si Andrés quiere preparar 9 de estas, ¿cuántas cucharadas de café necesita?

b) Un atleta recorre 3 veces una pista polideportiva en 9 minutos. ¿Cuánto tardará en recorrerla 5 veces si lo hace con la misma velocidad?

c) Si 8 lapiceros valen C\$40, ¿cuántos lapiceros se pueden comprar con C\$75?

d) Fernando preparó 2ℓ de jugo con 12 naranjas. Si ahora tiene 36 naranjas, ¿cuántos ℓ de jugo puede preparar?

Contenido 3: Aplicación de la proporcionalidad directa (2)

P

De los 45 estudiantes de un aula de clase, 9 faltaron el día de hoy. ¿Qué porcentaje de ausentes hubo el día de hoy?

S

x: porcentaje de estudiantes
y: cantidad de estudiantes que representan ese porcentaje

Los 45 estudiantes representan el 100 %, el aumento en el porcentaje implica un mayor número de estudiantes, luego las variables x y y son directamente proporcionales:
Sea c, el porcentaje que representan los 9 estudiantes

x (%)	100	c
y (estudiantes)	45	9

Se aplica regla de tres simple directa:

$$(100)(9) = (45)c$$
$$45c = 900$$
$$c = \frac{900}{45}$$
$$c = 20$$

El día de hoy faltaron **20 %** de los estudiantes.

C

Para resolver situaciones que involucran porcentaje se aplica la regla de tres simple directa.

Ejemplo En una tienda hay una promoción del 35% de descuento en todos sus productos sólo por hoy. Si el costo normal de un producto es C$ 60. ¿Cuánto vale con el descuento?

Sea d, el precio del producto hoy.

x (%)	100	35
y (C$)	60	d

Se aplica regla de tres simple directa:

$$(100)d = (60)(35)$$
$$100d = 2100$$
$$d = \frac{2100}{100}$$
$$d = 21$$

$$\left(\begin{array}{c}\text{Precio con}\\ \text{descuento}\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c}\text{Precio}\\ \text{normal}\end{array}\right) - (\text{ Descuento })$$
$$= 60 - 21$$
$$= 39$$

El producto vale **C$ 39** el día de hoy.

E

Resuelve los siguientes problemas:

a) En un aula de Séptimo Grado hay 65 estudiantes, de los cuales 26 son mujeres. ¿Cuál es el porcentaje de mujeres?

b) Un equipo de fútbol ha jugado 15 partidos, de los cuales ha ganado 9 ¿Qué porcentaje representan los partidos ganados sobre el total?

c) Un juguete valía C$50, pero Carlos lo compró en la kermes de la escuela con un 16% de descuento. ¿Cuánto pagó Carlos por el juguete?

d) Un producto aumentó de precio en un 20%, si antes valía C$54. ¿Cuánto vale después del aumento?

Contenido 4: Regla de tres simple inversa

P

En la siguiente tabla x y y son inversamente proporcionales. Calcule el valor de d.

x	2	5
y	10	d

S

Como las variables x y y son inversamente proporcionales todos los productos xy son iguales para cualquier valor dado a las variables. Entonces:

$$(2)(10) = (5)d$$
$$5d = 20$$
$$d = \frac{20}{5}$$
$$d = 4$$

C

La **regla de tres simple inversa** es una forma de resolver problemas de proporcionalidad inversa entre tres valores conocidos y uno desconocido, estableciendo una relación de proporcionalidad inversa entre todos ellos.

1. Se plantea la ecuación $ab = cd$.
2. Se despeja el valor desconocido.

x	a	c
y	b	d

Ejemplo

Calcule el valor de c en la tabla si las variables son inversamente proporcionales.

x	3	c
y	-6	-2

x	3	c
y	-6	-2

$$(3)(-6) = c(-2)$$
$$-2c = -18$$
$$c = \frac{-18}{-2}$$
$$c = 9$$

E

Calcule el valor desconocido, si las variables x y y son inversamente proporcionales.

a)

x	2	6
y	9	d

b)

x	2	c
y	-6	-1

c)

x	a	3
y	2	-4

d)

x	-3	4
y	-8	d

e)

x	-5	c
y	4	-2

f)

x	-4	b
y	-3	6

Contenido 5: Aplicación de la proporcionalidad inversa

P

Gabriela guarda cierta cantidad de naranjas en 6 bolsas que contienen 12 naranjas cada una. Si quiere usar solamente 4 bolsas para guardar la misma cantidad de frutas, ¿cuántas naranjas debe guardar en cada bolsa?

S

1. Se identifican las variables:
   x: cantidad de bolsas
   y: cantidad de naranjas en cada bolsa
2. Las variables x y y son inversamente proporcionales porque entre **menos** bolsas utilice para guardar la misma cantidad de naranjas, Gabriela tendrá que depositar **más** naranja en cada bolsa.

   Sea d el número de naranjas que caben en 4 bolsas.

x bolsas	6	4
y naranjas	12	d

3. Se aplica la regla de tres simple inversa:

$$(6)(12) = (4)d$$
$$4d = 72$$
$$d = \frac{72}{4}$$
$$d = 18$$

Gabriela debe guardar **18 naranjas** en cada bolsa.

C

Para resolver situaciones del entorno que involucren la proporcionalidad inversa:
1. Se identifican las variables.
2. Se comprueba que las variables sean inversamente proporcionales.
3. Se aplica la regla de tres simple inversa para encontrar el valor desconocido.

E

Resuelva los siguientes problemas:

a) Andrés empaca cierta cantidad de libros en 6 cajas con 15 libros en cada una. Si quiere usar 9 cajas para guardar la misma cantidad, ¿cuántos libros debe guardar en cada caja?

b) Un camión con capacidad de 3 toneladas necesita realizar 15 viajes para transportar cierta cantidad de arena. ¿Cuántos viajes serán necesarios para transportar la misma arena en un camión con capacidad de 5 toneladas?

c) Cuatro fotocopiadoras del mismo tipo imprimen cierta cantidad de hojas en 6 minutos. ¿En cuántos minutos imprimen la misma cantidad de hojas 8 fotocopiadoras similares?

d) Carolina prepara 12 bolsas, con 3 chocolates cada una para su fiesta de cumpleaños. ¿Cuántas bolsas debe preparar si ahora decide poner 9 chocolates en cada una?

Contenido 6: Comprobemos lo aprendido 3

1. Calcule el valor desconocido en cada tabla, si se asume que las variables x y y son directamente proporcionales.

a)

x	2	5
y	10	d

b)

x	a	4
y	6	-8

c)

x	-5	1
y	b	3

d)

x	3	c
y	-9	-12

2. Calcule el valor desconocido en cada tabla, si se asume que las variables x y y son inversamente proporcionales.

a)

x	4	6
y	3	d

b)

x	-2	6
y	b	-1

c)

x	a	4
y	-4	-3

d)

x	-3	c
y	9	-2

3. Resuelva los siguientes problemas:

a) Claudia trabaja los sábados en la tienda de su padre y por 2 horas de labor este le paga C$ 100. ¿Cuánto dinero recibirá por 5 horas de trabajo?

b) Para envasar cierta cantidad de leche se necesitan 9 botellas de 2ℓ de capacidad cada una. Si se quiere envasar la misma cantidad de leche en 6 botellas, ¿cuál debe ser la capacidad de cada una?

c) En un colegio hay 80 estudiantes de séptimo grado de los cuales 36 son niñas, ¿qué porcentaje de estas hay en séptimo grado?

d) Si 3 albañiles necesitan 24 días para realizar una obra, ¿cuántos días necesitarán 18 albañiles para realizar la misma obra trabajando al mismo ritmo?

e) En una bolsa hay 8 caramelos de menta y 12 de fresa. ¿Qué porcentaje representan los caramelos de fresa?

Desafío

Interés simple

Cuando se pide un préstamo, se debe pagar cierto interés por ese dinero. Y cuando se deposita dinero en un banco, el banco debe pagar un cierto interés por ese dinero. En negocios de este tipo:

- ✓ El capital es el monto de dinero inicial prestado o depositado.
- ✓ La tasa de interés es el porcentaje de dinero que se paga o se cobra.
- ✓ El interés es la cantidad de dinero cobrado o pagado por el uso del capital durante cierto tiempo.

P

Al hacer el préstamo en el banco de $800 al 5% de interés anual.

a) ¿Cuanto interés hay que pagar al banco en un año?
b) ¿y en tres años?
c) ¿Cuanto interés hay que pagar al banco en 6 meses?

El interés simple se calcula y se paga sobre un capital inicial que no cambia.

S

a) Se calcula el dinero que representa el 5% del capital:

Dinero($)	800	c
Porcentaje (%)	100	5

Aplicando regla de tres simple directa:

$$(800)(5) = (100)(c)$$
$$4000 = 100c$$
$$c = \frac{4000}{100}$$
$$c = 40$$

Hay que pagar **$40** en un año.

b) Si en un año hay que pagar $40, entonces en 3 años hay que pagar (3)(40) = **$120**.

c) En un año hay 12 meses, entonces:

Dinero($)	40	c
Meses	12	6

$$(40)(6) = (12)(c)$$
$$240 = 12c$$
$$c = \frac{240}{12}$$
$$c = 20$$

Hay que pagar **$20** en 6 meses.

E

Resuelva los siguientes problemas:

a) Al hacer un préstamo en una financiera de $900 al 10% de interés anual, ¿cuánto interés hay que pagar en dos años?

b) Al hacer un préstamo en el banco de $500 al 5% de interés anual, ¿cuánto interés hay en 4 meses?

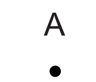
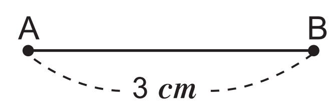
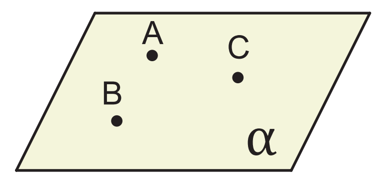
Unidad 6

Introducción a la Geometría

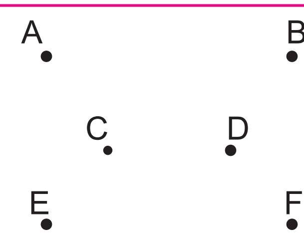
Sección 1: Nociones básicas de geometría

Contenido 1: Nociones básicas (punto, recta, segmento, rayo y plano)

Definición

Punto	Es una representación mental de una marca que tiene posición en el plano y carece de extensión. Los puntos se denotan con letras mayúsculas A, B, C, D, …, etc.	
Recta	Es una línea que pasa por dos puntos y se extiende indefinidamente en dos direcciones opuestas. La recta que pasa por los puntos A y B se denota por $\overleftrightarrow{l}$ (se lee “recta l”) o $\overleftrightarrow{AB}$ (se lee “recta AB”).	
Segmento	Es la porción de la recta comprendida entre A y B, se denota $\overline{AB}$ y se lee “segmento AB”. Se expresa la longitud del segmento como AB $= 3cm$.	
Rayo	Es la parte de una recta que tiene origen A y se extiende indefinidamente en una dirección. Si el punto B pertenece al rayo, este se denota con $\overrightarrow{AB}$ y se lee “rayo AB”.	
Para determinar **un plano** se necesitan tres puntos que no estén en una misma recta. Un plano se denota con letras griegas como α, β, θ, entre otras.		

Ejemplo Dados los puntos de la derecha, dibuje los objetos geométricos pedidos y escriba la notación que los representa.

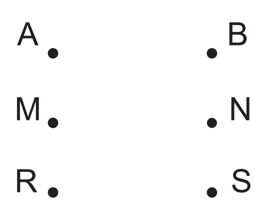


a) La recta que pasa por A y B.
b) El segmento que tiene los puntos extremos C y D.
c) El rayo con origen el punto E y que pasa por el punto F.

	Dibujo	Notación
a)		$\overleftrightarrow{AB}$
b)		$\overline{CD}$
c)		$\overrightarrow{EF}$

E

Dados los puntos de la derecha, dibuje los objetos geométricos pedidos y escriba la notación que los representa.



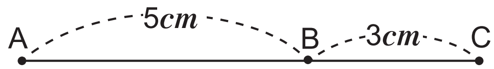
a) El segmento que tiene los puntos extremos A y B.
b) El rayo que tiene el origen en el punto M y pasa por N.
c) La recta que pasa por los puntos R y S

Contenido 2: Suma y resta de medidas de segmentos

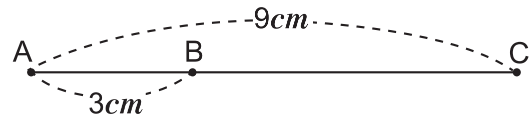
P

Determine la medida de los siguientes segmentos:

a) $\overline{AC}$



b) $\overline{BC}$



S

a) De la gráfica se tiene que

$AC = AB + BC = 5 + 3 = 8$

$\mathbf{AC = 8\,(cm)}$

b) De la gráfica se tiene que

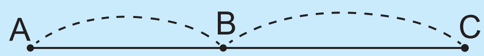
$BC = AC - AB = 9 - 3 = 6$

$\mathbf{BC = 6\,(cm)}$

Se cumple AC=AB+BC en a) y b) porque el punto B está entre A y C.

C

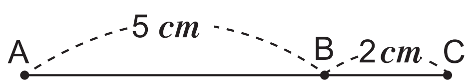
B está entre A y C, si A, B y C pertenecen a una recta y AB+BC=AC.



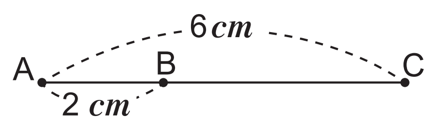
E1

Calcule la medida de los siguientes segmentos:

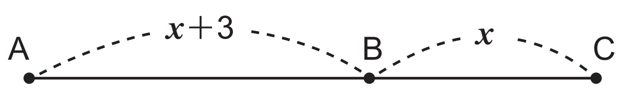
a) $\overline{AC}$



b) $\overline{BC}$

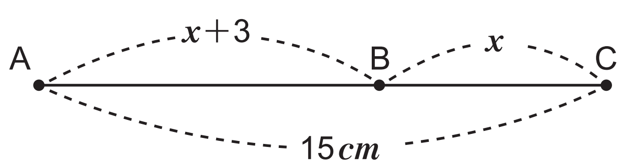


Ejemplo De acuerdo con la figura, calcule la longitud de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, si $AC = 15\,cm$.



Como B está entre A y C, se verifica la igualdad

$$AB + BC = AC$$
$$(x+3) + x = 15$$
$$2x + 3 = 15$$
$$2x = 15 - 3$$
$$2x = 12$$
$$x = 6$$

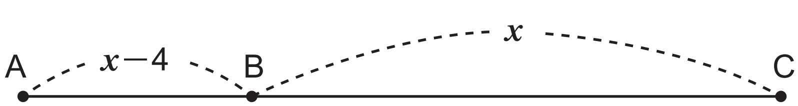


Por lo tanto, $BC = 6\,cm$. Esto nos permite calcular AB: $AB = 6 + 3 = 9\,cm$.

Finalmente, hemos determinado que $\mathbf{AB = 9\,(cm)}$, $\mathbf{BC = 6\,(cm)}$.

E2

Calcule la longitud de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, si $AC = 10\,cm$.

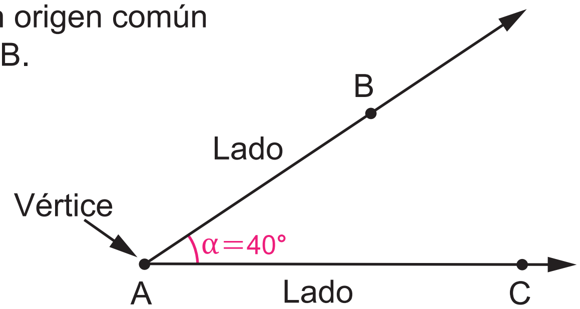


Contenido 3: Ángulo, medida y clasificación

Definición

Ángulo: Es la figura formada por dos rayos con un origen común llamado vértice; se denota como: ∠BAC, ∠A, ∠CAB.

El símbolo ∡ será utilizado para indicar la medida de un ángulo. Por ejemplo, si utilizáramos grados, ∡BAC $=40°$ ($\alpha=40°$).



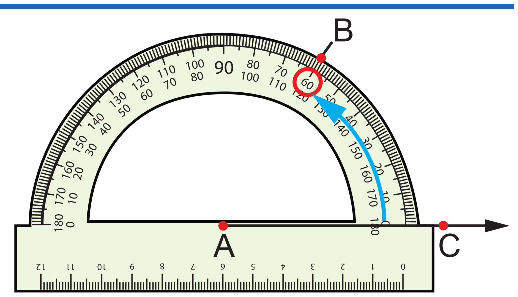
P

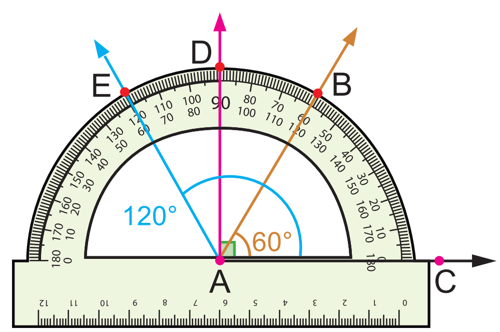
Dado el $\overrightarrow{AC}$, marque los puntos B, D y E en el plano para formar los ángulos de ∡BAC $=60°$, ∡DAC $=90°$ y ∡EAC $=120°$

S

1. Se dibuja el $\overrightarrow{AC}$ y se coloca el transportador sobre este, haciendo coincidir su centro con el origen A.

2. Se comienza a leer en el transportador desde 0° hasta 60°, se ubica el punto B y se traza con una regla el $\overrightarrow{AB}$. La construcción de los ángulos de ∡DAC $=90°$ y ∡EAC $=120°$ es idéntica a la anterior: se localizan los puntos E y D por donde deben pasar los rayos $\overrightarrow{AE}$ y $\overrightarrow{AD}$ para obtener los ángulos buscados.





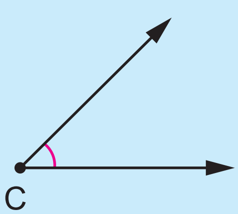
El símbolo ∟ representa que el ángulo es recto

C

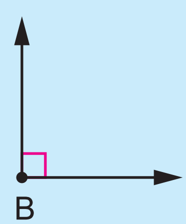
Dado un $\overrightarrow{AC}$ y un número α expresado en grados se puede encontrar con el transportador un único punto B en el plano tal que ∡BAC $=\alpha$.

Los ángulos se clasifican según su medida en:

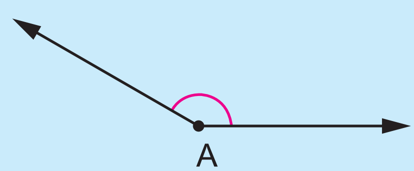
Ángulo agudo:
Medida menor que 90°



Ángulo recto:
Medida igual a 90°



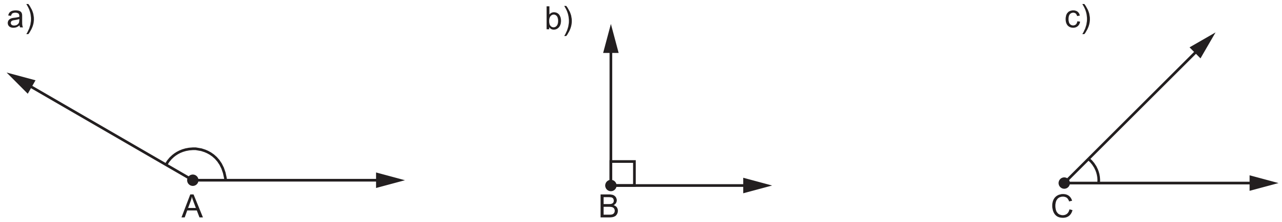
Ángulo obtuso:
Medida mayor que 90° y menor que 180°



En la solución del problema se ha encontrado que el ∠BAC es agudo, el ∠DAC es recto y el ∠EAC es obtuso porque miden 60°, 90° y 120° respectivamente.

Ejemplo Determine la medida de cada ángulo dado en la figura, escriba su notación y clasificación

a) b) c)



Haciendo uso del transportador se encuentra que:

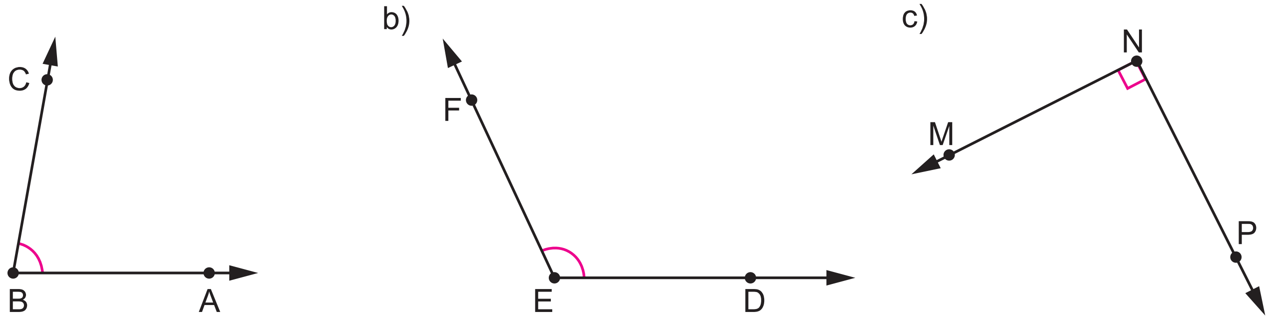
a) $\measuredangle A = 150°$, siendo un ángulo obtuso.

b) $\measuredangle B = 90°$, lo que indica que es un ángulo recto.

c) $\measuredangle C = 45°$, lo cual nos dice que se trata de un ángulo agudo.

1. Dibuje un ángulo de 45° y otro de 130°, utilizando el transportador.
2. Determine la medida de cada ángulo dado en la figura, escriba su notación y clasificación.

a) b) c)

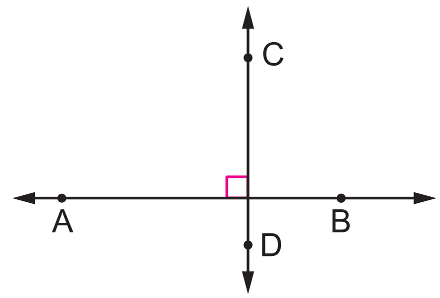


Contenido 4: Rectas perpendiculares en el plano

Definición

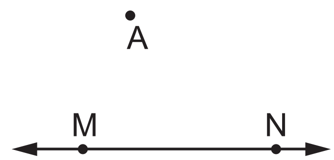
Dos rectas son **perpendiculares** si al intersectarse forman un ángulo de 90° o recto. La relación de perpendicularidad se denota con el símbolo ⊥.

La notación $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$ se lee "$\overleftrightarrow{AB}$ es perpendicular a $\overleftrightarrow{CD}$ ".



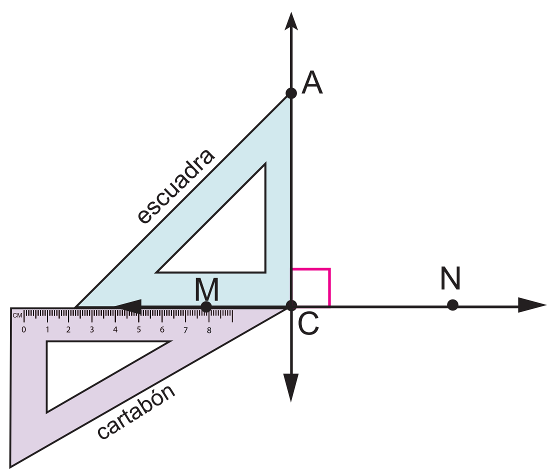
P

Dada $\overleftrightarrow{MN}$, dibuje una recta perpendicular a esta que pase por el punto A exterior a dicha recta. Use escuadra y cartabón.



S

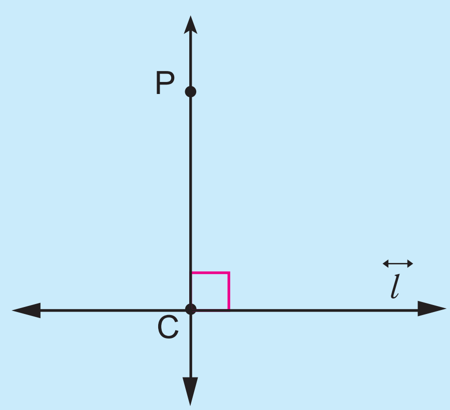
1. Se traza la $\overleftrightarrow{MN}$ con ayuda del cartabón.
2. Se coloca uno de los lados iguales de la escuadra sobre la recta trazada, deslizándola sobre el cartabón hasta que el lado vertical de la escuadra coincida con el punto A.
3. Se traza una recta que pase por A y corte a la $\overleftrightarrow{MN}$ en C. La $\overleftrightarrow{AC}$ resulta ser perpendicular a esta.



C_1

Para construir una perpendicular $\overleftrightarrow{PC}$ a la $\overleftrightarrow{l}$ dada, desde un punto P exterior a esta, se siguen los siguientes pasos:

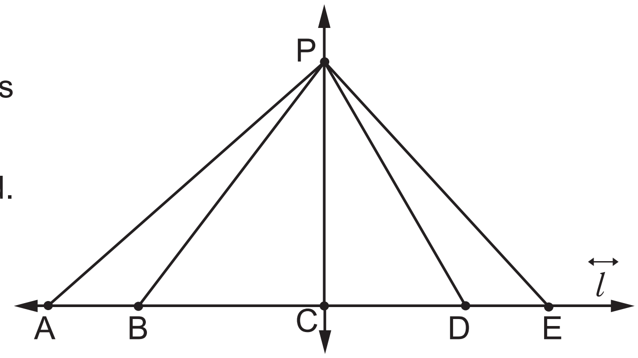
- Se traza la $\overleftrightarrow{l}$ con el cartabón.
- Se desliza uno de los lado iguales de la escuadra hasta que el lado vertical de esta coincida con el punto P.
- Se traza la $\overleftrightarrow{PC}$ con el lado vertical de la escuadra.



Ejemplo Dada la siguiente figura:

a) Mida con una regla graduada en cm los segmentos $\overline{PA}$, $\overline{PB}$, $\overline{PC}$, $\overline{PD}$ y $\overline{PE}$ e indique cuál de ellos tiene la menor longitud.

b) Mida el $\angle PCD$.



a) Se determinan las medidas con una regla graduada, encontrando que $PA=4\,cm$, $PB=3{,}3\,cm$, $PC=2{,}7\,cm$, $PD=3\,cm$ y $PE=3{,}7\,cm$. El $\overline{PC}$ es el que tiene la menor longitud.

b) Usando el transportador se tiene que $\measuredangle PCD=90°$.

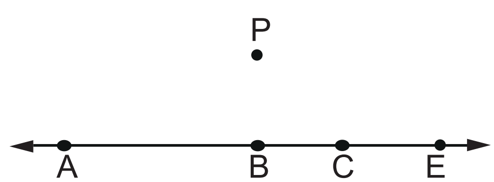
C_2

Si la $\overleftrightarrow{PC}$ es perpendicular a la $\overleftrightarrow{l}$, donde C es el punto común de ambas rectas, entonces la longitud del $\overline{PC}$ es menor que la de cualquier otro segmento de P a cualquier otro punto de $\overleftrightarrow{l}$.

$\mathcal{E}$

a) Utilizando escuadra y cartabón, dibuje una recta horizontal $\overleftrightarrow{PQ}$, un punto exterior A y la perpendicular desde este a la $\overleftrightarrow{PQ}$.

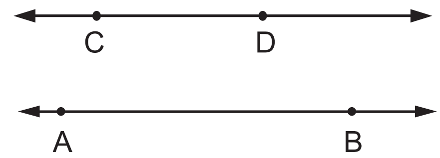
b) Mida con una regla los segmentos $\overline{PA}$, $\overline{PB}$, $\overline{PC}$ y $\overline{PE}$. Indique cuál de ellos es el segmento perpendicular a la recta.



Contenido 5: Rectas paralelas en el plano

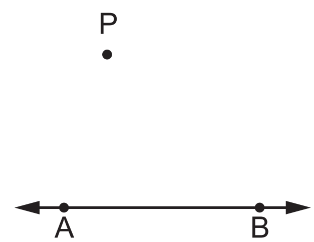
Definición

Dos rectas son **paralelas** si no tienen puntos en común.
La relación de paralelismo se denota con el símbolo ||.
La notación $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ se lee "la recta $\overleftrightarrow{AB}$ es paralela a la recta $\overleftrightarrow{CD}$".



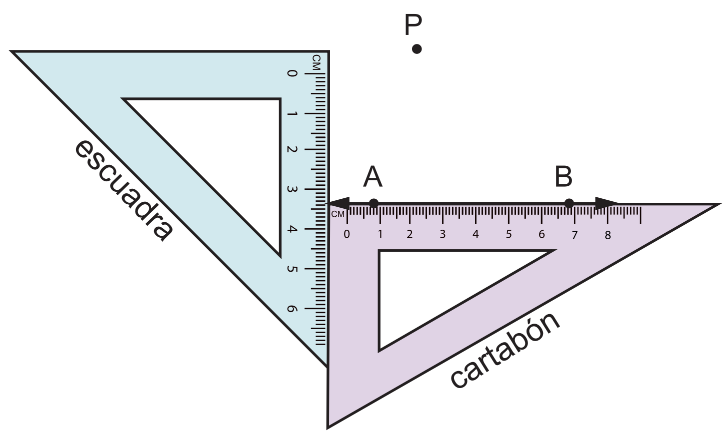
P

Utilice escuadra y cartabón para trazar una recta paralela a la $\overleftrightarrow{AB}$ y que pase por el punto P exterior a ella.

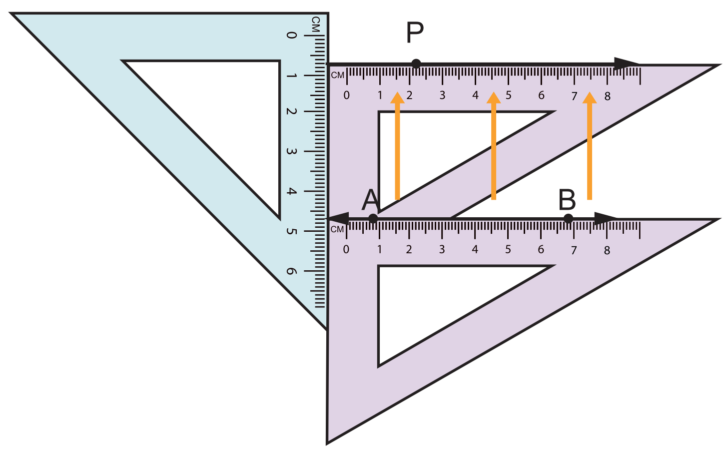


S

1. Se traza la $\overleftrightarrow{AB}$ con el cartabón y se coloca la escuadra como indica la figura.



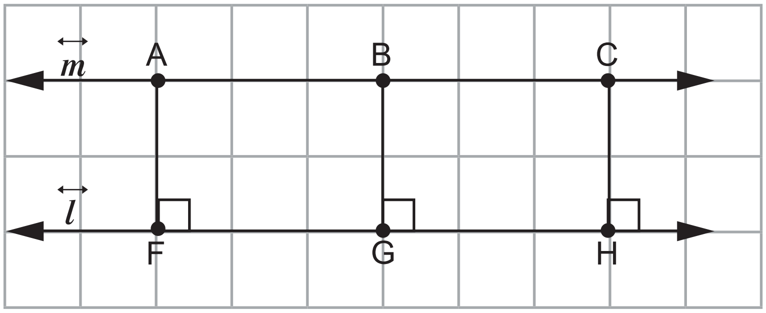
2. Se desliza el cartabón hacia arriba hasta alcanzar el punto P sobre el cual se traza la paralela a la $\overleftrightarrow{AB}$.



C1

Dada la $\overleftrightarrow{AB}$ y un punto P exterior a ella, es posible trazar una única recta paralela $\overleftrightarrow{CP}$ a $\overleftrightarrow{AB}$ que pasa por el punto P.

Ejemplo En la figura, $\overleftrightarrow{l}$ y $\overleftrightarrow{m}$ son paralelas. Determine las longitudes de $\overline{AF}$, $\overline{BG}$ y $\overline{CH}$ y compare sus medidas sabiendo que cada cuadrícula mide $1\,cm$.



Las longitudes de los segmentos son: AF $= 2\,cm$, BG $= 2\,cm$ y CH $= 2\,cm$.

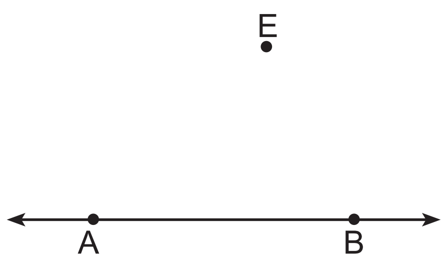
La longitud común de $\overline{AF}$, $\overline{BG}$ y $\overline{CH}$, que es igual a 2, es la distancia entre $\overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{l}$.

C_2

Si $\overleftrightarrow{l}$ y $\overleftrightarrow{m}$ son paralelas, la distancia entre cualquier punto de $\overleftrightarrow{l}$ y $\overleftrightarrow{m}$ es siempre la misma, esta es la distancia entre $\overleftrightarrow{l}$ y $\overleftrightarrow{m}$.

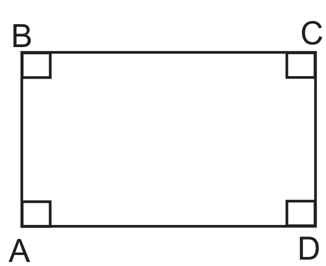
E

1. Utilizando escuadra y cartabón, trace en la figura una recta paralela a $\overleftrightarrow{AB}$ que pase por E.



2. Dado el rectángulo ABCD de la figura, establezca la relación que existe entre los siguientes segmentos, usando uno de los símbolos || o ⊥:

a) $\overline{AB}$ ______ $\overline{DC}$
b) $\overline{AB}$ ______ $\overline{AD}$
c) $\overline{BC}$ ______ $\overline{AD}$

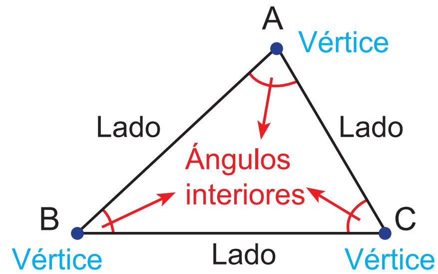


Contenido 6: Triángulo y su clasificación según sus ángulos interiores

Definición

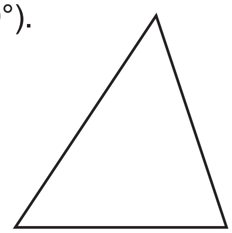
Dados tres puntos A, B y C que no pertenecen a una misma recta, se llama **triángulo** a la figura geométrica formada por la unión de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$. Se denota por ΔABC.

- ✓ Cada triángulo tiene 3 **lados** y 3 **vértices**.
- ✓ El triángulo tiene 3 ángulos interiores y la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es **180°**.

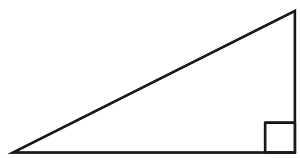


Los triángulos, según la medida de sus ángulos, se clasifican en:

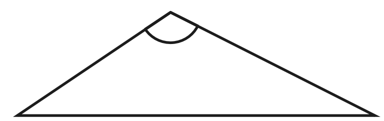
a) **Triángulo acutángulo:** sus tres ángulos interiores son agudos (menor que 90°).



b) **Triángulo rectángulo:** tiene un ángulo recto (igual a 90°).

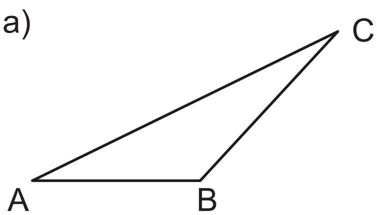


c) **Triángulo obtusángulo:** tiene un ángulo obtuso (mayor que 90°).

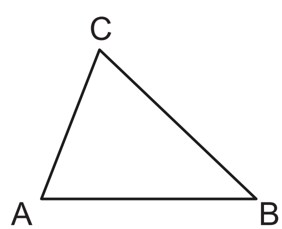


Ejemplo Clasifique los siguientes triángulos según la medida de sus ángulos:

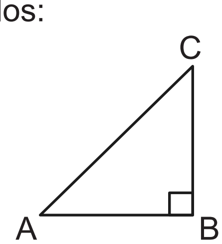
a)



b)



c)



Después de medir con el transportador los ángulos, se concluye lo siguiente:

a) Es un triángulo obtusángulo porque $\measuredangle B > 90°$

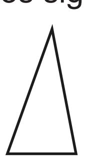
b) Es un triángulo acutángulo porque las medidas de los ángulos interiores son menores que 90°

c) Es un triángulo rectángulo porque $\measuredangle B = 90°$

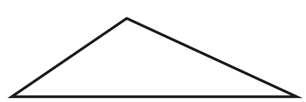
E

Clasifique los siguientes triángulos según la medida de sus ángulos:

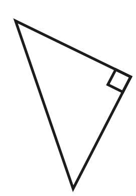
a)



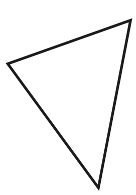
b)



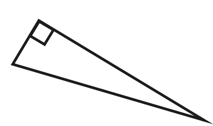
c)



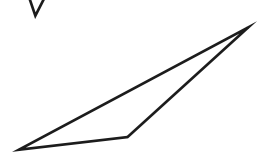
d)



e)



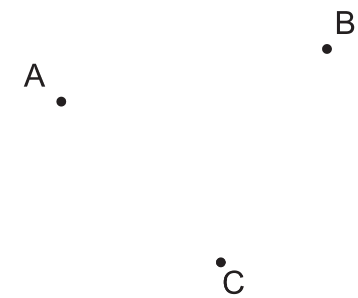
f)



Contenido 7: Comprobemos lo aprendido 1

E

1. Dado los puntos A, B y C de la derecha dibuje lo indicado.



a) $\overleftrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{CA}$

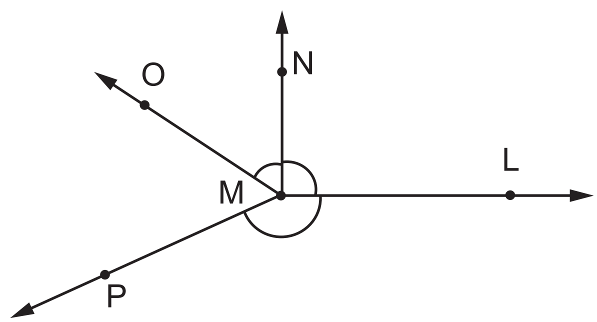
c) $\overline{BC}$

2. Determine con el transportador la medida de los ángulos indicados.

a) ∡LMN

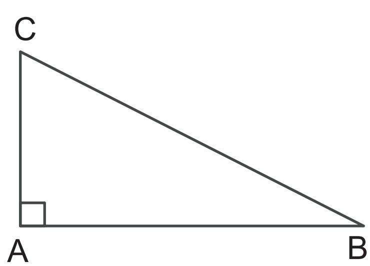
b) ∡NMO

c) ∡LMP

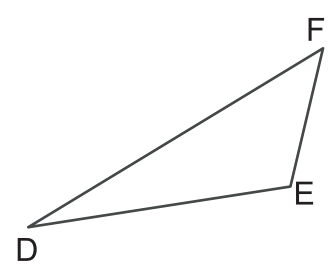


3. Clasifique los siguientes triángulos según la medida de sus ángulos:

a)



b)



Sección 2: Construcciones con regla y compás

Contenido 1: Círculo y circunferencia

P

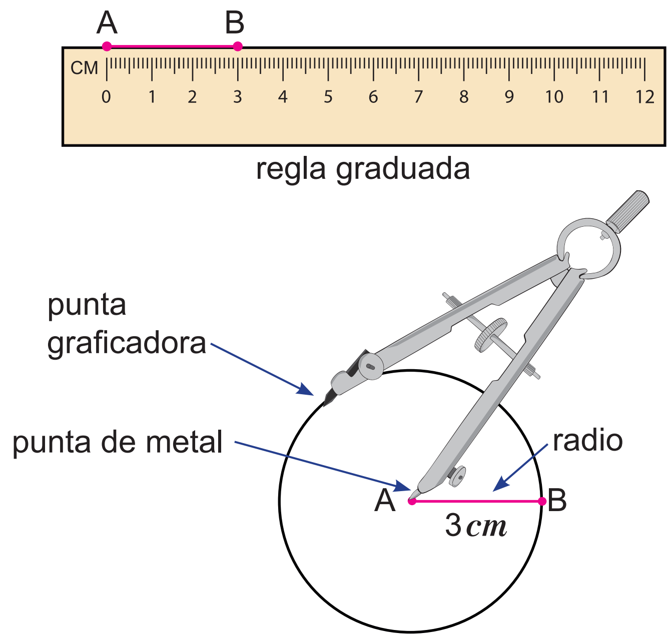
Dibuje una circunferencia de radio $3\,cm$ utilizando regla y compás.

S

1. Se mide con una regla graduada una distancia igual a $3\,cm$ y se traza el segmento que servirá como un radio de la circunferencia, tal como puede verse en la figura.

2. Se coloca la punta de metal del compás en el punto A, la punta graficadora en B y se hace girar el compás hasta dibujar la circunferencia.

   Una circunferencia queda completamente determinada si se conoce su centro y su radio.

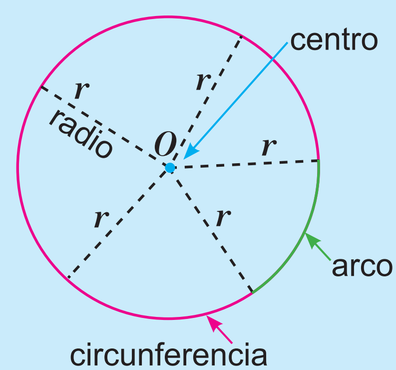


C

Circunferencia: Es un conjunto de puntos de un plano que están a igual distancia (equidistan) de otro punto llamado **centro**. A la región interior y los puntos de la circunferencia se llama **círculo**.

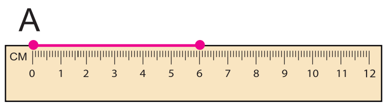
Radio de una circunferencia es el segmento que une el centro con un punto de esta.

Arco: Porción de la circunferencia comprendida entre dos puntos de esta.

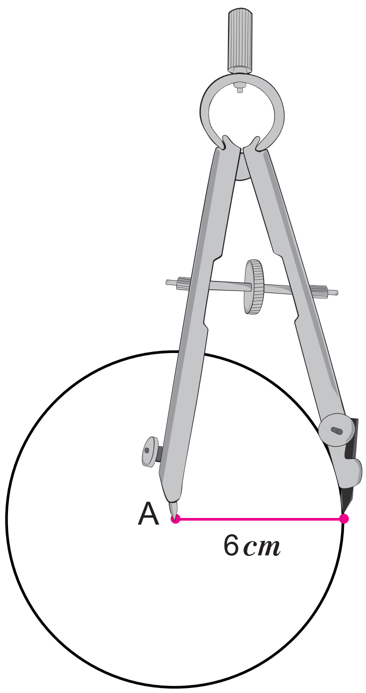


Ejemplo Dibuje una circunferencia de radio 6cm y centro A; tomando este mismo centro A, dibuje otra circunferencia de radio 3cm.

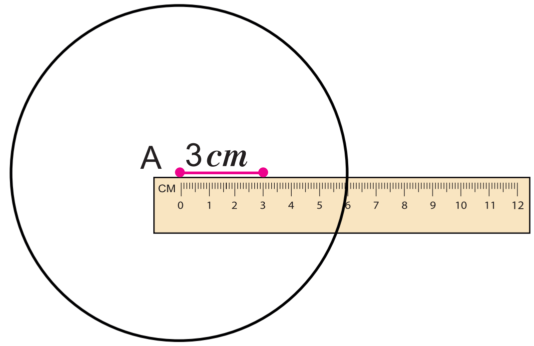
1. Se mide con la regla una distancia igual a 6cm y se traza el segmento que funcionará como radio.



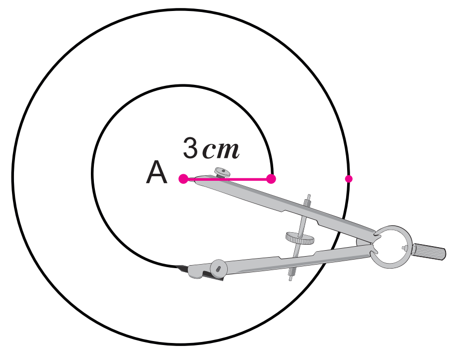
2. Se coloca la punta metálica del compás en el punto A, la punta graficadora en el otro extremo del segmento y se traza la circunferencia de radio 6cm.



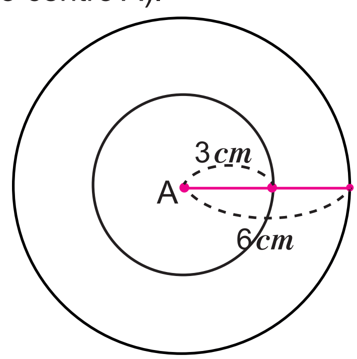
3. Se marca en el radio de la circunferencia anterior 3cm a partir del punto A.



4. Se coloca la punta metálica en el punto A, la punta graficadora en el otro extremo del segmento y se hace girar el compás para dibujar la circunferencia de radio 3cm.



5. Finalmente se tienen las siguientes circunferencias concéntricas (tienen el mismo centro A).



E

a) Dibuje una circunferencia de radio 4cm utilizando regla y compás.

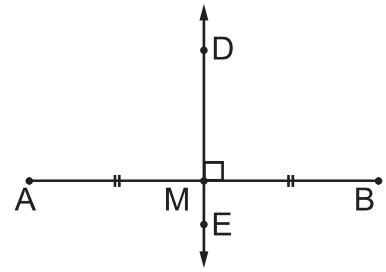
b) Dibuje con regla y compás una circunferencia de 5cm de radio, con centro en un punto A y trace un radio, un diámetro y un arco.

Contenido 2: Definición y construcción de la mediatriz de un segmento

Definición

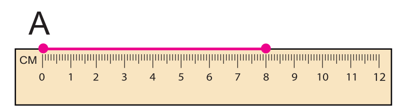
Mediatriz de un segmento: Es la recta perpendicular al segmento que lo divide en dos partes iguales.

$\overleftrightarrow{DE}$ es mediatriz del $\overline{AB}$ si y solo si $\overleftrightarrow{DE} \perp \overline{AB}$ y $AM = MB$.

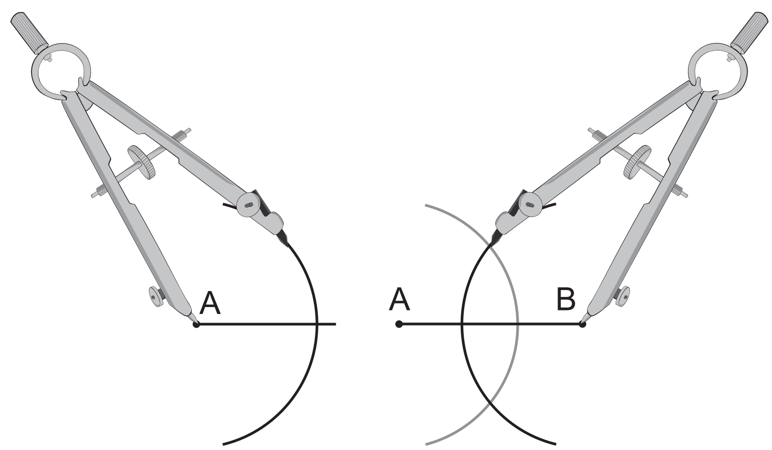


Ejemplo 1 Trace la mediatriz $\overleftrightarrow{l}$ del $\overline{AB}$ de longitud $8\,cm$ usando regla y compás.

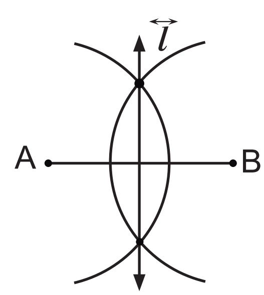
1. Se dibuja con la regla el $\overline{AB}$ de longitud $8\,cm$.



2. Se coloca la punta metálica del compás en el punto A, se abre este con una abertura mayor que la mitad de la longitud del segmento y se traza un arco. Se repite el mismo procedimiento con el punto B. Considerando la misma abertura.

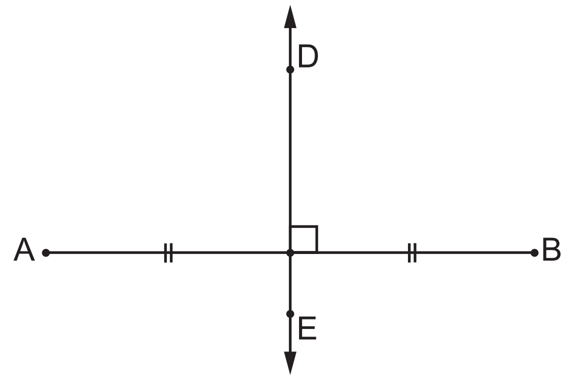


3. Se marcan los puntos de intersección de los dos arcos y se traza la $\overleftrightarrow{l}$ que pasa por estos puntos.
   La $\overleftrightarrow{l}$ es la mediatriz del $\overline{AB}$.



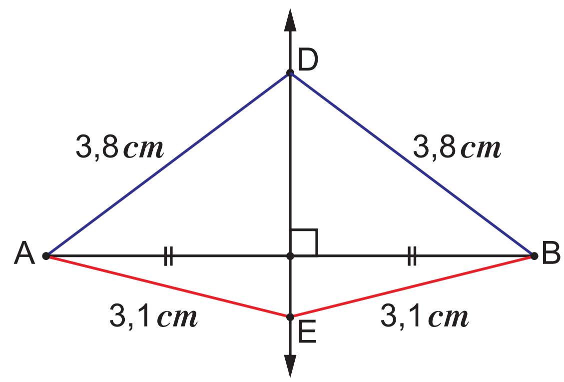
Se usa el transportador para comprobar que la medida del ángulo que forman la $\overleftrightarrow{l}$ y el $\overline{AB}$ es 90°.

Ejemplo 2 En el dibujo, la $\overleftrightarrow{DE}$ es mediatriz del $\overline{AB}$. Mida la longitud de $\overline{AD}$ y $\overline{DB}$. Haga lo mismo con $\overline{EA}$ y $\overline{EB}$. ¿Qué puede decir de los resultados obtenidos?



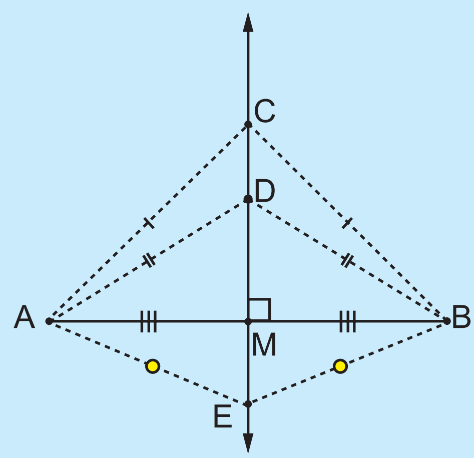
Se mide en la figura las longitudes de $\overline{AD}$ y $\overline{DB}$ y se obtiene que DA$=3,8\,cm$ y DB$=3,8\,cm$. También se constata que EA$=3,1\,cm$ y EB$=3,1\,cm$. Por consiguiente, los puntos D y E equidistan de los extremos del segmento.

Como $\overleftrightarrow{DE}$ es mediatriz del $\overline{AB}$, el punto D está a la misma distancia de A y B; igualmente E equidista de A y B.



C

Todos los puntos de la mediatriz de un segmento **equidistan de sus extremos**.
Según sugiere la figura con los puntos C, D, M y E.



AC$=$BC

AD$=$BD

AE$=$BE

E

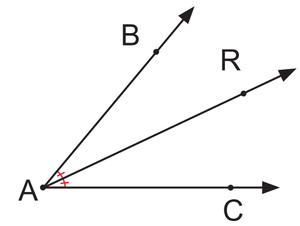
a) Trace la mediatriz del $\overline{AB}$ que tiene $6\,cm$ de longitud. Use regla y compás.

b) Si el $\overline{CD}$ tiene longitud $7\,cm$ trace la mediatriz de este segmento. Ubique un punto E sobre la mediatriz y compruebe que EC y ED son iguales.

Contenido 3: Definición y construcción de la bisectriz de un ángulo

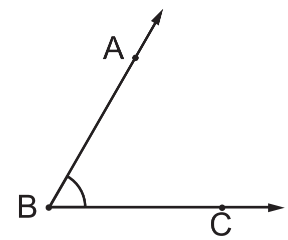
Definición

Bisectriz de un ángulo: Es el rayo que teniendo como origen el vértice del ángulo, divide a este en dos ángulos con iguales medidas.

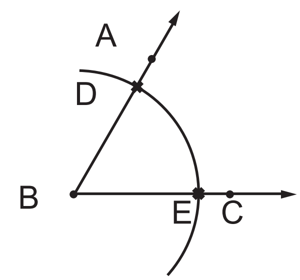


Ejemplo 1

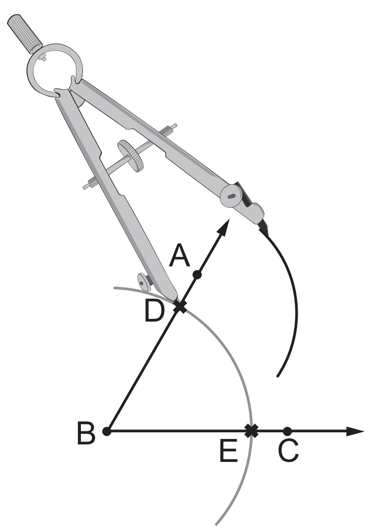
Dibuje la bisectriz del ∠ABC dado en la figura, utilizando regla y compás.

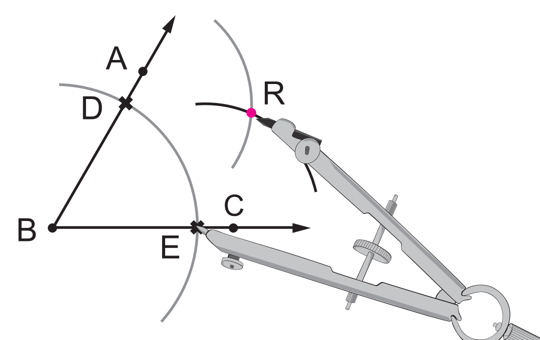


1. Usando una abertura cualquiera del compás, se hace centro en B y se traza un arco que corte los lados del ángulo en dos puntos D y E.

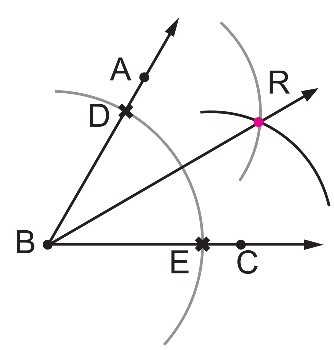


2. Se abre de nuevo el compás, se coloca su punta metálica primero en D y se traza un arco en el interior del ∠ABC; para E se procede igualmente, conservando la misma abertura del compás.



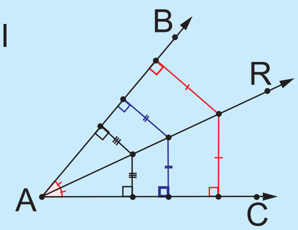


3. Se construye el $\overrightarrow{BR}$, que resulta ser la bisectriz de ∠ABC, según podemos ver en la última figura. Se comprueba con un transportador que las medidas de ∠ABR y ∠RBC son iguales.



C

Todos los puntos de la bisectriz $\overrightarrow{AR}$ del $\angle BAC$, están a igual distancia de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$



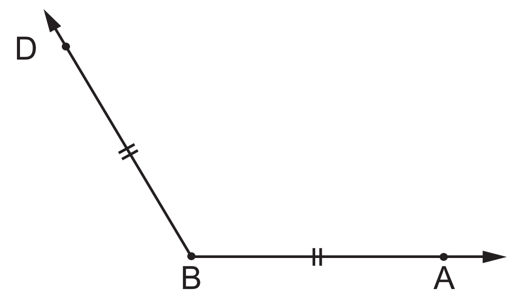
Ejemplo 2

En la siguiente figura de la derecha

a) Determine $\measuredangle ABD$.

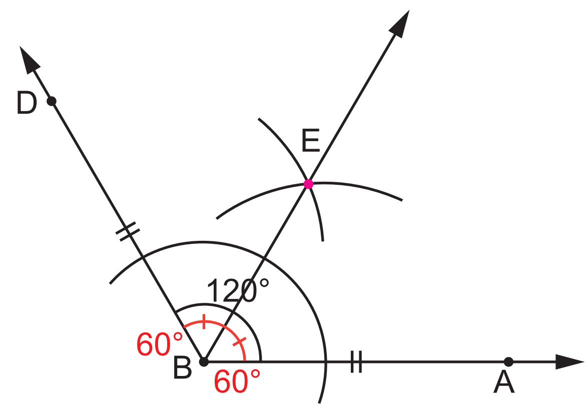
b) Dibuje la bisectriz $\overrightarrow{BE}$ del $\angle ABD$ utilizando regla y compás.

c) Determine las medidas de los ángulos que se forman al trazar la bisectriz $\overrightarrow{BE}$.



a) Usando el transportador: $\measuredangle ABD = 120°$.

b)



c) Usando el transportador se verifica que $\angle ABE$ y $\angle DBE$ tienen la misma medida, es decir, $\measuredangle ABE = 60°$ y $\measuredangle EBD = 60°$.

E

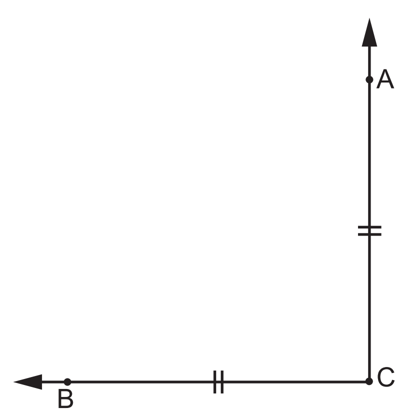
1. Dibuje un ángulo de 80° y trace su bisectriz utilizando regla, compás y transportador.

2. En la figura de la derecha:

   a) Determine $\measuredangle BCA$.

   b) Dibuje la bisectriz $\overrightarrow{CD}$ del $\angle BCA$.

   c) Determine la medida de los dos ángulos que se forman al trazar la bisectriz $\overrightarrow{CD}$.



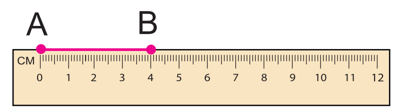
Contenido 4: Construcción de triángulos conociendo sus lados

P

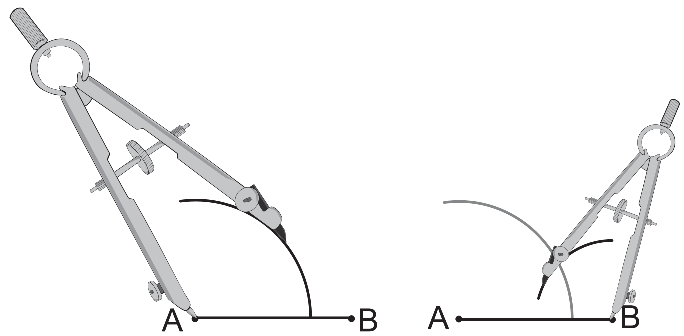
Utilizando regla y compás, dibuje un ΔABC cuyos lados midan AB$=4\,cm$, BC$=2\,cm$ y AC$=3\,cm$.

S

1. Se traza uno de los segmentos como base, en este caso el $\overline{AB}$ que mide $4\,cm$.

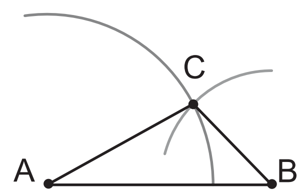


2. Tomando el centro en A, se traza un arco de radio $3\,cm$ sobre el $\overline{AB}$ y después eligiendo B como centro, se traza un arco de radio de $2\,cm$.



3. El punto común de los dos arcos proporciona el tercer vértice, que se denota con C.

4. Se unen los extremos A y B con C para formar el triángulo.

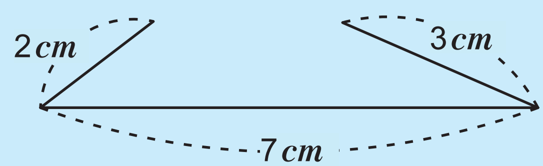


Se observa que:
AC$<$ AB$+$BC $(3<4+2)$, BC$<$AC$+$AB $(2<3+4)$ y AB$<$ BC$+$AC $(4<2+3)$.

C

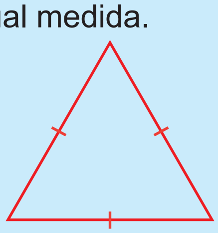
Para construir un triángulo debe cumplirse la condición de que la longitud de uno de sus lados sea menor que la suma de las longitudes de los otros dos.

En la figura no se puede formar un triángulo porque 7 no es menor que $2+3$.

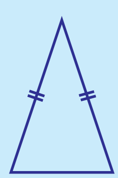


✓ Según la medida de sus lados, los triángulos se clasifican en:

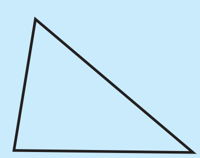
Triángulo equilátero: Tiene sus tres lados con igual medida.



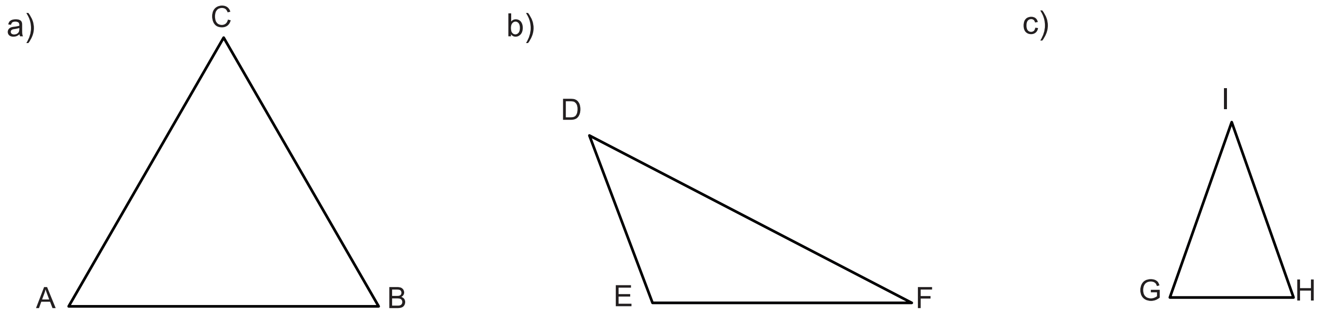
Triángulo isósceles: Dos de sus lados tienen igual medida.



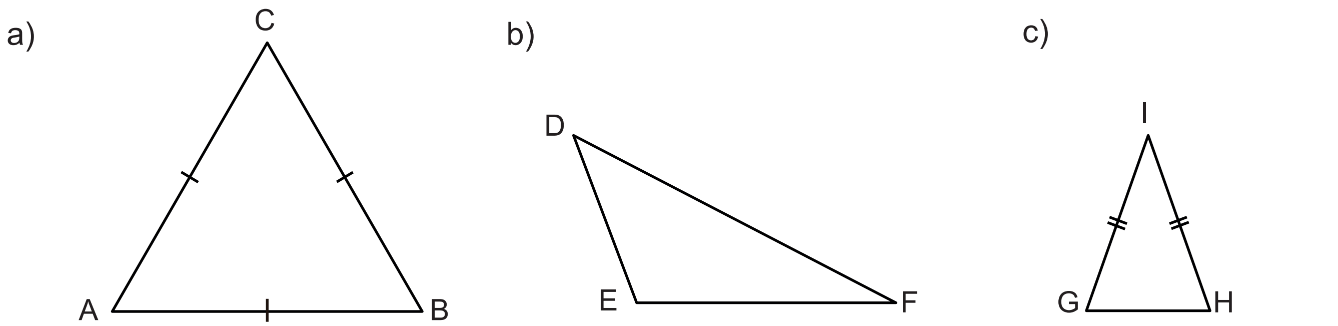
Triángulo escaleno: Sus tres lados tienen distintas medidas.



Ejemplo Clasifique los triángulos en equilátero, isósceles o escaleno y justifique.



Se utiliza una regla para medir los lados de los triángulos:



El ΔABC es equilátero porque tiene 3 lados con la misma medida.

El ΔDEF es escaleno porque posee 3 lados con medidas desiguales.

El ΔGHI es isósceles porque tiene 2 lados con la misma medida.

Construya los siguientes triángulos utilizando regla y compás:

a) El ΔABC cuyos lados miden $AB = 4\,cm$, $BC = 6\,cm$ y $AC = 8\,cm$.

b) El triángulo cuyos lados miden $5\,cm$ cada uno y clasifíquelo según la medida de sus lados.

c) El ΔABC con $AB = 4\,cm$, $BC = 5\,cm$ y $AC = 4\,cm$. Clasifíquelo según la medida de sus lados.

Contenido 5: Transformación de figuras (traslación, rotación y reflexión)

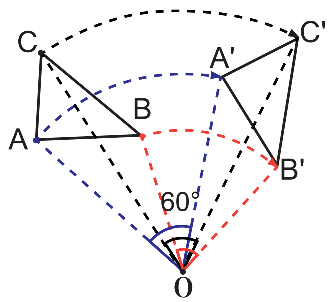
Definición

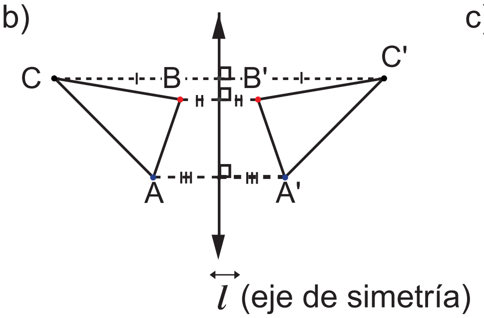
Las transformaciones o movimientos de una figura que no alteran su forma y tamaño son las siguientes:

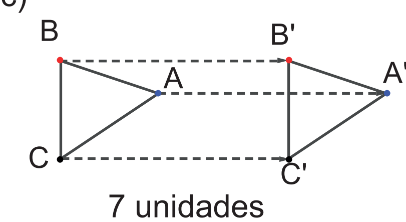
- ✓ **Rotación**: Es el giro de una figura plana alrededor de un punto llamado centro de rotación y a lo largo de un ángulo de giro.
- ✓ **Reflexión:** Es invertir la posición de una figura con respecto a una recta llamada eje de simetría.
- ✓ **Traslación:** Es mover una figura geométrica una distancia dada y en un sentido determinado.

P

En los siguientes incisos, clasifique los siguientes movimientos como rotación, reflexión o traslación.

a)


b)


c)


S

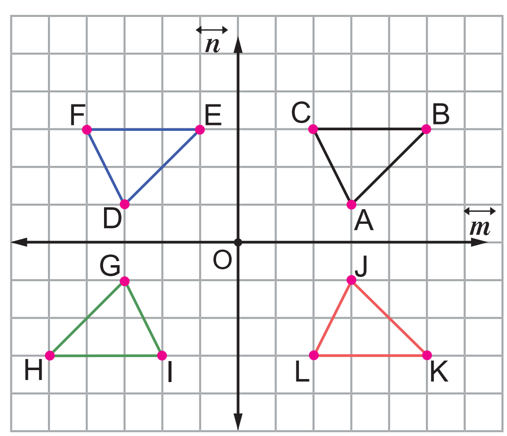
a) Se realiza **una rotación** porque el ΔABC se rota un ángulo de 60° alrededor del punto O. El triángulo obtenido es el ΔA'B'C', de igual forma y tamaño que el original.

b) Se realiza **una reflexión** porque el ΔABC se invierte a través de la $\overleftrightarrow{l}$, en la figura el ΔA'B'C' es el reflejo del ΔABC respecto de la $\overleftrightarrow{l}$.

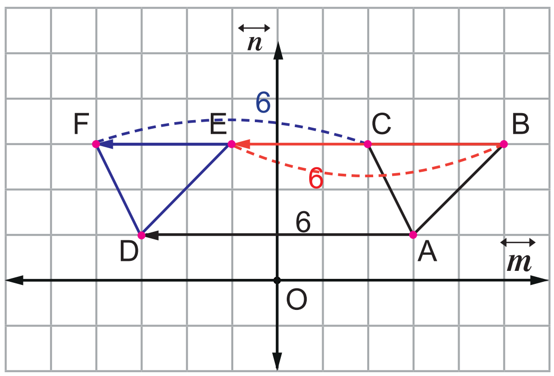
c) Se realiza **una traslación** del ΔABC, porque la figura geométrica se mueve horizontalmente a la derecha una distancia de 7 unidades.

Ejemplo

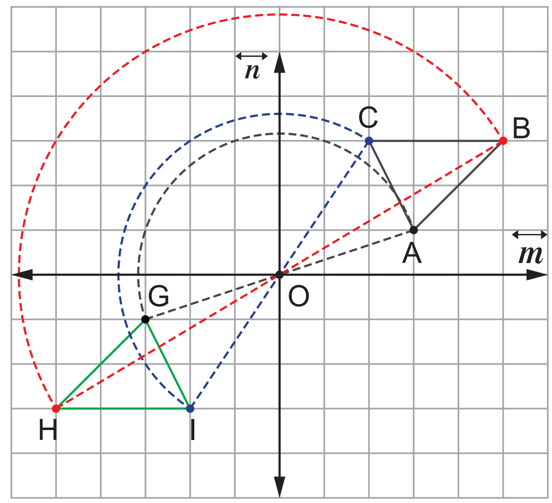
Identifique en la figura el tipo de movimiento que se aplicó al ΔABC para obtener ΔDEF, ΔGHI y ΔJKL.



El ΔDEF resulta de una **traslación** horizontal del ΔABC porque la figura se movió una distancia de 6 unidades hacia la izquierda.

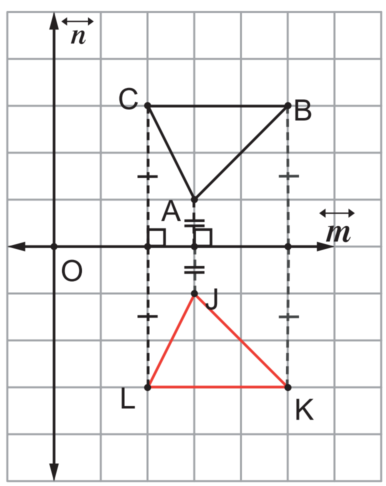


El ΔGHI se obtiene a partir de una **rotación** aplicada al ΔABC alrededor del punto O.



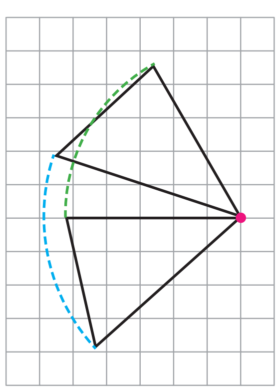
Se observa en la figura que el ángulo de rotación es de 180°.

El ΔJKL se obtiene de una **reflexión** del ΔABC respecto de la $\overleftrightarrow{m}$.

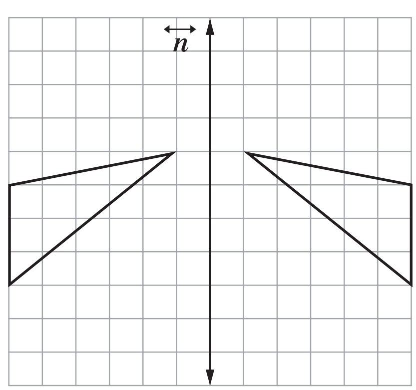


Clasifique los siguientes movimientos como rotación, traslación o reflexión:

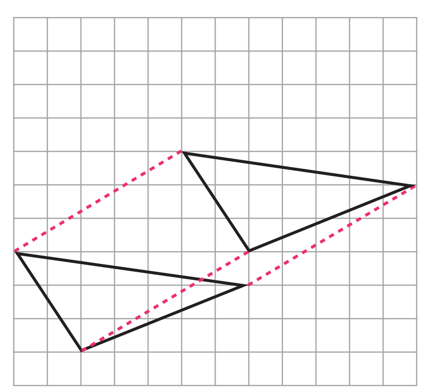
a)



b)



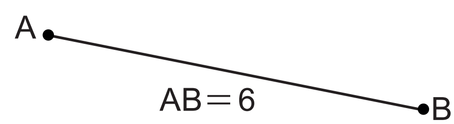
c)



Contenido 6: Comprobemos lo aprendido 2

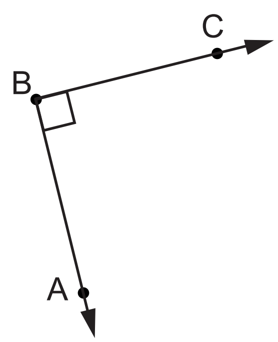
E

1. Trace la mediatriz del siguiente segmento usando regla y compás:

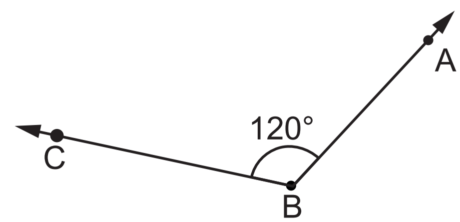


2. Construya la bisectriz de los siguientes ángulos; compruebe que la construcción es correcta encontrando que la medida de los dos ángulos formados es igual:

a)



b)

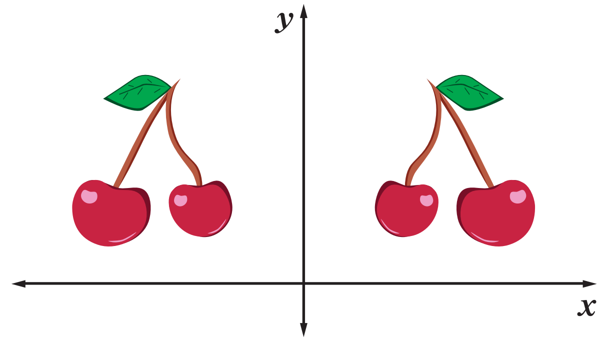


3. Con ayuda de una regla y un compás dibuje un triángulo con la medida de sus tres lados igual a $7\,cm$ e indique el nombre que recibe según la medida de sus lados.

4. Dibuje un triángulo cuyos lados midan 6, 7 y $8\,cm$. ¿Qué nombre recibe el triángulo según la medida de sus lados?

5. En la figura dada, elija uno de los incisos a) - e) que corresponda a la transformación realizada.

   a) Una reflexión respecto del eje y
   b) Una reflexión respecto del eje x
   c) Una rotación de 180° en el plano
   d) Una traslación horizontal
   e) Una traslación vertical



Unidad 7

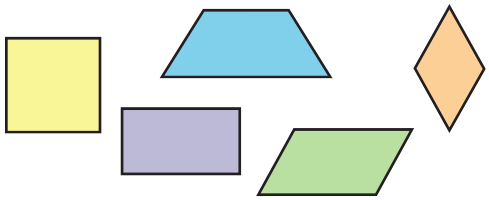
Medidas de Figuras Geométricas

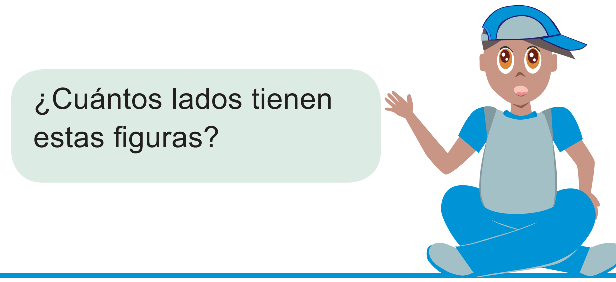
Sección 1: Perímetro de polígonos

Contenido 1: Cuadriláteros y sus características

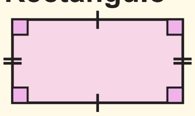
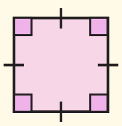
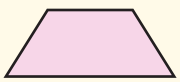
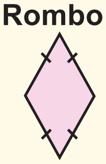
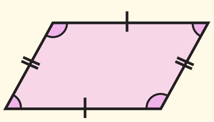
P

Mencione el nombre y características de los siguientes polígonos:



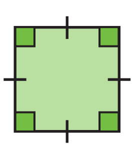


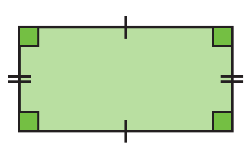
S

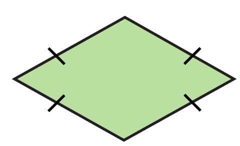
Rectángulo 	✓ Es un cuadrilátero porque tiene 4 lados ✓ Los lados opuestos tienen la misma medida ✓ Los cuatro ángulos miden 90°
Cuadrado 	✓ Es un cuadrilátero porque tiene 4 lados ✓ Todos los lados tienen la misma medida ✓ Los cuatro ángulos miden 90°
Trapecio 	✓ Es un cuadrilátero porque tiene 4 lados ✓ Un par de lados opuestos son paralelos
Rombo 	✓ Es un cuadrilátero porque tiene 4 lados ✓ Todos los lados tienen la misma medida ✓ Los ángulos opuestos tienen la misma medida
Paralelogramo 	✓ Es un cuadrilátero porque tiene 4 lados ✓ Dos pares de lados opuestos son paralelos ✓ Los lados opuestos tienen misma medida ✓ Los ángulos opuestos tienen la misma medida

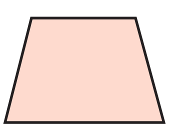
E

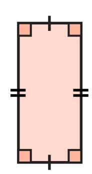
Escriba el nombre de cada cuadrilátero.

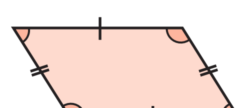
a) 

b) 

c) 

d) 

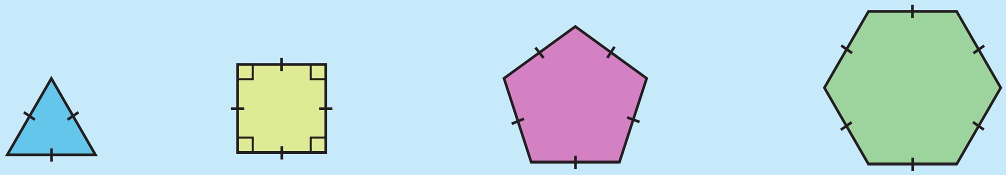
e) 

f) 

Contenido 2: Polígonos regulares y sus características

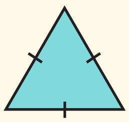
Repaso

Los polígonos regulares tienen sus lados y ángulos con la misma medida. Los siguientes polígonos son regulares:



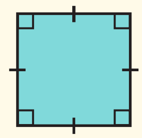
Los polígonos regulares tienen nombres especiales de acuerdo al número de lados.

Triángulo equilátero



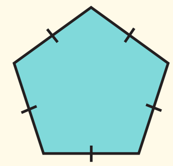
✓ Tiene 3 lados y 3 ángulos con la misma medida

Cuadrado



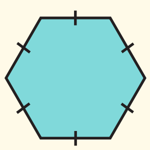
✓ Tiene 4 lados y 4 ángulos con la misma medida

Pentágono regular



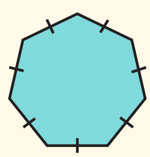
✓ Tiene 5 lados y 5 ángulos con la misma medida

Hexágono regular



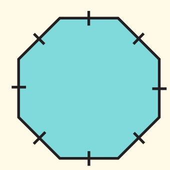
✓ Tiene 6 lados y 6 ángulos con la misma medida

Heptágono regular



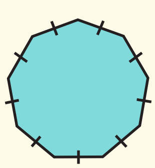
✓ Tiene 7 lados y 7 ángulos con la misma medida

Octágono regular



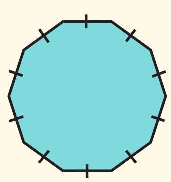
✓ Tiene 8 lados y 8 ángulos con la misma medida

Eneágono regular



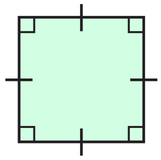
✓ Tiene 9 lados y 9 ángulos con la misma medida

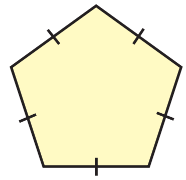
Decágono regular



✓ Tiene 10 lados y 10 ángulos con la misma medida

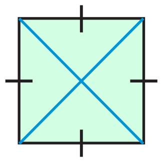
Ejemplo Escriba el nombre, número de lados y ángulos de los siguientes polígonos regulares. Trace sus diagonales y diga cuántas son.

a) 

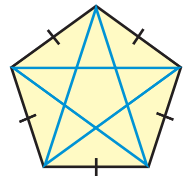
b) 

Recuerde que una **diagonal** de un polígono es un segmento que une dos vértices no consecutivos de este. 

a) Este polígono tiene 4 lados, 4 ángulos rectos y 2 diagonales. Es un cuadrado.

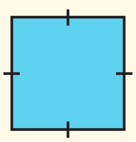
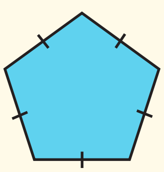
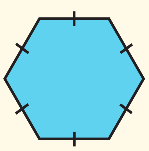
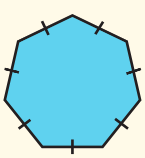


b) Este polígono regular tiene 5 lados, 5 ángulos de igual medida y 5 diagonales. Es un pentágono.



E

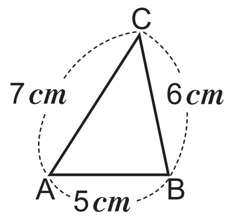
Escriba en cada casilla la información solicitada.

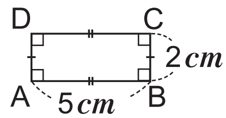
Polígono regular	Nombre	Número de lados	Número de ángulos	Número de diagonales
				
				
				
				

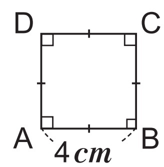
Contenido 3: Perímetro de triángulos y cuadriláteros

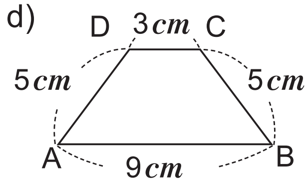
P

Calcule el perímetro de los siguientes polígonos.

a)


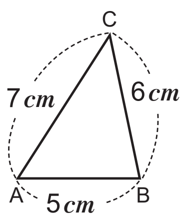
b)


c)


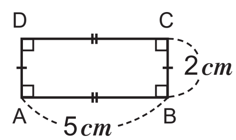
d)


S

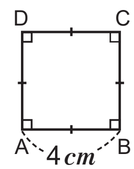
Se encuentra el perímetro de cada una de las figuras sumando las medidas de todos sus lados:

a)


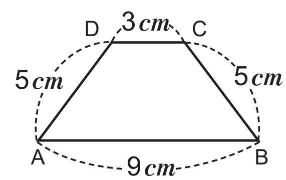
$$\begin{aligned} P &= 5+7+6 \\ &= \mathbf{18}\,(cm) \end{aligned}$$

b)


$$\begin{aligned} P &= 5+2+5+2 \\ &= \mathbf{14}\,(cm) \end{aligned}$$

c)


$$\begin{aligned} P &= 4+4+4+4 \\ &= \mathbf{16}\,(cm) \end{aligned}$$

d)


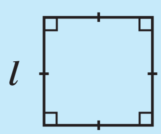
$$\begin{aligned} P &= 9+5+5+3 \\ &= \mathbf{22}\,(cm) \end{aligned}$$

C

El **perímetro** P de una figura geométrica es la suma de las medidas de todos sus lados.
En particular:

Para el cuadrado:

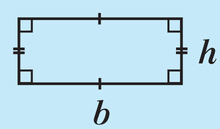
$$P = 4l$$



l: lado

Para el rectángulo:

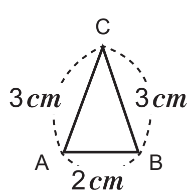
$$P = 2(b+h)$$

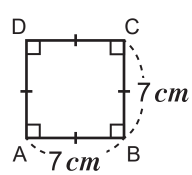


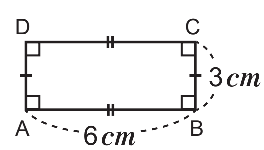
b: base
h: altura

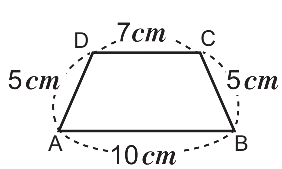
E

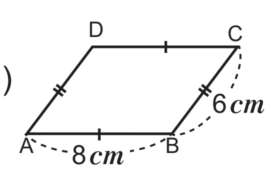
Calcule el perímetro de los siguientes polígonos.

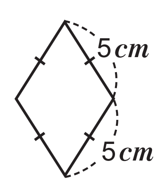
a)


b)


c)


d)


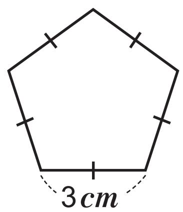
e)


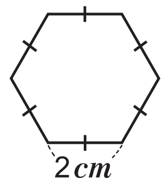
f)


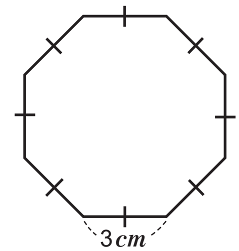
Contenido 4: Perímetro de polígonos regulares

P

Calcule el perímetro de los siguientes polígonos regulares.

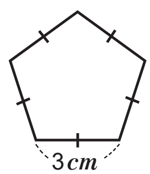
a)


b)


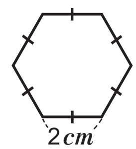
c)


S

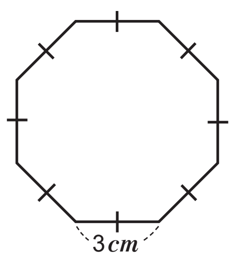
Se calcula el perímetro de cada uno de los polígonos regulares sumando las medidas de todos sus lados.

a)


$$\begin{aligned} P &= 3+3+3+3+3 \\ &= (5)(3) \\ &= \mathbf{15}\,(cm) \end{aligned}$$

b)


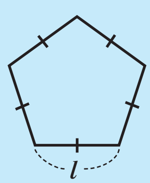
$$\begin{aligned} P &= 2+2+2+2+2+2 \\ &= (6)(2) \\ &= \mathbf{12}\,(cm) \end{aligned}$$

c)


$$\begin{aligned} P &= 3+3+3+3+3+3+3+3 \\ &= (8)(3) \\ &= \mathbf{24}\,(cm) \end{aligned}$$

C

Para encontrar el **perímetro** P de un polígono regular se utiliza la siguiente fórmula:



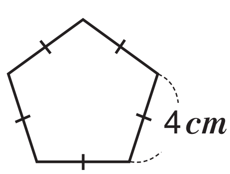
$$P = nl$$

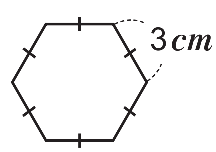
l: lado

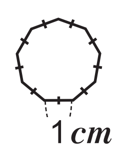
n: número de lados del polígono

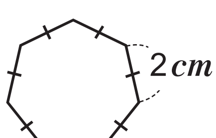
E

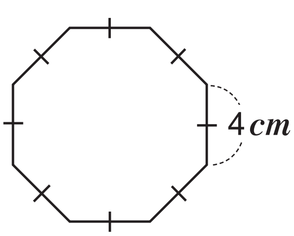
Calcule el perímetro de los siguientes polígonos regulares:

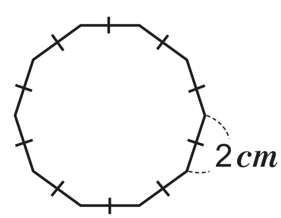
a)


b)


c)


d)


e)


f)


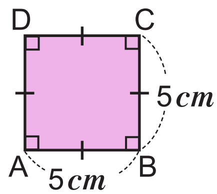
Sección 2: Área de triángulos y cuadriláteros

Contenido 1: Área del cuadrado y del rectángulo

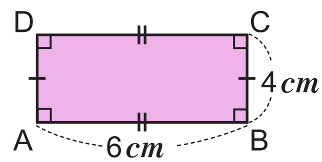
P

Calcule el área de los siguientes polígonos, utilizando el cuadrado de la derecha como unidad de medida.

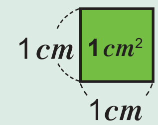
a)



b)



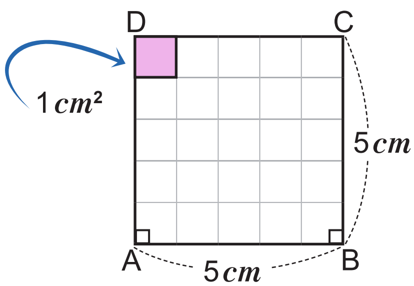
Recuerde que el área de un cuadrado de 1 cm de lado es 1 cm^2:



S

Se calcula el área A de cada uno de los polígonos dividiendo la región limitada por estos en cuadrados de lado 1 cm y área 1 cm^2, luego se cuentan:

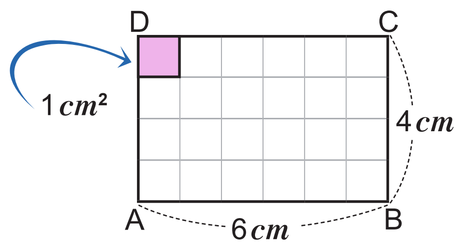
a)



Hay 5 columnas de 5 cuadrados cada una.

Por tanto, $A=(5)(5)=25\ (cm^2)$

b)

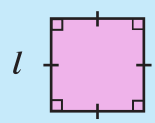


Hay 6 columnas de 4 cuadrados cada una.

Por tanto, $A=(6)(4)=24\ (cm^2)$

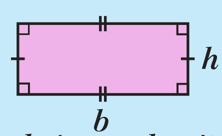
C

Para calcular el área A de un cuadrado y de un rectángulo se utilizan las siguientes fórmulas:



$A=l^2$

l: lado



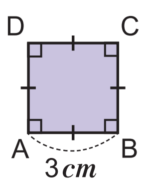
$A=bh$

b: base h: altura

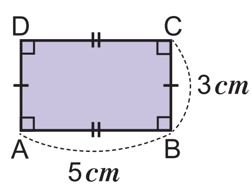
E

Calcule el área de los siguientes polígonos.

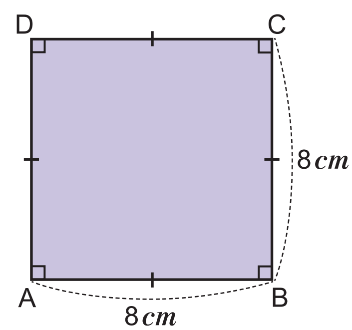
a)



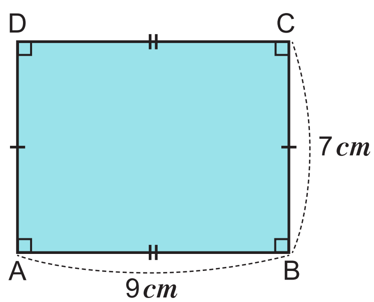
b)



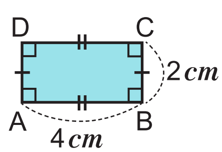
c)



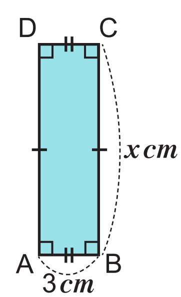
d)



e)



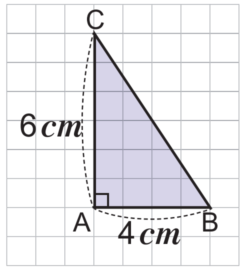
f)



Contenido 2: Área del triángulo

P

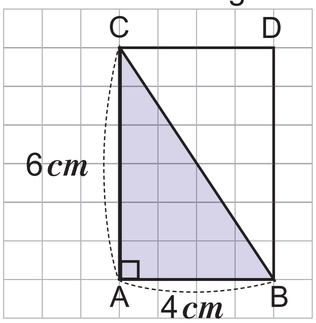
Calcule el área del triángulo de la derecha.



Recuerde que la **altura** de un triángulo es el segmento perpendicular a la base.

S

Se forma un rectángulo ABCD con base 4 cm y altura 6 cm. Luego



Área del rectángulo ABDC $= (4)(6) = 24\,cm^2$

De la figura podemos ver que el área del ΔABC es la mitad del área del rectángulo ABCD, es decir

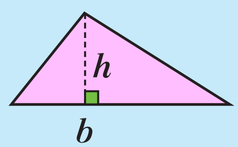
$$\text{Área del } \Delta ABC = \frac{\text{Área del rectángulo ABCD}}{2} = \frac{(4)(6)}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

El área del ΔABC es **12** cm^2.

C

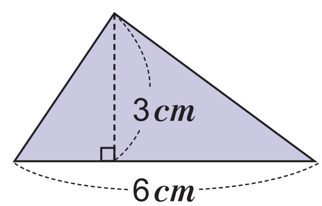
Para calcular el área A de un triángulo se utiliza la siguiente fórmula:

$$A = \frac{bh}{2}$$



b: base
h: altura

Ejemplo Calcule el área del triángulo de la derecha.

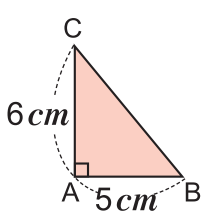


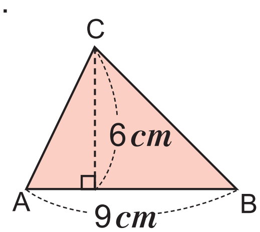
Para calcular el área del triángulo dado se utiliza la fórmula $A = \frac{bh}{2}$:

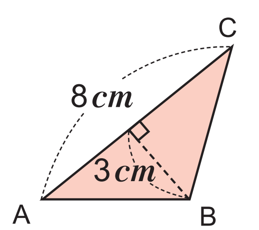
$$A = \frac{(6)(3)}{2} = \frac{18}{2} = \mathbf{9}\,(cm^2)$$

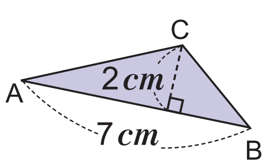
E

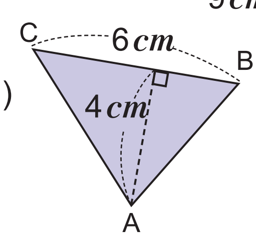
Calcule el área de los siguientes triángulos:

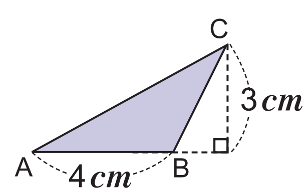
a)


b)


c)


d)


e)


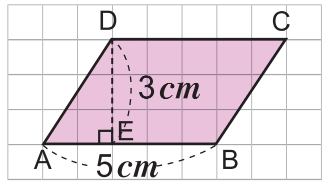
f)


Contenido 3: Área del paralelogramo

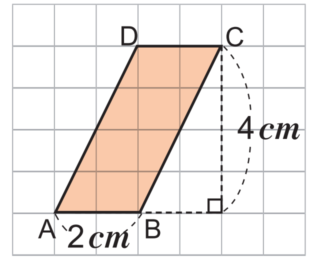
P

Calcule el área de los siguientes paralelogramos:

a)

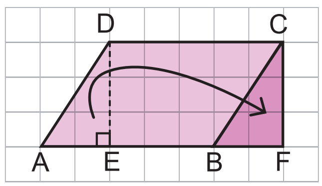


b)



S

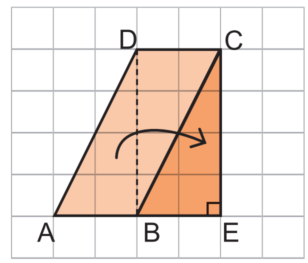
a)



Se observa que el ΔDEA y el ΔCFB tienen la misma área. Por lo tanto el área A del paralelogramo es igual al área del rectángulo EFCD:

$$A=(5)(3)=15\,(cm^2)$$

b)



El área A del paralelogramo DABC es igual al área del rectángulo BECD:

$$A=(2)(4)=8\,(cm^2)$$

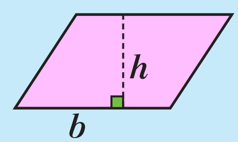
C

Para calcular el área A de un paralelogramo se utiliza la siguiente fórmula:

$$A=bh$$

b: base

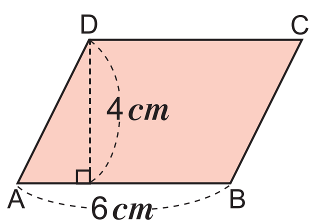
h: altura



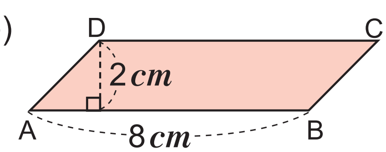
E

Calcule el área de los siguientes paralelogramos:

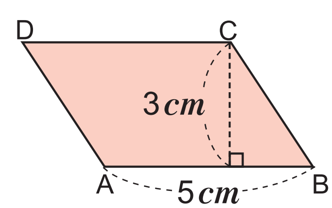
a)



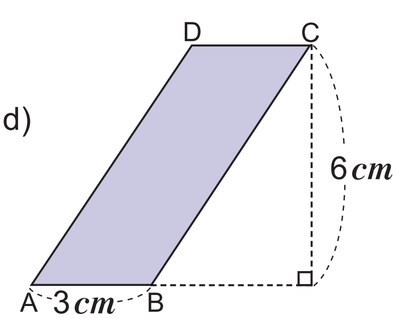
b)



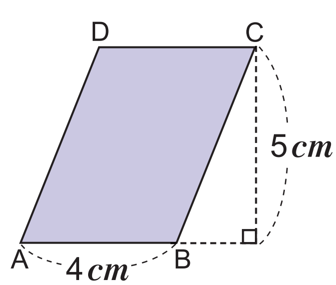
c)



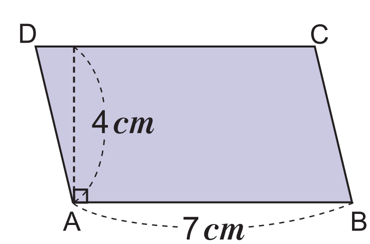
d)



e)



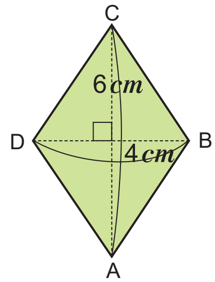
f)



Contenido 4: Área del rombo

P

Calcule el área rombo de la derecha.



Recuerde que en un rombo:

- ✓ Todos los lados tienen la misma medida.
- ✓ Las diagonales son perpendiculares y se cortan en sus puntos medios.

S

Se observa en la figura de la derecha que el área A del rombo ABCD es la mitad del área del rectángulo EFHI.

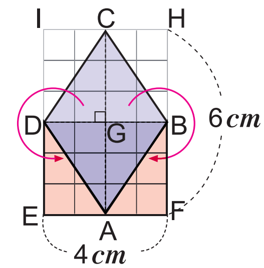
El área del rectángulo EFHI es:

$$(4)(6)=24$$

Entonces, el área del rombo es:

$$A=\frac{24}{2}=12$$

El área del rombo ABCD es **12 cm^2**.



(base del rectángulo) = (diagonal BD)

(altura del rectángulo) = (diagonal AC)

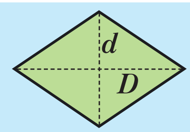
C

Para calcular el área A de un rombo se utiliza la siguiente fórmula

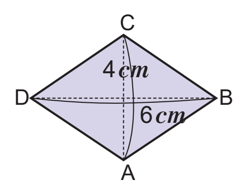
$$A=\frac{Dd}{2}$$

D: diagonal mayor

d: diagonal menor



Ejemplo Calcule el área del rombo de la derecha.

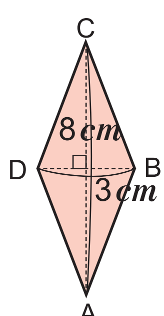


$$A=\frac{Dd}{2}=\frac{(6)(4)}{2}=\mathbf{12}\,(cm^2)$$

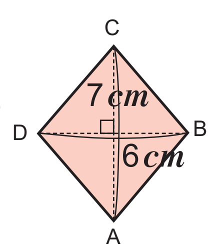
E

Calcule el área de los siguientes rombos:

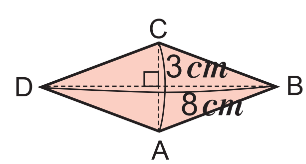
a)



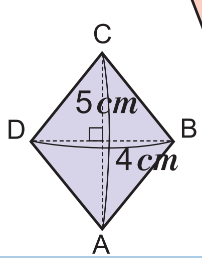
b)



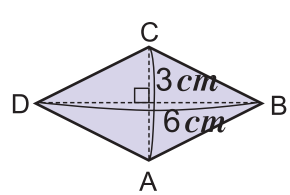
c)



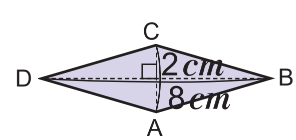
d)



e)



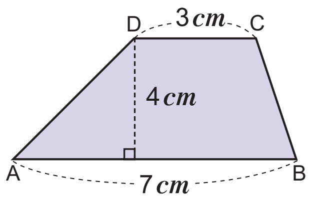
f)



Contenido 5: Área del trapecio

P

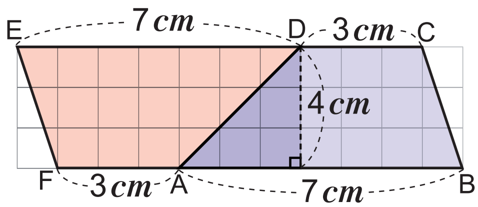
Calcule el área del siguiente trapecio:



Un trapecio es un cuadrilátero con dos de sus lados paralelos.

S

Se observa en la figura de abajo que el área A del trapecio ABCD es la mitad del área del paralelogramo FBCE.



El área del paralelogramo FBCE es:

$$(7+3)(4)=(10)(4)=40$$

Entonces, el área del trapecio ABCD es:

$$A = \frac{40}{2} = \mathbf{20}$$

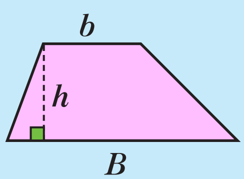
$$\left(\begin{array}{l}\text{base del}\\ \text{paralelogramo}\end{array}\right) = \left(\begin{array}{l}\text{base mayor}\\ \text{del trapecio}\end{array}\right) + \left(\begin{array}{l}\text{base menor}\\ \text{del trapecio}\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{l}\text{altura del}\\ \text{paralelogramo}\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c}\text{altura}\\ \text{del trapecio}\end{array}\right)$$

El área del trapecio ABCD es **20 cm^2**.

C

Para calcular el área A de un trapecio se utiliza la siguiente fórmula:

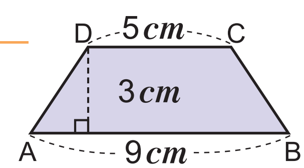


$$A = \frac{(B+b)h}{2}$$

B: base mayor b: base menor

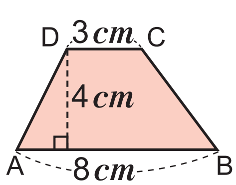
Ejemplo Calcule el área del trapecio de la derecha.

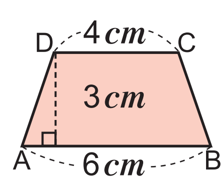
$$A = \frac{(B+b)h}{2} = \frac{(9+5)(3)}{2} = \frac{(14)(3)}{2}$$
$$= \frac{42}{2}$$
$$= \mathbf{21}(cm^2)$$

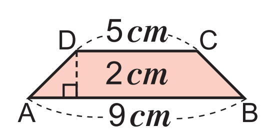


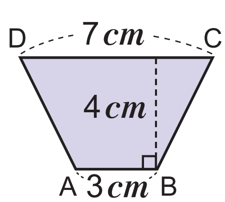
E

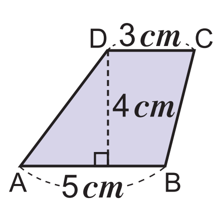
Calcule área de los siguientes trapecios:

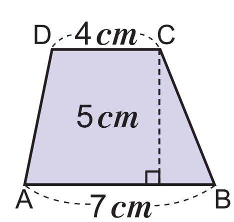
a)


b)


c)


d)


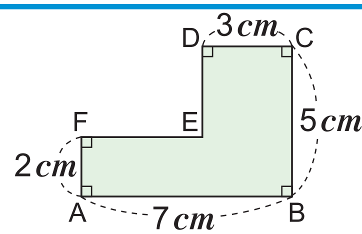
e)


f)


Contenido 6: Áreas combinadas

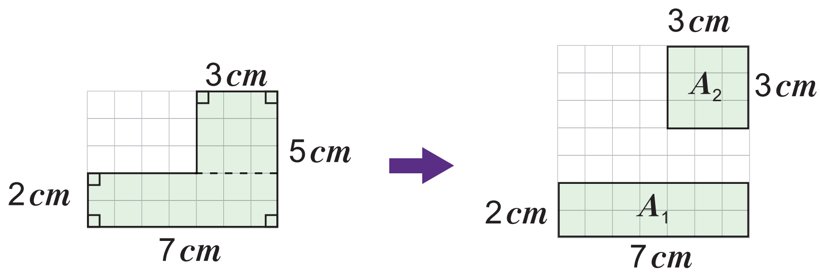
P

Calcule el área de la siguiente figura:



S

Se descompone la figura en un rectángulo y un cuadrado.



Área del rectángulo: $A_1 = (7)(2) = 14$

Área del cuadrado: $A_2 = (3)^2 = 9$

Área de la figura dada: $A = A_1 + A_2 = 14 + 9 = 23$

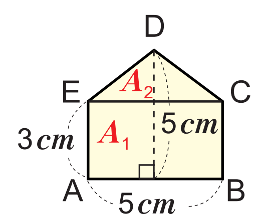
El área de la figura es **23 cm^2**.

C

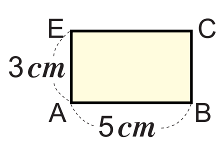
El cálculo de áreas de figuras con formas desconocidas:

1. Se descompone la figura dada en triángulos, cuadrados, rectángulos, etc.
2. Se calcula el área de cada una de las figuras conocidas.
3. Se suman todas las áreas calculadas.

Ejemplo Calcule el área total de la figura de la derecha

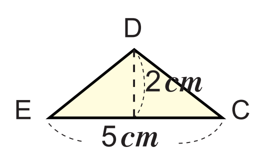


Se descompone la figura en un rectángulo y un triángulo:



Se calcula el área del rectángulo

$A_1 = (5)(3) = 15$



Se calcula el área del triángulo

$$A_2 = \frac{(5)(2)}{2} = 5$$

La altura del ΔDEC:

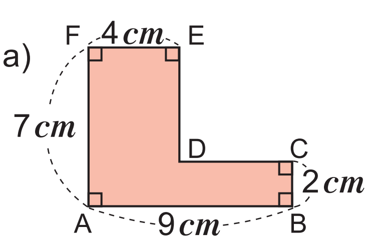
5 − AE = 5 − 3 = 2

El área de la figura dada es $A = A_1 + A_2 = 15 + 5 = \mathbf{20}\,(cm^2)$.

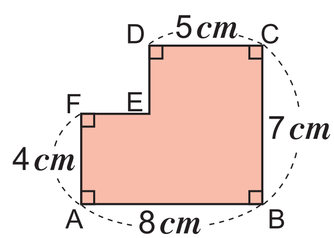
E

Calcule el área de las siguientes figuras de la derecha.

a)



b)

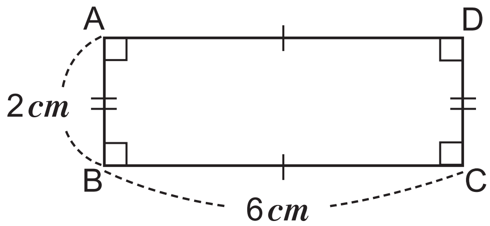


Contenido 7: Comprobemos lo aprendido 1

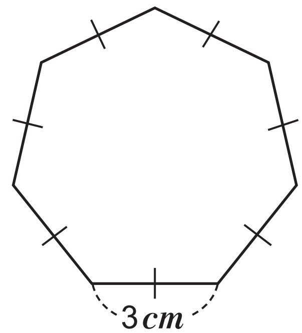
E

1. Calcule el perímetro de los siguientes polígonos:

a)



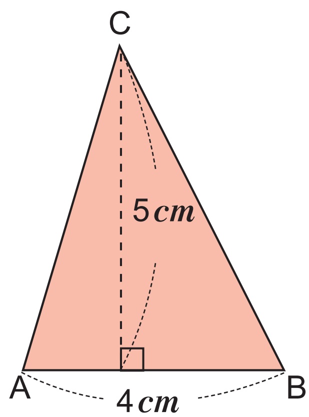
b)



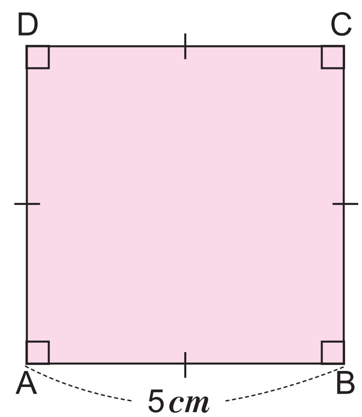
Heptágono Regular

2. Calcule el área de las siguientes figuras.

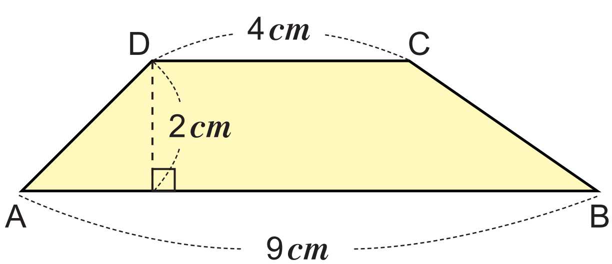
a)



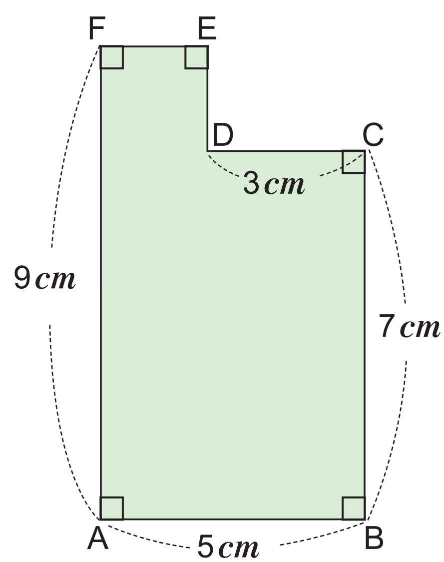
b)



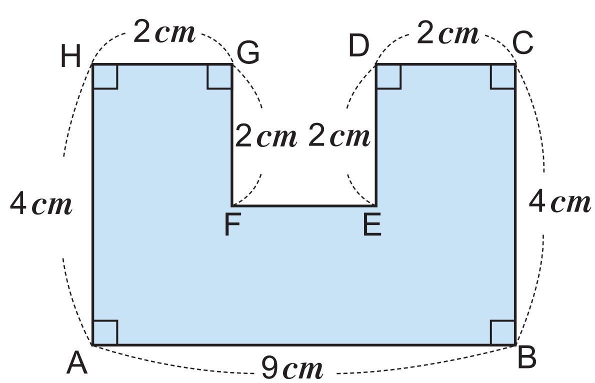
c)



d)



e)



Sección 3: Círculo y sector circular

Contenido 1: Elementos de la circunferencia

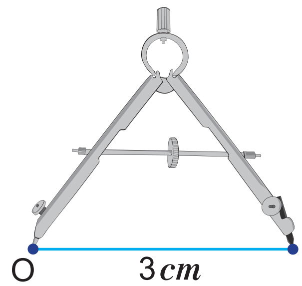
P

Dibuje una circunferencia de $3\,cm$ de radio.

¿Cuánto mide un diámetro de esta circunferencia?

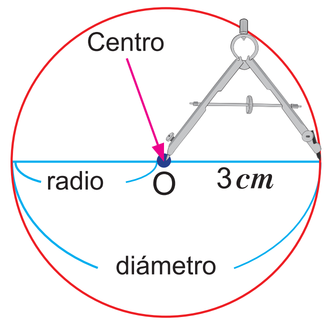
S

Para dibujar una circunferencia de $3\,cm$ de radio se fija el compás en un punto O llamado **centro** y se abre $3\,cm$ que será la longitud del **radio**.



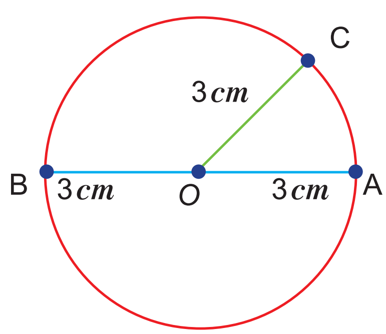
Una **circunferencia** es el conjunto de puntos del plano que se encuentran a una misma distancia de un punto fijo llamado centro.

Se gira el compás una vuelta entera hasta que el lápiz regrese al punto inicial.



Diámetro de una circunferencia es un segmento cuyos extremos pertenecen a esta.

Por la definición de circunferencia se tiene que la distancia del centro a cualquier punto de esta es siempre la misma, entonces $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$ son radios de la circunferencia luego, $OA=OB=OC=r$ y $\overline{BA}$ es un diámetro que como tal cumple: $BA=2OA=2r$.



En la circunferencia del problema el radio r mide $3\,cm$ y en consecuencia el diámetro D mide:

$$D=2r=(2)(3)=6\,(cm)$$

Los elementos más importantes de la circunferencia son:

- **Centro** es un punto que se encuentra a la misma distancia de todos los puntos de la circunferencia. (O es centro)

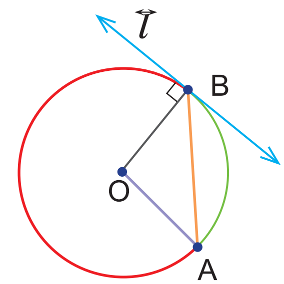
- **Radio** es un segmento cuyos extremos son el centro y un punto de la circunferencia. ($\overline{OA}$ es un radio)

- **Diámetro** de una circunferencia es un segmento que une dos puntos de esta y que pasa por el centro.

- **Cuerda** es un segmento cuyos extremos pertenecen a una circunferencia. ($\overline{AB}$ es una cuerda)

- Un **arco** es la parte de una circunferencia comprendida entre dos puntos de esta. ($\overset{\frown}{AB}$ es un arco)

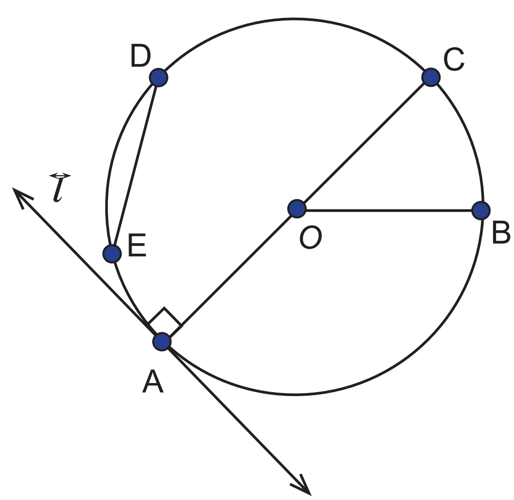
- **Recta tangente** a una circunferencia es una recta que intersecta a la circunferencia en exactamente un punto. ($\overleftrightarrow{l}$ es una recta tangente)



La recta tangente $\overleftrightarrow{l}$ es perpendicular a $\overline{OB}$. Se escribe: $\overleftrightarrow{l} \perp \overline{OB}$

E

Escriba el nombre correspondiente a cada elemento de la siguiente circunferencia:



a) $\overline{AC}$: ______________   b) $\overline{OB}$: ______________   c) $\overline{DE}$: ______________

d) O: ______________   e) $\overset{\frown}{CB}$: ______________   f) $\overleftrightarrow{l}$: ______________

Contenido 2: Longitud de la circunferencia

P

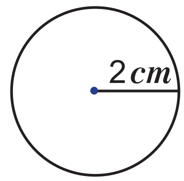
a) Calcule el radio de una circunferencia de $4\,cm$ de diámetro.
b) ¿Cuál es la longitud de una circunferencia de $4\,cm$ de diámetro?
c) Divida la longitud encontrada en b) entre la longitud del diámetro.
d) Complete la siguiente tabla:

Diámetro (D)	$3\,cm$	$4\,cm$	$5\,cm$	$6\,cm$
Longitud (L)	$9{,}4\,cm$	$12{,}6\,cm$	$15{,}7\,cm$	$18{,}9\,cm$
$L \div D$		3,15		

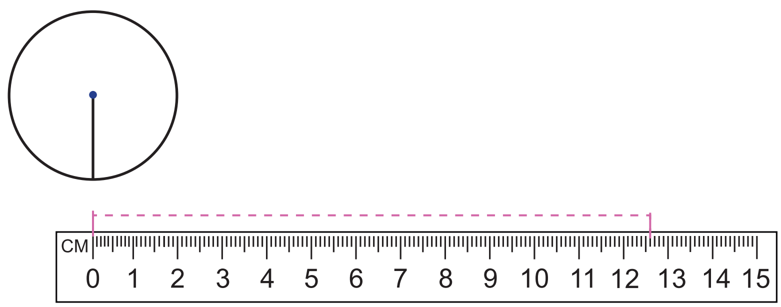
S

a) Como la longitud del diámetro es $4\,cm$ y $D=2r$ entonces:

$$r = \frac{D}{2} = \frac{4}{2} = \mathbf{2\,(cm)}$$



b) Luego de dibujar la circunferencia requerida se bordea esta con un cordón y después se extiende para medirlo con una regla, encontrando que aproximadamente mide $12{,}6\,cm$. Esta es la longitud de la circunferencia dada y se denota por L, es decir, $L=\mathbf{12{,}6\,cm}$.



c) Se divide la longitud encontrada, entre el diámetro de la circunferencia.

$$L \div D = \mathbf{12{,}6 \div 4 = 3{,}15}.$$

$$\begin{array}{r|l} 12{,}6 & 4 \\ \cline{2-2} 12 & 3{,}15 \\ \hline 06 & \\ -4 & \\ \hline 20 & \\ -20 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

d) Se completa la tabla

Diámetro (D)	$3\,cm$	$4\,cm$	$5\,cm$	$6\,cm$
Longitud (L)	$9{,}4\,cm$	$12{,}6\,cm$	$15{,}7\,cm$	$18{,}9\,cm$
$L \div D$	**3,13**	3,15	**3,14**	**3,15**

Se observa que el resultado de $L \div D$ se aproxima a 3,14 conocido como π (pi).

Entonces:

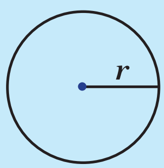
$$\frac{L}{D} = \pi$$

$$L = \pi D$$

Normalmente se asigna a π el valor de 3,14159, aunque la cantidad de cifras decimales depende de la aplicación que se debe hacer.

C

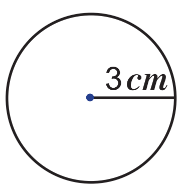
La longitud de una circunferencia se calcula utilizando la siguiente fórmula:



$$L = \pi D = 2\pi r$$

Recuerda que
$D = 2r$

Ejemplo Calcule la longitud de la circunferencia de la figura.



$$\begin{aligned} L &= 2\pi r \\ &= 2\pi(3) \\ &= (2)(3)\pi \\ &= \mathbf{6\pi\ (cm)} \end{aligned}$$

Puede aproximar el valor de L usando $\pi = 3{,}14$ y multiplicando:
$L \approx 6(3{,}14) \approx 18{,}84\,cm$
"$\approx$" se lee "aproximadamente"

E

Calcule la longitud de las circunferencias con los siguientes datos.

Nota: r es radio, D es diámetro

a) $r = 4\,cm$ b) $r = 5\,cm$ c) $r = 1\,cm$

d) $D = 12\,cm$ e) $D = 6\,cm$ f) $D = 14\,cm$

Contenido 3: Área del círculo

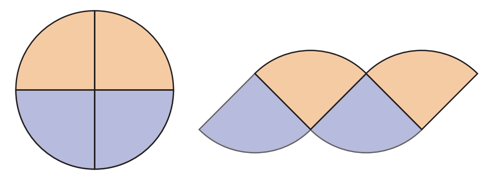
P

Calcule el área de un círculo de $4\,cm$ de radio.

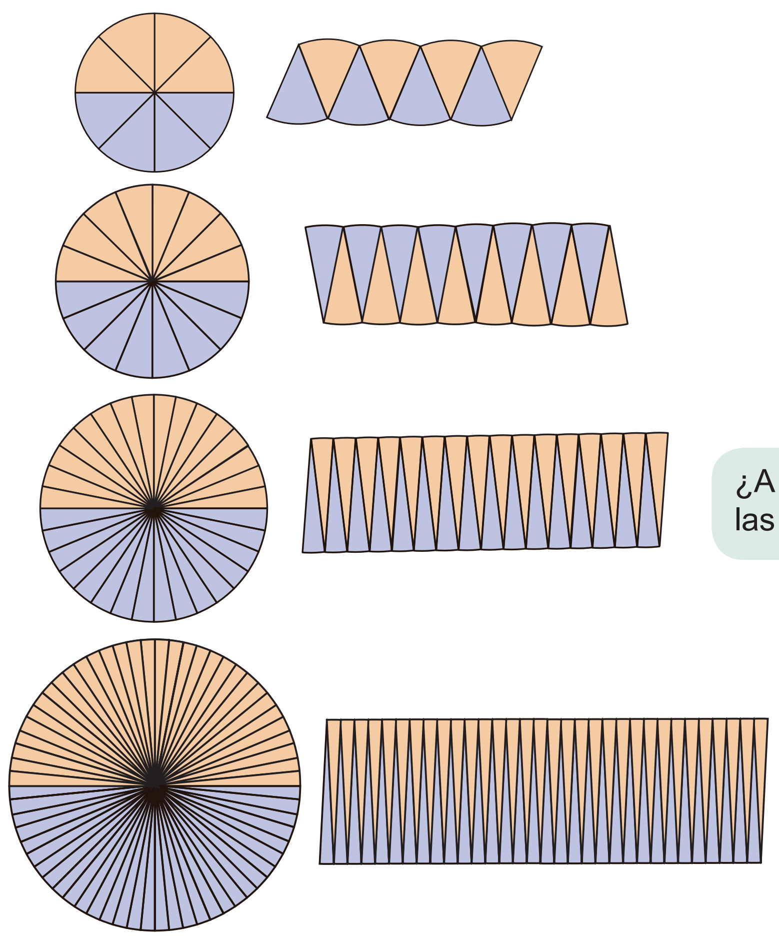
El **círculo** es una figura plana limitada por una circunferencia.

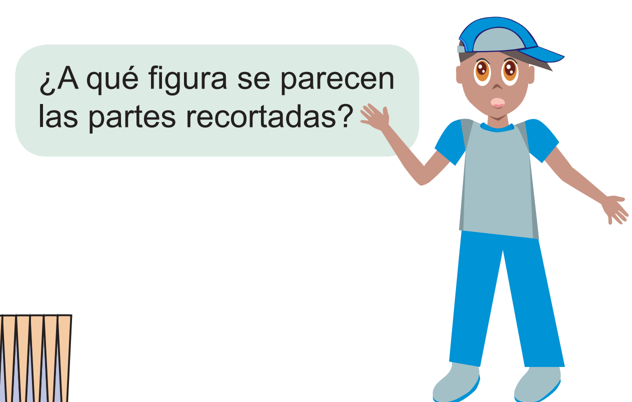
S

Al doblar el círculo por la mitad, cortar y juntar las partes con la misma frontera se obtiene una figura con la misma área del círculo.

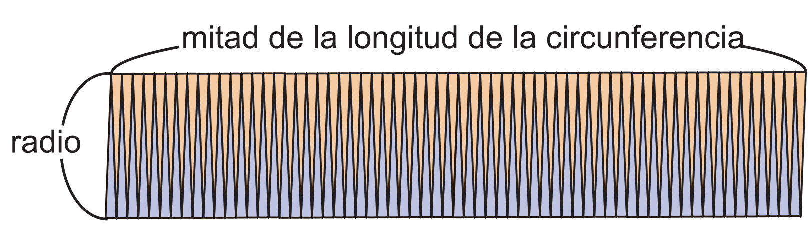


El proceso puede continuarse, tal como se ilustra en las siguientes gráficas, dividiendo el círculo en 8, 16, 32, 64 partes iguales.





Entre mayor sea el número de partes iguales en las que se divida el círculo se parecerá más a un rectángulo como el que se presenta a continuación:



Se concluye que el área de un círculo es igual al área de un rectángulo cuya base es la mitad de la longitud de la circunferencia y la altura es el radio del círculo, es decir

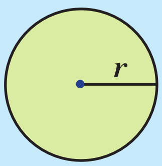
$$\begin{aligned} A &= \left[\frac{2\pi(4)}{2}\right](4) \\ &= [\pi(4)](4) \\ &= (4)(4)\pi \\ &= 16\pi \end{aligned}$$

La longitud de la circunferencia es: $2\pi r$

El área del círculo es **$16\pi\ cm^2$**.

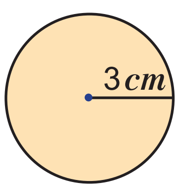
C

Para calcular el área A de un círculo de radio r se utiliza la siguiente fórmula:



$$A = \pi r^2$$

Ejemplo Calcule el área del círculo con un radio de $3cm$.



$$\begin{aligned} A &= \pi r^2 \\ &= \pi(3^2) \\ &= 9\pi \end{aligned}$$

El área de este círculo es $9\pi\ cm^2$.

E

Encuentre el área de los círculos con las siguientes medidas.

a) $r = 2cm$ b) $r = 6cm$ c) $r = 5cm$

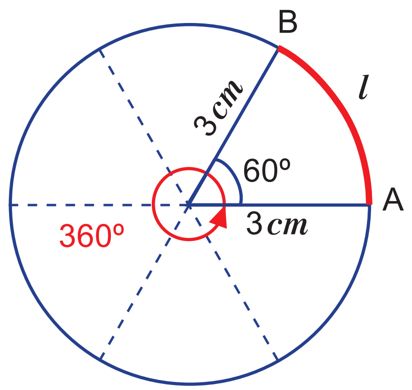
d) $D = 6cm$ e) $D = 8cm$ f) $D = 12cm$

Contenido 4: Longitud de arco

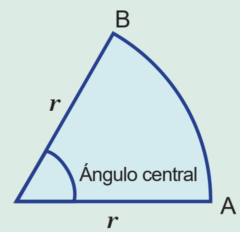
P

Calcule la longitud del arco $\overset{\frown}{AB}$ de una circunferencia de radio $3\,cm$.

S



Un ángulo central tiene como vértice el centro de la circunferencia y los lados son dos radios.



Se sabe que 60 es una sexta parte de 360:

$$\frac{60}{360} = \frac{1}{6}$$

Ahora, según la figura dada en el problema la longitud del $\overset{\frown}{AB}$ es una sexta parte de la longitud de la circunferencia. Entonces, si L es la longitud del círculo y l es la longitud del arco, se cumple la igualdad:

$$\frac{l}{L} = \frac{1}{6}$$

Se procede a calcular L y l:

$$\begin{aligned} L &= 2\pi r \\ &= 2\pi(3) \\ &= 6\pi\ cm \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l &= \frac{1}{6}L \\ &= \left(\frac{1}{6}\right)[2\pi(3)] \\ &= \left(\frac{1}{6}\right)(6\pi) \\ &= \pi \end{aligned}$$

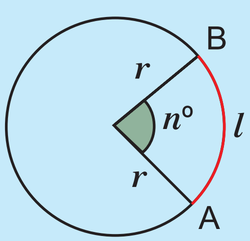
La longitud del $\overset{\frown}{AB}$ es $\pi\ cm$.

$$\frac{l}{L} = \frac{n}{360}$$

Esto significa que la longitud de un arco **es proporcional** al ángulo central.

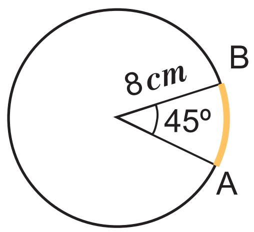
C

La longitud l del $\overset{\frown}{AB}$ se calcula utilizando la fórmula:



$$l = \frac{n}{360}(2\pi r)$$

Ejemplo Calcule la longitud del $\overset{\frown}{AB}$ en la circunferencia dada.



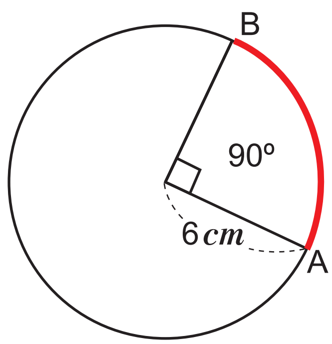
$$
\begin{aligned}
l &= \frac{n}{360}(2\pi r)\\
&= \left(\frac{45}{360}\right)(2\pi)(8)\\
&= \left(\frac{1}{8}\right)(16\pi)\\
&= 2\pi
\end{aligned}
$$

La longitud del $\overset{\frown}{AB}$ es $\boldsymbol{2\pi\ cm}$.

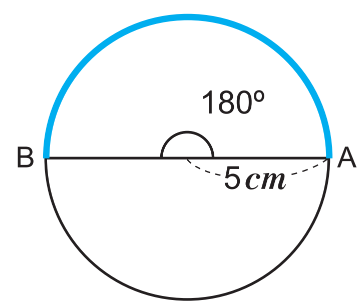
E

Calcule las longitudes de los arcos señalados en las siguientes circunferencias:

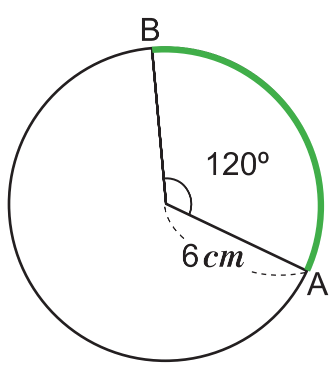
a)



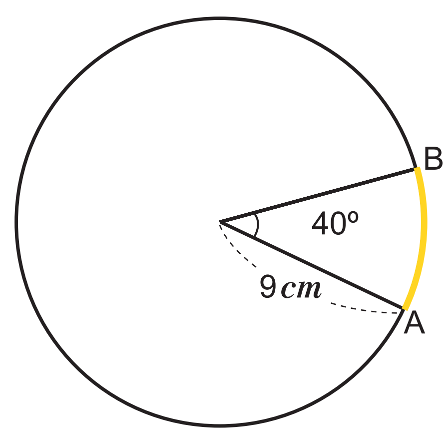
b)



c)



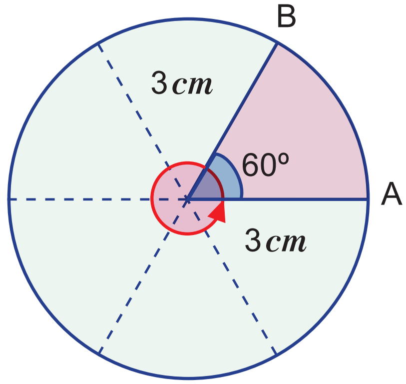
d)



Contenido 5: Área del sector circular

P

Calcule el área del sector circular coloreado en la figura.



Recuerde que un **sector circular** es la parte del círculo comprendida entre dos radios y el arco que estos delimitan.

S

Se sabe que 60 es una sexta parte de 360:

$$\frac{60}{360} = \frac{1}{6}$$

además, el sector circular indicado en la figura es una sexta parte del círculo, es decir, si S es el área del sector circular y A el área del círculo, entonces se cumple la igualdad:

$$\frac{S}{A} = \frac{1}{6}$$

Se procede a calcular S y A:

$$\begin{aligned} A &= \pi r^2 \\ &= \pi(3^2) \\ &= 9\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{6}A \\ &= \frac{1}{6}[\pi(3^2)] \\ &= \left(\frac{1}{6}\right)(9\pi) \\ &= 1{,}5\pi \end{aligned}$$

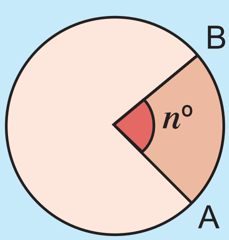
$$\frac{S}{A} = \frac{n}{360}$$

Esto significa que el área de un sector circular es **proporcional** al ángulo central.

El área del sector circular es **1,5π cm^2**.

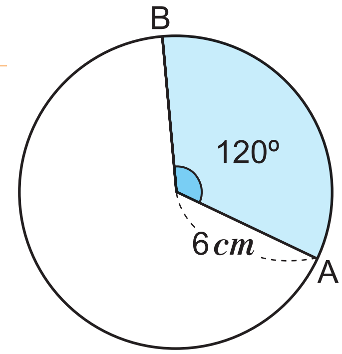
C

Para encontrar el área de un sector circular se utiliza la fórmula:



$$S = \frac{n}{360}(\pi r^2)$$

Ejemplo Calcule el área del sector circular coloreado en la figura.



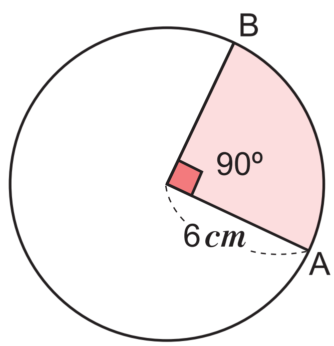
En este caso $n = 120º$ y $r = 6\,cm$. Luego se aplica la fórmula para S:

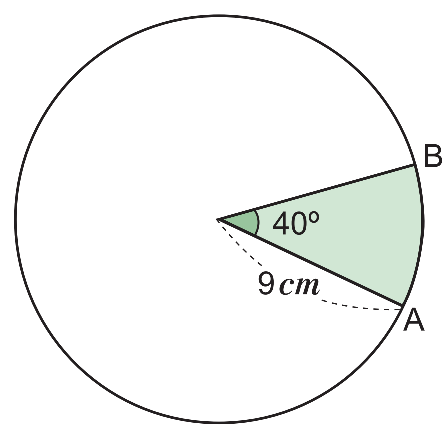
$$S = \frac{n}{360}(\pi r^2)$$
$$= \left(\frac{120}{360}\right)(\pi)(6^2)$$
$$= \left(\frac{1}{3}\right)(36\pi)$$
$$= 12\pi$$

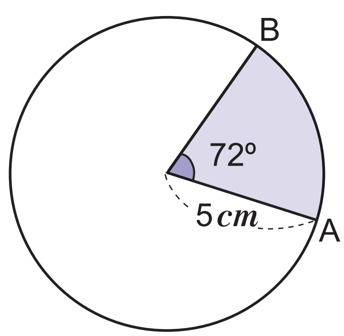
El área del sector circular es **$12\pi\ cm^2$**.

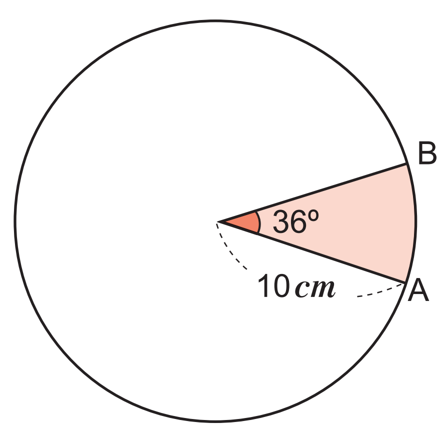
E

Calcule el área de los siguientes sectores circulares:





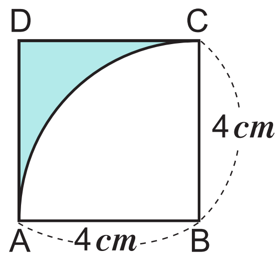




Contenido 6: Cálculo de áreas sombreadas

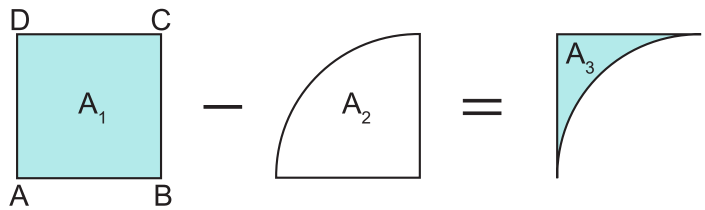
P

Calcule el área de la región sombreada en la siguiente figura. Identificando las figuras conocidas.



S

Sea A_1 el área del cuadrado ABCD, A_2 el área del sector circular ABC y A_3 el área de la región sombreada que queda al recortar el sector circular del cuadrado:



Entonces para calcular el área de la región sombreada A_3 se resta el área del sector circular A_2 al área del cuadrado A_1:

$$\begin{aligned} A_3 &= A_1 - A_2 \\ &= (4)^2 - \left(\frac{90}{360}\right)\pi(4^2) \\ &= 16 - \left(\frac{1}{4}\right)(16\pi) \\ &= 16 - 4\pi \\ &= 16 - 4\pi \end{aligned}$$

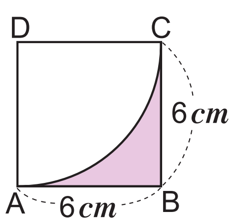
El área de la región sombreada es $(16-4\pi)\ cm^2$.

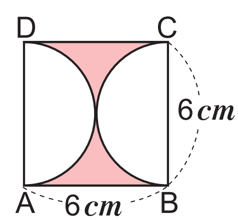
C

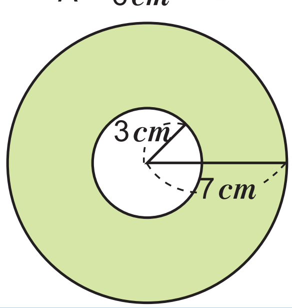
Para calcular el área de una región sombreada contenida en una región grande conocida se resta al área de esta el área de la región o regiones no sombreadas.

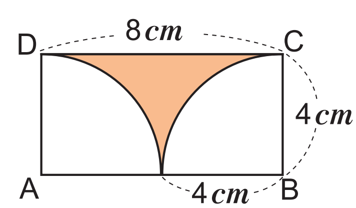
E

Calcule el área de las siguientes regiones sombreadas:

a) 

b) 

c) 

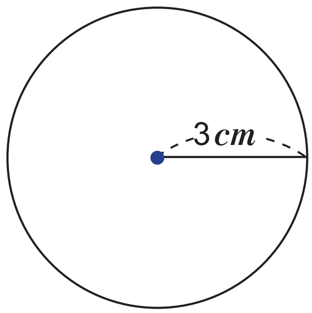
d) 

Contenido 7: Comprobemos lo aprendido 2

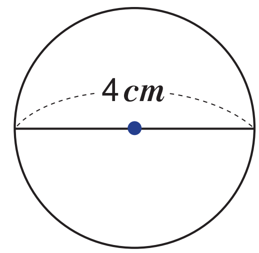
E

1. Calcule la longitud de cada una de las circunferencias y el área de los sectores circulares

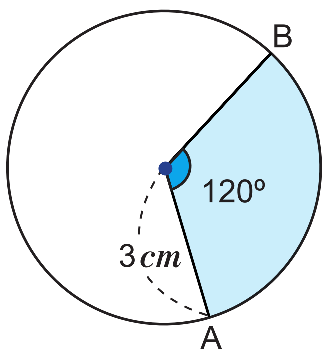
a)



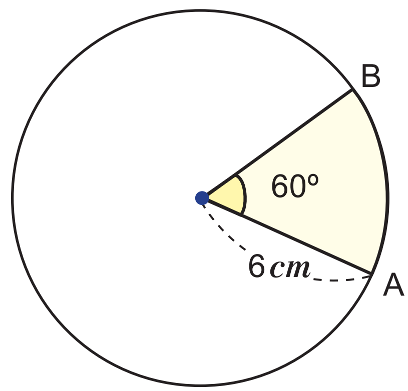
b)



c)

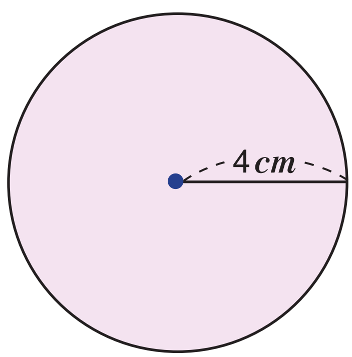


d)

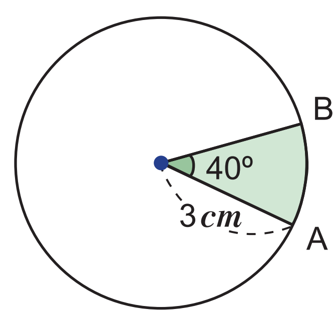


2. Calcule el área de las siguientes regiones sombreadas.

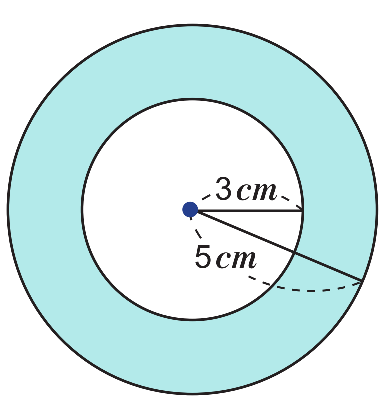
a)



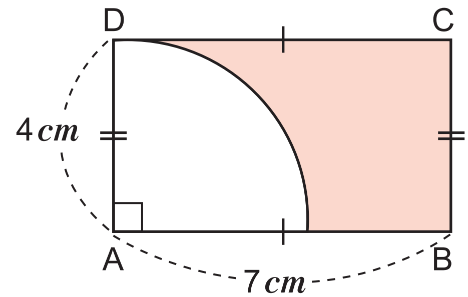
b)



c)



d)



Solucionario

UNIDAD 1

Sección 1 Contenido 1 (S1C1) E1

a) 8 b) 17 c) 18 d) 41

e) 55 f) 60 g) 51 h) 128

i) 479 j) 637

E2

a) 69 Córdobas b) 31 gallinas

S1C2 E1

a) 2 b) 33 c) 7 d) 13

e) 31 f) 15 g) 19 h) 17

i) 344 j) 82

E2

a) 42 mangos b) 18 libros

S1C3 E1

a) 50 b) 28 c) 126 d) 75

e) 64 f) 114 g) 258 h) 198

i) 837 j) 1665

E2

a) 48 sacos b) 444 pasajeros

Actividad

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

S1C4 E1

a) 4 b) 9 c) 8

d) 7 Residuo (r) 1 e) 8 r 6

f) 4 r 3 g) 15 h) 19

i) 19 r 2 j) 21 r 1

E2

16 flores

S1C5 E1

a) 16 b) 23

c) 1 d) 35

e) 6 f) 17

E2

108 litros

S2C1

a) 10 b) 14 c) 12 d) 15

e) 84 f) 24 g) 21 h) 60

S2C2 E1

a) $\frac{7}{3}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{5}{11}$

d) $\frac{1}{3}$ e) $\frac{2}{7}$ f) $\frac{5}{9}$

E2

a) $\frac{11}{6}$ b) $\frac{7}{12}$ c) $\frac{24}{35}$

d) $\frac{1}{6}$ e) $\frac{4}{21}$ f) $\frac{11}{18}$

S2C3 E1

a) $\frac{6}{7}$ b) $\frac{8}{9}$ c) $\frac{9}{10}$ d) $\frac{5}{3}$ e) $\frac{3}{2}$

E2

a) $\frac{2}{35}$ b) $\frac{8}{21}$ c) $\frac{1}{8}$ d) $\frac{2}{7}$ e) $\frac{1}{15}$

S2C4 E1

a) $\frac{2}{15}$ b) $\frac{1}{9}$ c) $\frac{2}{7}$

d) $\frac{3}{10}$ e) $\frac{1}{12}$

E2

a) $\frac{5}{6}$ b) $\frac{8}{9}$ c) $\frac{2}{7}$

d) $\frac{3}{4}$ e) $\frac{2}{3}$

S2C5 E1

a) 4,4 b) 9,1

c) 1,3 d) 5,6

E2

1. a)5,79 b) 9,71 c) 2,25 d) 1,17

2. a)8,75 córdobas

b)1,18 kg

S2C6 E1

a) 7,2 b) 7,2 c) 21

E2

1.a) 2,86 b) 2,1 c) 10,73

2. 5,06 g

S2C7 E1

a) 4,2 b) 1,7 c) 1,3

E2

a) 0,9 b) 0,9 c) 0,9

UNIDAD 2

Sección 1 Contenido 1 (S1C1) E1

1.

a)+20°C b)−20°C c)+15°C d)−25°C

2.

a)+26°C b)−14°C c)−8°C d)+35°C

E2

Fernando está en +2 y Julia en −5

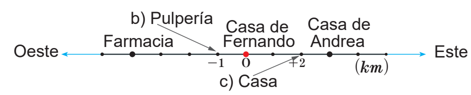
S1C2

Grado	Matricula inicial	Matricula final	Diferencia	Numero
7mo	120	100	Disminuyó 20	−20
8vo	90	97	Aumentó 7	+7
9no	85	95	Aumentó 10	**+10**
10mo	75	60	Disminuyó 15	**−15**
11mo	72	70	Disminuyó 2	**−2**

S1C3

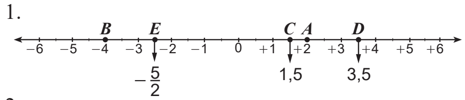
a) La casa de Andrea: +3

La farmacia: −4



S1C4

1.



2.

A: −3 B: −1 C: +1,5 D: +4

S1C5

1.

a) 6 b) 5 c) 1

e) 2,5 f) 5 g) $\frac{1}{2}$

2.

a) 1 b) 9 c) +7 o − 7 d) +8 e) −12

S1C6

1.

a) $+3 < +6$ b) $-5 < +7$ c) $-4 > -9$

d) $0 < +8$ e) $-3 < +2 < +5$

2.

a) $-6, +3, +7$ b) $-9, -1, +4$

c) $-8, 2, +5$ d) $-4, -3, +1, +7$

S1C7

a) $\frac{2}{7} < \frac{5}{7}$ b) $-\frac{3}{4} > -\frac{7}{4}$ c) $\frac{7}{10} > \frac{3}{10}$

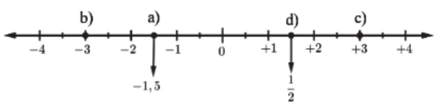
d) $-\frac{3}{5} > -\frac{9}{5}$ e) $\frac{2}{5} < \frac{4}{3}$ f) $-\frac{1}{2} > -\frac{3}{5}$

g) $-\frac{5}{9} < \frac{3}{8}$ h) $\frac{1}{3} > -\frac{2}{7}$

S1C8 E1

	Número
a) Un pez se encuentra a 50 m bajo el nivel del mar	-50
b) Sobran 12 lb de arroz	$+12$
c) Carlos perdió 3 lapiceros	-3
d) Mariana ganó C$ 150 en la kermés de su escuela	$+150$

E2



E3

b) A: -5 B: -3 C: $-0{,}5$ D: 2 E: $4{,}5$

E4

a) 3 b) 6 c) 8

d) $+9$ o -9 e) $+1$ o -1 f) $+7$ o -7

E5

a) $2 < 7$ b) $-1 > -3$

c) $-9 < 5$ d) $-5 < -1 < 8$

e) $-4 < 0 < 6$ f) $3 > -2 > -7$

E6

a) $-1, 0, 5$ b) $-4, -1, 2$

c) $-8, 0, 3$

E7

a) $9, -1, -7$ b) $4, 1, -6, -9$

S2C1

a) -9 b) -9 c) -9 d) 17

e) -17 f) 17 g) -27 h) 28

i) -34

S2C2

a) 1 b) 3 c) 0 d) -3

e) -6 f) 5 g) 0 h) -12

i) 12

S2C3

a) 8 b) 6 c) -1 d) -10

e) 6 f) -18

S2C4

a) -3 b) 7 c) -10 d) -11

e) -11 f) -19 g) 12 h) -17

i) -13

S2C5

a) 9 b) 16 c) -4 d) -6

e) 5 f) 4 g) 21 h) -11

i) 13

S2C6

a) -8 b) -9 c) 7

d) -9 e) 7 f) 19

g) 15 h) -5 i) -17

S2C7 E1

a) -1 b) 3 c) -15

E2

a) -1 b) 11 c) 7

S2C8 E1

a) -12 b) 5 c) 6

E2

a) 1 b) -11 c) 0

S2C9

a) $-5{,}8$ b) $+3{,}6$ c) $-1{,}3$

d) $+7{,}3$ e) $+17{,}5$ f) $-4{,}2$

g) $+3{,}2$ h) $-3{,}7$ i) $+3{,}2$

S2C10

a) $-\frac{7}{3}$ b) $-\frac{2}{9}$ c) $\frac{5}{7}$

d) $\frac{13}{6}$ e) $-\frac{14}{15}$ f) $+\frac{3}{5}$

S2C11

a) $+5{,}4$ b) $+12{,}2$ c) $-5{,}2$

d) $+6{,}9$ e) $-5{,}3$ f) $+2{,}1$

g) $+7{,}2$ h) $-12{,}1$ i) $-3{,}8$

S2C12

a) $-\frac{4}{5}$ b) $\frac{3}{7}$ c) $-\frac{7}{3}$

d) $\frac{19}{4}$ e) $-\frac{13}{10}$ f) $-\frac{31}{6}$

S2C13 E1

a) -2 b) -2 c) -7 d) 5

e) -11 f) 8 g) 19 h) 4

i) $3{,}4$ j) $5{,}6$ k) $-\frac{6}{7}$ l) $\frac{29}{6}$

E2

a) -5 b) -10 c) 2 d) 0

S3C1

a) -15 b) -12 c) -36 d) -56 e) 54

f) -30 g) -22 h) -26

S3C2

a) -24 b) -45 c) -24 d) 14 e) -6

f) 0 g) -26 h) -70

S3C3

a) 36 b) 40 c) 80

d) 60 e) -36 f) -180

S3C4 E1

Número par: $4, 12, 18$
Número impar: $7, 27, 29$

E2

a) 48 b) -45 c) -42

d) 40 e) -126 f) -60

S3C5

a) $-6{,}3$ b) $0{,}86$ c) $6{,}82$

d) $-6{,}4$ e) $-0{,}81$ f) $3{,}22$

S3C6

a) $-\frac{15}{7}$ b) $-\frac{8}{9}$ c) $\frac{10}{21}$

d) $-\frac{2}{15}$ e) $\frac{7}{4}$ f) -8

S3C7

a) 9 b) 36 c) 49 d) 4

e) -16 f) -27 g) 16 h) $\frac{1}{49}$

i) $-\frac{8}{27}$

S3C8

a) -7 b) 7 c) -6 d) 9

e) -9 f) 13 g) 21 h) -26

S3C9

a) $\frac{5}{14}$ b) $-\frac{3}{20}$ c) $-\frac{1}{12}$ d) 3

e) $\frac{27}{10}$ f) $-\frac{45}{2}$ g) $-\frac{7}{12}$ h) 12

S3C10

a) 28 b) $\frac{7}{5}$ c) $-\frac{6}{5}$

d) $\frac{1}{54}$ e) $-\frac{1}{5}$ f) $-\frac{75}{56}$

S4C1

a) -13 b) 5 c) 16 d) -5

e) -2 f) 2 g) 18 h) -3

i) 17

S4C2

a) -15 b) -6 c) -10

d) -30 e) -2

S4C3

a) -40 b) -50 c) -40

d) -42 e) -10 f) -24

S4C4

L	M	M	J	V	S	D
$+15$	-20	-38	0	$+6$	$+45$	-12
144	**109**	**91**	129	**135**	**174**	**117**

S4C5 E1

a) -36 b) 40 c) 84 d) 0 e) 19

f) 64 g) -8 h) -5 i) 16

E2

a) 27 b) -1 c) 15 d) $\frac{1}{35}$

E3

a) -15 b) 30 c) -21 d) 25

E4

a) -2 b) -6 c) 52 d) 1

Desafío

a) Avanza 21 pasos b) Retrocede 4 pasos

c) 17 pasos del punto de partida

d) Avanza 18 pasos e) Retrocede 6 pasos

f) 12 pasos del punto de partida

g) $17 > 12$ Francisco es el ganador

UNIDAD 3

Sección 1 Contenido 1 (S1C1)

a) $x \times 15$ b) $a \times 10 + b \times 6$

c) $12 \times y$ d) $y \times 20 - (x \times 10)$

S1C2

a) $7a$ b) xy

c) $2ab$ d) $5(x+y)$

e) y f) $-8a$

g) $-2xy$ h) x^3

S1C3 E1

a) $\frac{a}{7}$ b) $\frac{5}{3}a$ o $\frac{5a}{3}$ c) $\frac{xy}{5}$

E2

a) $\frac{x}{2}$ b) $-\frac{b}{8}$ c) $-\frac{a-b}{3}$ d) $-\frac{9}{x+y}$

S1C4

1.a) En los 5 cuadernos gastó: $5x$
El dinero que queda: $100 - 5x$ (C$)

b) Total de personas en carro: $4x$
Total de personas en moto: $2y$
En total hay $4x + 2y$ (personas)

2.a) La suma total de comprar 3 camisas y 5 pantalones.

b) El dinero que queda de restar a C$300, la compra de 2 camisas.

c) El dinero que queda al restar a C$500, la suma total de comprar una camisa y un pantalón.

S1C5 E1

a) $\frac{9}{x} km/h$ b) $4a\ km$ c) $\frac{55}{x} h$

E2

a) La distancia (en m) caminada de Julia en x minutos con la velocidad de $70m/min$

b) La distancia (en m) caminada de Julia en y minutos con la velocidad de $35m/min$

c) El total de la distancia recorrida de Julia

S1C6

Término	Variable	Coeficiente
$-4a$	$\boldsymbol{a}$	$\mathbf{-4}$
$\boldsymbol{-b}$	b	-1
$\frac{3}{2}c$	$\boldsymbol{c}$	$\mathbf{\frac{3}{2}}$

S1C7 E1

a) 12 b) 7 c) 35 d) -4

E2

a) 45 b) 24 c) 7 d) -22

S1C8

a) 4 b) -2 c) 11 d) -1

e) 2 f) 14 g) 16 h) -9

S1C9 E1

a) $7y$ b) $-3x$ c) $\frac{6}{y}$

d) $-\frac{a}{9}$ e) $5ab$ f) $\frac{2}{xy}$

E2

a) $12x$ latas b) $50 - 7x$ (C$)

c) $20a + 10b$ (C$)

E3

a) 11 b) -12 c) 5 d) -43

e) 26 f) 1 g) 64 h) -18

S2C1

Términos semejantes a

$12a$: $-9a$, $15a$, $4a$

$4xy$: xy, $-3xy$, $6xy$

$-5m$: $8m$, $-m$, $3m$, $7m$, $13m$

S2C2

a) $7x$ b) $14x$ c) $5x$

d) $-5x$ e) $-4x$ f) $14x$

g) $9x$ h) $3a$ i) $-8a$

S2C3 E1

a) $9x + 1$ b) $5x - 6$ c) $5x + 4$

d) $3x - 5$ e) $-4x + 9$ f) $-5x - 6$

E2

a) $-6x + 1$ b) $-7x + 9$ c) $2x + 9$

S2C4

a) $2x - 5$ b) $-3x - 5$ c) $12x - 2$

d) $-2x + 5$ e) $9x$ f) $7x - 7$

g) $-4x - 4$ h) $9x - 5$ i) $6x + 11$

S2C5 E1

a) $24x$ b) $10x$ c) $-3x$

E2

a) $12x + 42$ b) $6x - 10$ c) $-20x + 32$

S2C6

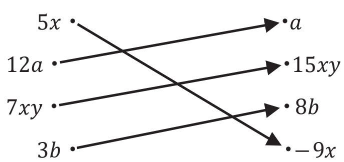
a) $3x$ b) $-4x$ c) $-12x$

d) $7x + 4$ e) $-2x - 1$ f) $3x - 2$

S2C7

a) $34x + 7$ b) $16x + 10$ c) $11x - 41$
d) $-4x + 10$ e) $12x - 4$ f) $17x - 24$

S2C8 E1



E2

a) $9x$ b) $7x$ c) $-8x$
d) $8x$ e) $10x$ f) $-12x$

E3

a) $9a + 5$ b) $7a - 9$ c) $12a - 2$
d) $3a + 2$

E4

a) $-14x$ b) $15x - 6$
d) $-2x$ e) $3x - 2$

E5

a) $12x + 3$ b) $27x - 12$
d) $-10x + 12$ e) $x - 13$

UNIDAD 4

Sección 1 Contenido 1 (S1C1)

a) 6 b) 11 c) 6
d) 19 e) 27 f) -4

S1C2

a) 3 es solución de a)
b) 3 no es solución de b)
c) 3 no es solución de c)

S1C3

a) $x = 12$ b) $x = 3$ c) $x = -2$

S1C4 E1

a) $x = -8$ b) $x = -5$ c) $x = 3$

E2

a) $x = 14$ b) $x = -20$ c) $x = 30$

E3

a) $x = 10$ b) $x = 3$ c) $x = -6$

E4

a) $x = 14$ b) $x = -14$ c) $x = 21$

S1C5 E1

a) 12 b) 1 c) 2
d) 35 e) 58 f) -7

E2

a) 3 no es solución de a)
b) 3 es solución de b)
c) 3 es solución de c)
d) 3 es solución de d)

E3

a) $x = 32$ b) $x = 11$ c) $x = 1$
d) $x = 27$

E4

a) $x = -10$ b) $x = -8$
c) $x = -38$ d) $x = -10$

E5

a) $x = 20$ b) $x = -18$
c) $x = 40$ d) $x = 21$

E6

a) $x = 10$ b) $x = 9$
c) $x = -13$ d) $x = 6$

E7

a) $x = 52$ b) $x = -8$
c) $x = 21$ d) $x = 2$

S2C1

1.
a) $x = 6$ b) $x = 14$ c) $x = -8$

2.
a) $x = 7$ b) $x = 17$ c) $x = 11$

S2C2

a) $x = 3$ b) $x = -2$
c) $x = 3$ d) $x = -1$

S2C3

a) $x = 1$ b) $x = -\frac{1}{4}$ c) $x = 2$

S2C4

a) $x = 3$ b) $x = 2$
c) $x = 32$ d) $x = 2$

S2C5

a) $x = -\frac{8}{3}$ b) $x = -\frac{18}{35}$
c) $x = 23$ d) $x = 20$

S2C6 E1

a) $x = 3$ b) $x = 6$
c) $x = -9$ d) $x = \frac{7}{9}$

E2

a) $x = 5$ b) $x = 2$ c) $x = -2$

E3

a) $x = -1$ b) $x = 10$ c) $x = -32$

E4

a) $x = 4$ b) $x = \frac{6}{7}$ c) $x = -12$
d) $x = 7$ e) $x = 4$

S2C7

a) Ganó C$ 670
b) La libra de carne vale C$ 90

S2C8

a) El precio de la blusa es C$320.
El precio de la cartera es C$640.
b) Roberto gana C$365 y Luis gana C$370.

UNIDAD 5

Sección 1 Contenido 1 (S1C1)

1.a) $y = 45x$ b) $y = 20 - x$

2.
a) $y = 60x$
b) y no está en función de x
c) $y = 4x$

S1C2

a) y es directamente proporcional a x:
Constante de proporcionalidad: 20
b) y es directamente proporcional a x:
Constante de proporcionalidad: 15
c) y es directamente proporcional a x:
Constante de proporcionalidad: 10
d) y es directamente proporcional a x:
Constante de proporcionalidad: 4

S1C3

a)

x	0	1	2	3	4	5
y	0	5	10	15	20	25

b)

x	0	1	2	3	4	5
y	0	2	4	6	8	10

c)

x	0	1	2	3	4	5
y	0	9	18	27	36	45

S1C4

a) $y = 3x$

x (paquetes)	0	1	2	3	4	5	6
y (jabones)	0	3	6	9	12	15	18

b) $y = 7x$

x (grupos)	0	1	2	3	4	5	6
y (estudiantes)	0	7	14	21	28	35	42

c) $y = 5x$

x (cm)	0	1	2	3	4	5	6
y (cm²)	0	5	10	15	20	25	30

S1C5

a) $y = 5x$

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	−20	−15	−10	−5	0	5	10	15	20

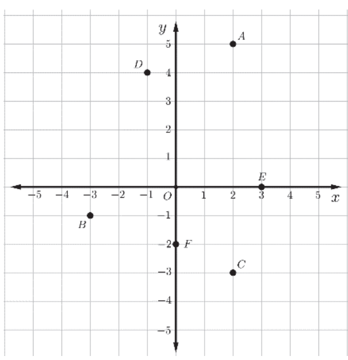
b) $y = 4x$

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	−16	−12	−8	−4	0	4	8	12	16

S1C6

a) $G(-4,-4)$, $H(3,-5)$, $I(0,2)$, $J(3,-5)$

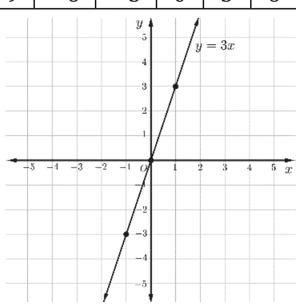
b)



S1C7

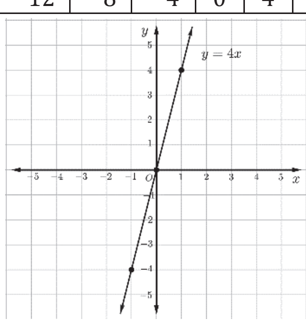
a)

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	−9	−6	−3	0	3	6	9



b)

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	−12	−8	−4	0	4	8	12



S1C8

1. a)

x (min)	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y (lt)	16	12	8	4	0	−4	−8	−12	−16

b) $y = -4x$

2.

a)

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	8	6	4	2	0	−2	−4	−6	−8

$y = -2x$

b)

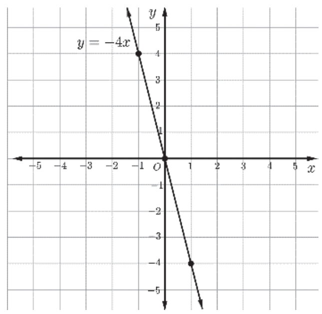
x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	12	9	6	3	0	−3	−6	−9	−12

$y = -3x$

S1C9

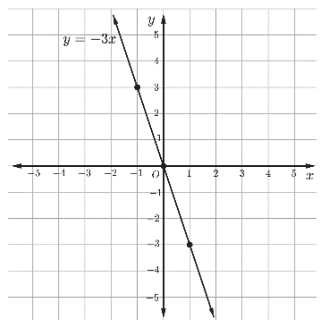
a)

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	12	8	4	0	−4	−8	−12



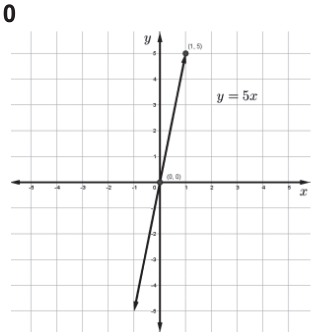
b)

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	9	6	3	0	−3	−6	−9

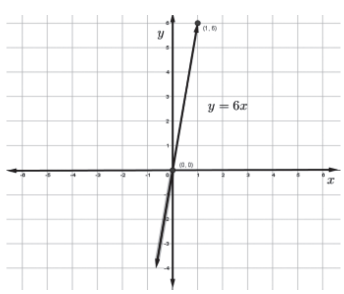


S1C10

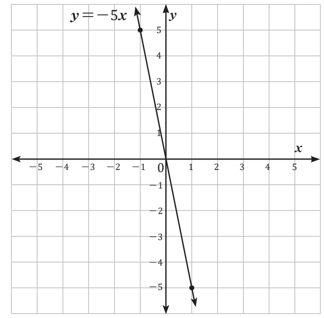
a)



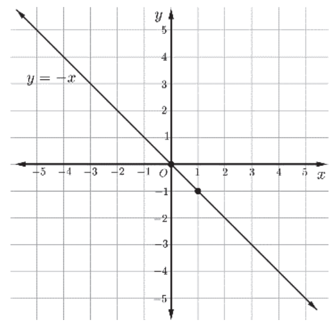
b)



c)



d)

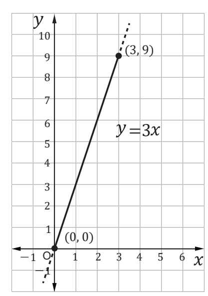


S1C11

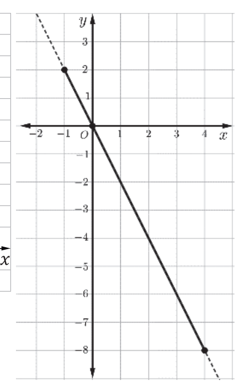
Se lee	Inecuación	En la recta numérica
a) x es menor que 3	$x < 3$	
b) x es mayor o igual que −6	$x \geq -6$	
c) x es mayor que −5 y menor que 9	$-5 < x < 9$	
d) x es mayor que −4 y menor que 3	$-4 < x < 3$	

S1C12

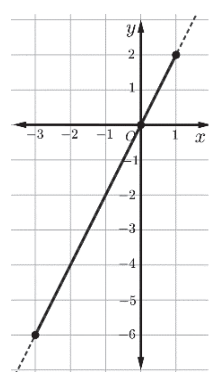
a) Dominio: $0 \leq x \leq 3$
Rango: $0 \leq y \leq 9$



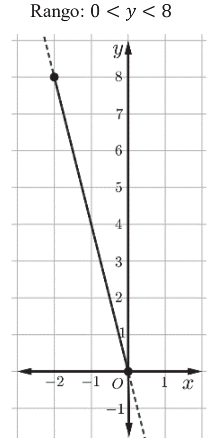
b) Dominio: $-1 \leq x \leq 4$
Rango: $-8 \leq y \leq 2$



c) Dominio: $-3 < x < 1$
Rango: $-6 < y < 2$



d) Dominio: $-2 < x < 0$
Rango: $0 < y < 8$



S1C13

a) $y = -2x$ b) $y = -3x$ c) $y = 3x$

d) $y = \frac{1}{2}x$

S1C14 E1

a) y es directamente proporcional a x

b) y no es directamente proporcional a x

c) y es directamente proporcional a x

d) y no es directamente proporcional a x

E2

a) $y = 3x$

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	−12	−9	−6	−3	0	3	6	9	12

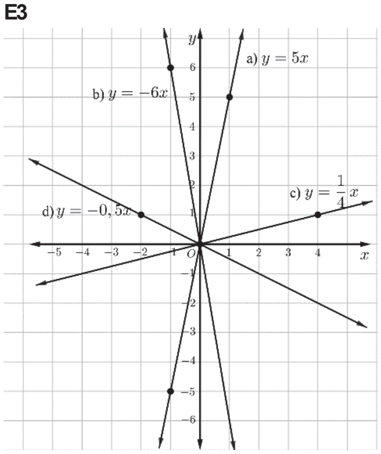
b) $y = -4x$

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	16	12	8	4	0	−4	−8	−12	−16

c) $y = -2x$

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	8	6	4	2	0	−2	−4	−6	−8

E3



E4

a) $y = 4x$ b) $y = -2x$ c) $y = 2x$

S2C1

a) y es inversamente proporcional a x:
Constante de proporcionalidad: 24

b) y es inversamente proporcional a x:
Constante de proporcionalidad: 50

c) y es inversamente proporcional a x:
Constante de proporcionalidad: 12

S2C2

a) $y = \frac{24}{x}$

x	1	2	3	4
y	24	12	8	6

b) $y = \frac{18}{x}$

x	1	2	3	4
y	18	9	6	4,5

c) $y = \frac{30}{x}$

x	1	2	3	4
y	30	15	10	7,5

S2C3

a) $y = \frac{12}{x}$

x (km/h)	1	2	3	4	5	6
y (h)	12	6	4	3	2,4	2

b) $y = \frac{18}{x}$

x (cajas)	1	2	3	6
y (libros)	18	9	6	3

S2C4

a) $y = \frac{6}{x}$

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	−1,5	−2	−3	−6	–	6	3	2	1,5

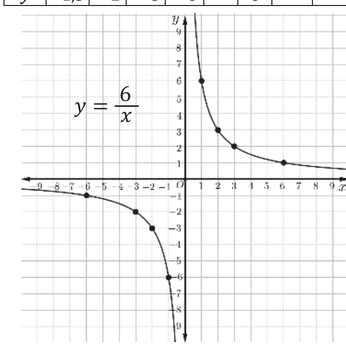
b) $y = \frac{15}{x}$

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	−3,75	−5	−7,5	−15	–	15	7,5	5	3,75

S2C5

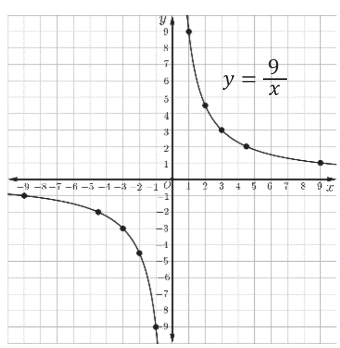
a)

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	−1,5	−2	−3	−6	–	6	3	2	1,5



b)

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	−2,25	−3	−4,5	−9	–	9	4,5	3	2,25



S2C6

a) $y = -\frac{6}{x}$

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	1,5	2	3	6	–	−6	−3	−2	−1,5

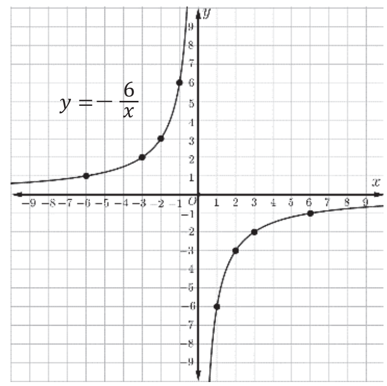
b) $y = -\frac{18}{x}$

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	4,5	6	9	18	–	−18	−9	−6	−4,5

S2C7

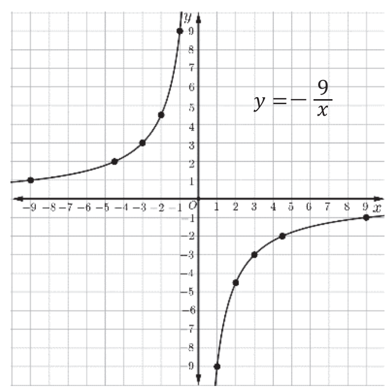
a)

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	1,5	2	3	6	–	−6	−3	−2	−1,5



b)

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	2,25	3	4,5	9	–	−9	−4,5	−3	−2,25



S2C8 E1

a) $y = \frac{24}{x}$

y es inversamente proporcional a x.

b) $y = 6x$

y es directamente proporcional a x.

c) $y = 3x$

y es directamente proporcional a x.

d) $y = \dfrac{48}{x}$

y es inversamente proporcional a x.

E2

a)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	12	8	4	0	-4	-8	-12

b)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	2	3	6	$-$	-6	-3	-2

E3

a) 2   b) 3   c) 1

S3C1

a) $d = 15$ b) $c = 3$ c) $d = -6$

d) $a = -1$ e) $c = 6$ f) $b = 2$

S3C2

a) Necesita 18 cucharadas de café.
b) Tardará 15 minutos.
c) Se pueden comprar 15 lapiceros.
d) Puede preparar 6 lt de jugo.

S3C3

a) El 40% de los estudiantes son mujeres.
b) Han ganado el 60% de los partidos.
c) Carlos pagó C$ 42 por el juguete.
d) El producto vale C$ 64,8.

S3C4

a) $d = 3$ b) $c = 12$ c) $a = -6$

d) $d = 6$ e) $c = 10$ f) $b = 2$

S3C5

a) Se deben guardar 10 libros en cada caja.
b) Necesitará 9 viajes.
c) La imprimen en 3 minutos.
d) Puede preparar 4 bolsas.

S3C6 E1

a) $d = 25$ b) $a = -3$ c) $c = -15$

d) $c = 4$

E2

a) $d = 2$ b) $b = 3$ c) $a = 3$

d) $c = 13{,}5$

E3

a) Recibirá C$250.
b) La capacidad de las botellas debe ser de 3 lt.
c) El 45% de los estudiantes de Séptimo Grado son niñas.
d) Necesitan 4 días
e) El 60% de los caramelos son de fresa.

Desafío

a) En dos años hay que pagar $ 180.
b) En 4 meses hay que pagar $ 6,25.

UNIDAD 6

Sección 1 Contenido 1 (S1C1)

a) 

$\overline{AB}$

b) 

$\overrightarrow{MN}$

c) 

$\overleftrightarrow{RS}$

S1C2 E1

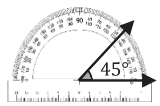
a) $AC = 7cm$ b) $BC = 4cm$

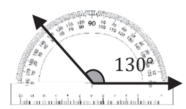
E2

$AB = 3cm,$ $BC = 7cm$

S1C3

1.

a) 

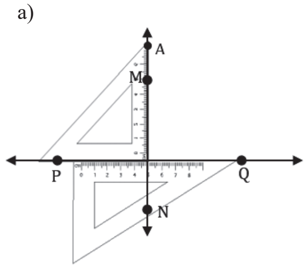
b) 

2.

	Medida	Notación	Clasificación
a)	80°	$\measuredangle CBA$ o $\measuredangle ABC$	Agudo
b)	115°	$\measuredangle FED$ o $\measuredangle DEF$	Obtuso
c)	90°	$\measuredangle MNP$ o $\measuredangle PNM$	Recto

S1C4

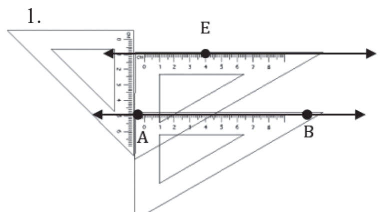
a)



b) El segmento $\overline{PB}$ es perpendicular, porque tiene la menor distancia.

S1C5

1.



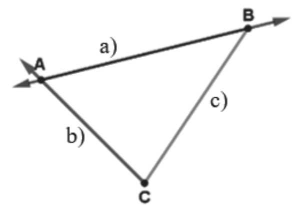
2.

a) $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ b) $\overline{AB} \perp \overline{AD}$ c) $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$

S1C6

a) Triángulo acutángulo
b) Triángulo obtusángulo
c) Triángulo rectángulo
d) Triángulo acutángulo
e) Triángulo rectángulo
f) Triángulo obtusángulo

S1C7 E1



E2

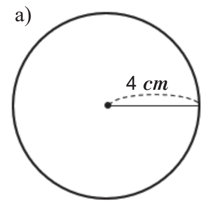
a) $\measuredangle LMN = 90°$ b) $\measuredangle NMO = 35°$

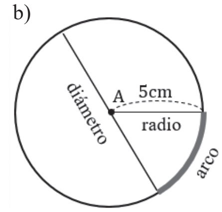
c) $\measuredangle LMP = 155°$

E3

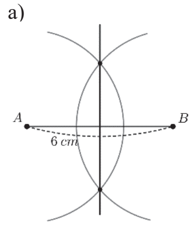
a) Triángulo rectángulo
b) Triángulo obtusángulo

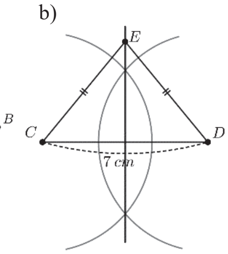
S2C1

a) 

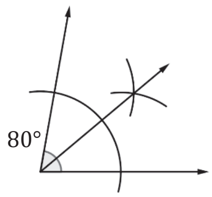
b) 

S2C2

a) 

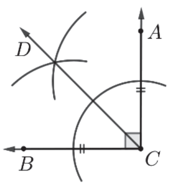
b) 

S2C3 E1



E2

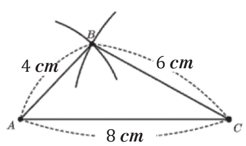
a) $\measuredangle BCA = 90°$ b)



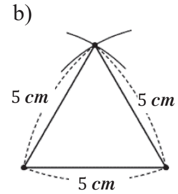
c) $\measuredangle ACED y \measuredangle BCD$ son iguales y miden 45°

S2C4

a)

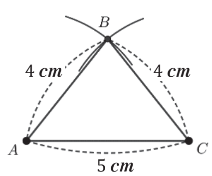


b)



Triángulo equilátero

c)



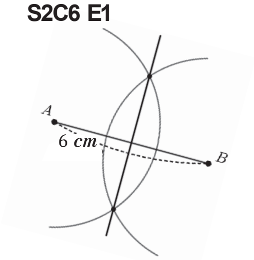
Triángulo isósceles

S2C5

a) Rotación b) Reflexión

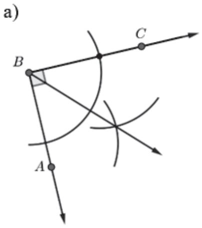
c) Traslación

S2C6 E1

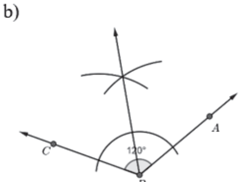


E2

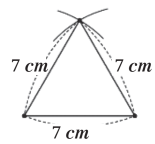
a)



b)

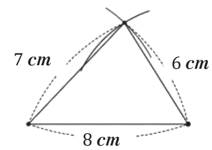


E3



Triángulo equilátero

E4



Triángulo escaleno

E5

a) Una reflexión respecto del eje y

UNIDAD 7

Sección 1 Contenido (S1C1)

a) Cuadrado b) Rectángulo

c) Rombo d) Trapecio

e) Rectángulo f) Paralelogramo

S1C2

Nombre	Número de lados	Número de ángulos	Número de diagonales
Cuadrado	4	4	2
Pentágono Regular	5	5	5
Hexágono Regular	6	6	9
Heptágono Regular	7	7	14

S1C3

a) $8\ cm$ b) $28\ cm$ c) $18\ cm$

d) $27\ cm$ e) $28\ cm$ f) $20\ cm$

S1C4

a) $20\ cm$ b) $18\ cm$ c) $9\ cm$

d) $14\ cm$ e) $32\ cm$ f) $20\ cm$

S2C1

a) $9\ cm^2$ b) $15\ cm^2$ c) $64\ cm^2$

d) $63\ cm^2$ e) $8\ cm^2$ f) $3x\ cm^2$

S2C2

a) $15\ cm^2$ b) $27\ cm^2$ c) $12\ cm^2$

d) $7\ cm^2$ e) $12\ cm^2$ f) $6\ cm^2$

S2C3

a) $24\ cm^2$ b) $16\ cm^2$ c) $15\ cm^2$

d) $18\ cm^2$ e) $20\ cm^2$ f) $28\ cm^2$

S2C4

a) $12\ cm^2$ b) $21\ cm^2$ c) $12\ cm^2$

d) $10\ cm^2$ e) $9\ cm^2$ f) $8\ cm^2$

S2C5

a) $22\ cm^2$ b) $15\ cm^2$ c) $14\ cm^2$

d) $20\ cm^2$ e) $16\ cm^2$ f) $27{,}5\ cm^2$

S2C6

a) $38\ cm^2$ b) $47\ cm^2$

S2C7 E1

a) $16\ cm$ b) $21\ cm$

E2

a) $10\ cm^2$ b) $25\ cm^2$ c) $13\ cm^2$

d) $39\ cm^2$ e) $26\ cm^2$

S3C1

a) diámetro b) radio c) cuerda

d) centro e) arco f) recta tangente

S3C2

a) $8\pi\ cm$ b) $10\pi\ cm$ c) $2\pi\ cm$

d) $12\pi\ cm$ e) $6\pi\ cm$ f) $14\pi\ cm$

S3C3

a) $4\pi\ cm^2$ b) $36\pi\ cm^2$ c) $25\pi\ cm^2$

d) $9\pi\ cm^2$ e) $16\pi\ cm^2$ f) $36\pi\ cm^2$

S3C4

a) $3\pi\ cm$ b) $5\pi\ cm$ c) $4\pi\ cm$

d) $2\pi\ cm$

S3C5

a) $9\pi\ cm^2$ b) $9\pi\ cm^2$ c) $5\pi\ cm^2$

d) $10\pi\ cm^2$

S3C6

a) $36 - 9\pi\ cm^2$ b) $36 - 9\pi\ cm^2$

c) $40\pi\ cm^2$ d) $32 - 8\pi\ cm^2$

S3C7 E1

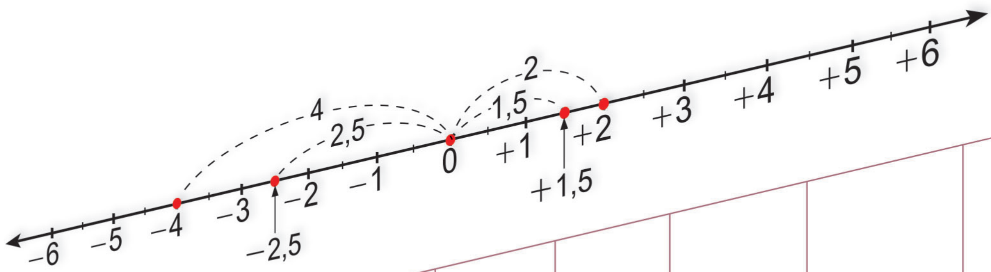
a) $6\pi\ cm$ b) $4\pi\ cm$ c) $2\pi\ cm$

d) $2\pi\ cm$

E2

a) $16\pi\ cm^2$ b) $\pi\ cm^2$

c) $16\pi\ cm^2$ d) $28 - 4\pi\ cm^2$



NICAMATE

Proyecto para el Aprendizaje Amigable de Matemática en Educación Secundaria

Portal Educativo