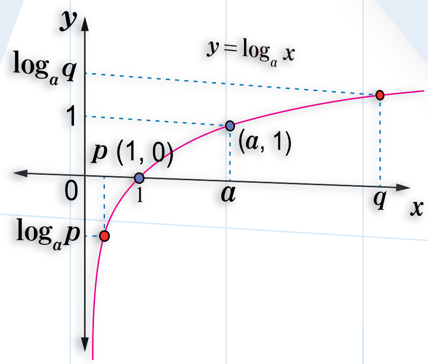
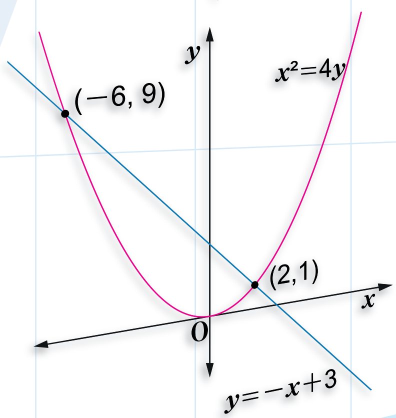
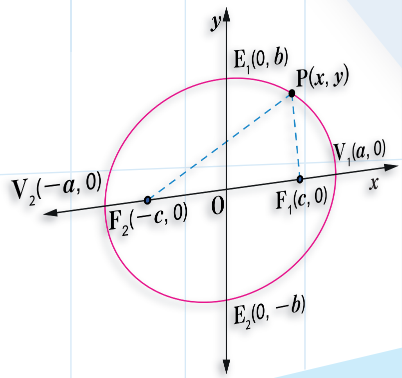
MATEMÁTICA 11

Undécimo grado







Libro de Texto

Educación Secundaria

Gobierno de Reconciliación y Unidad Nacional

El Pueblo, Presidente!

MINED

Un Ministerio en la Comunidad

JICA

COORDINACIÓN GENERAL
Profesora María Elsa Guillén
Profesora Melba López Montenegro
Profesor Julio César Canelo Castillo

AUTORES
Francisco Emilio Díaz Vega
Marlon José Espinoza Espinoza
Primitivo Herrera Herrera
Humberto Antonio Jarquín López

REVISIÓN Y ASESORÍA TÉCNICA CIENTÍFICA
Sociedad Matemática de Nicaragua
Profesora Gloria Parrilla Rivera
Profesor Jorge Alberto Velásquez Benavidez

COLECTIVO DE AUTORES

MINED	UNAN - MANAGUA	UNAN - LEÓN
Francisco Emilio Díaz Vega	Nubia Aracelly Barreda Rodríguez	Anastacio Benito González Funes
Humberto Antonio Jarquín López	Melissa Lizbeth Velásquez Castillo	Domingo Felipe Aráuz Chévez
Gregorio Isabel Ortiz Hernández	Armando José Huete Fuentes	Célfida del Rosario López Sánchez
Juan Carlos Caballero López	Primitivo Herrera Herrera	Orlando Antonio Ruiz Álvarez
Alberto Leonardo García Acevedo	Marlon José Espinoza Espinoza	Hilario Ernesto Gallo Cajina

INSTITUTOS QUE PARTICIPARON EN LA VALIDACIÓN
Colegio Clementina Cabezas, Managua, Managua
Colegio Fernando Gordillo, Managua, Managua
Colegio Tomas Borge, Mateare, Managua
Colegio San Cayetano, San Rafael del Sur, Managua
Instituto Nacional La Salle, Diriamba, Carazo
Instituto Juan José Rodriguez, Jinotepe, Carazo
San Benito #1, Chinandega, Chinandega
Instituto Nacional Rubén Darío, Posoltega, Chinandega
Jhon F. Kenedy, León, León
Salomón de la Selva, León, León

EQUIPO DE DIAGRAMACIÓN
María José López Samqui

Primera Edición, 2019

Cooperación Técnica de Japón a través de la Agencia de Cooperación Internacional del Japón (JICA)

La presente publicación ha sido reproducida con el apoyo de la Agencia de Cooperación Internacional del Japón (JICA) a través del Proyecto para el Aprendizaje Amigable de Matemática en Educación Secundaria (NICAMATE).

PRESENTACIÓN

Estimado estudiante:

El texto que tienes en tus manos es un esfuerzo realizado en el marco del **"Proyecto para el Aprendizaje Amigable de Matemática en Educación Secundaria" (NICAMATE)**, implementado por el Ministerio de Educación en coordinación con la UNAN – MANAGUA, UNAN – LEÓN, y el apoyo técnico de la Agencia de Cooperación Internacional del Japón (JICA).

La matemática es una herramienta potente en el desarrollo de cada una de nuestras vidas; nos ayuda a resolver problemas complejos con mayor facilidad, a contar con un razonamiento matemático capaz de ser crítico, analítico y práctico. En definitiva, a vivir con éxito, en un mundo cada vez más desafiante ante los cambios sociales y los avances tecnológicos.

Cada contenido de este libro, es abordado de manera que resulta fácil de comprender, y con el apoyo de tu docente lograrás adquirir conceptos y procedimientos matemáticos, necesarios para el desarrollo de conocimientos y habilidades que favorecen tu formación integral.

Tenemos la certeza que tu encuentro con estos saberes será muy satisfactorio, ya que este libro ha sido elaborado por un equipo altamente calificado que nos plantea una metodología amigable, retadora y exigente, con el propósito de que los conocimientos matemáticos te enriquezcan, sean mejor entendidos y puedan integrarse en tus quehaceres cotidianos con mayor facilidad.

Mucho ánimo ya que contamos contigo para desarrollar una mejor Nicaragua.

Atentamente,

Ministra de Educación
Miriam Soledad Raudez

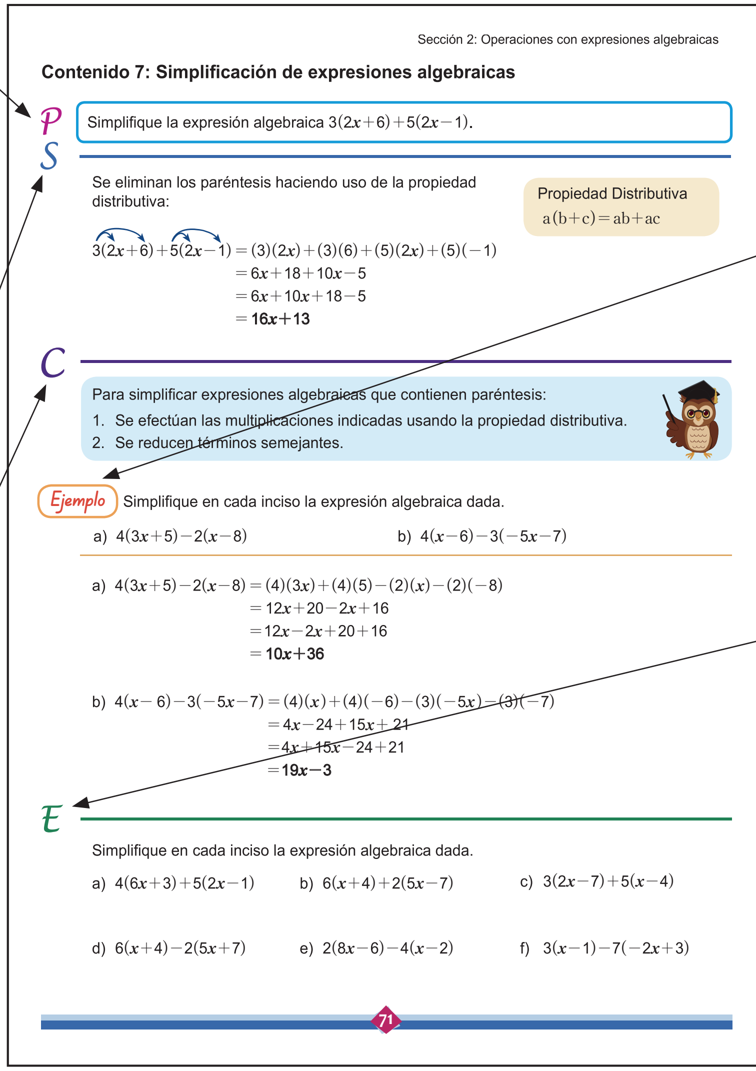
INTRODUCCIÓN

En cada página del libro de texto se presentan los momentos de una clase de 45 minutos:

P Representa el problema inicial, el cual se debe leer y analizar identificando las condiciones que plantea y lo que se pregunta.

S Representa la solución del problema inicial explicada paso a paso.

C Representa la conclusión de la clase, donde se propone el esquema de solución del problema inicial, en algunos casos también se presentan conceptos importantes usados en el problema.



Sección 2: Operaciones con expresiones algebraicas

Contenido 7: Simplificación de expresiones algebraicas

P

Simplifique la expresión algebraica $3(2x+6)+5(2x-1)$.

S

Se eliminan los paréntesis haciendo uso de la propiedad distributiva:

Propiedad Distributiva
$a(b+c)=ab+ac$

$$\begin{aligned} 3(2x+6)+5(2x-1) &= (3)(2x)+(3)(6)+(5)(2x)+(5)(-1) \\ &= 6x+18+10x-5 \\ &= 6x+10x+18-5 \\ &= \mathbf{16x+13} \end{aligned}$$

C

Para simplificar expresiones algebraicas que contienen paréntesis:
1. Se efectúan las multiplicaciones indicadas usando la propiedad distributiva.
2. Se reducen términos semejantes.

Ejemplo Simplifique en cada inciso la expresión algebraica dada.

a) $4(3x+5)-2(x-8)$ b) $4(x-6)-3(-5x-7)$

a) $$\begin{aligned} 4(3x+5)-2(x-8) &= (4)(3x)+(4)(5)-(2)(x)-(2)(-8) \\ &= 12x+20-2x+16 \\ &= 12x-2x+20+16 \\ &= \mathbf{10x+36} \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 4(x-6)-3(-5x-7) &= (4)(x)+(4)(-6)-(3)(-5x)-(3)(-7) \\ &= 4x-24+15x+21 \\ &= 4x+15x-24+21 \\ &= \mathbf{19x-3} \end{aligned}$$

E

Simplifique en cada inciso la expresión algebraica dada.

a) $4(6x+3)+5(2x-1)$ b) $6(x+4)+2(5x-7)$ c) $3(2x-7)+5(x-4)$

d) $6(x+4)-2(5x+7)$ e) $2(8x-6)-4(x-2)$ f) $3(x-1)-7(-2x+3)$

71

Ejemplo

Los ejemplos que se presentan son variantes del problema inicial.

E Representa los ejercicios propuestos, es importante que intenten resolver los ejercicios por ustedes mismos.

En **Comprobemos lo aprendido** se presentan una serie de ejercicios representativos de contenidos anteriores, el objetivo de estas clases es asegurar un tiempo de ejercitación que permita afianzar los conocimientos adquiridos y aclarar cualquier duda que puedan tener de los contenidos estudiados.

En **Desafío** se presentan casos especiales o contenidos de mayor complejidad.

ÍNDICE

Unidad 1

Sucesiones

Sección 1: Sucesiones, notación y término general

Contenido 1: Concepto de sucesión

P

Complete los espacios en blanco

2, 4, ___, 8, 10, ___, 14, 16, …

S

Se observa que cada número en la secuencia, excepto el primero, se obtiene sumando 2 al anterior, es decir:

2, 4, ___, 8, 10, ___, 14, 16, …

+2 +2 +2 +2 +2 +2 +2

Por tanto, la secuencia es 2, 4, **6**, 8, 10, **12**, 14, 16, …

C

Una sucesión es una secuencia de números ordenados de la forma $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$
A cada uno de estos se les llama términos de la sucesión.

Término	Se lee	En la sucesión se le llama
a_1	a sub 1	Primer término
a_2	a sub 2	Segundo término
a_3	a sub 3	Tercer término
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_n	a sub n	n-ésimo término o término general

Para la sucesión anterior se tiene

$$a_1 = 2,$$
$$a_2 = 4,$$
$$a_3 = 6,$$
$$a_4 = 8,$$
$$\vdots$$

E

Complete los espacios en blanco.

a) 3, 6, ____, 12, 15, ____, 21, …

b) 5, ____, 15, 20, ____, 30, 35, ____, …

c) 1, ____, 5, 7,____,11, 13, ____, …

d) −1, ____,−1, 1,____,1, −1, ____, …

e) 1, $\frac{1}{2}$, ____, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, _____, …

f) 1, 2, 4, ____, 11, 16, _____, …

Contenido 2: Término general de una sucesión y su aplicación

P

Deduzca una fórmula para el término general de la sucesión 3, 6, 9, 12, 15, …

S

Se identifica cada término de la sucesión dada

$$a_1 = 3, \quad a_2 = 6, \quad a_3 = 9, \quad a_4 = 12, \quad a_5 = 15, \quad \ldots$$

Se expresa cada término en función de la posición correspondiente que ocupa en la sucesión, así

$$a_1 = (3)(1) = 3$$
$$a_2 = (3)(2) = 6$$
$$a_3 = (3)(3) = 9$$
$$a_4 = (3)(4) = 12$$
$$a_5 = (3)(5) = 15$$
$$\vdots$$
$$a_n = (3)(n) = 3n$$

Es decir, el término general es $\boldsymbol{a_n = 3n}$.

C

Para determinar el término general de una sucesión dada se debe establecer una relación entre cada término y su posición correspondiente en la sucesión. Este se denota por a_n.

$\mathcal{E}_1$

Deduzca una fórmula para el término general de cada una de las sucesiones.

a) 2, 4, 6, 8, 10, … b) 5, 10, 15, 20, 25, … c) 1, 2, 3, 4, 5, …

Ejemplo Dada la sucesión con término general $a_n = 5n - 1$.

a) Calcule los primeros 5 términos de la sucesión b) Encuentre a_{10}

a) Para obtener los primeros 5 términos de la sucesión, se hace $n = 1, 2, 3, 4, 5$ en la fórmula del término general, así

$a_1 = (5)(1) - 1 = 4$ $a_2 = (5)(2) - 1 = 9$ $a_3 = (5)(3) - 1 = 14$

$a_4 = 5(4) - 1 = 19$ $a_5 = (5)(5) - 1 = 24$

Por tanto, la sucesión es **4, 9, 14, 19, 24, …**

b) En este caso $n = 10$, así que $a_{10} = (5)(10) - 1 = 49$.

Por tanto, $\boldsymbol{a_{10} = 49}$.

$\mathcal{E}_2$

Calcule los primeros 5 términos y a_{10} de las sucesiones que tienen el término general

a) $a_n = 2n + 1$ b) $a_n = 3n - 2$ c) $a_n = n^2$

Contenido 3: Comprobemos lo aprendido 1

E

1. Complete los espacios en blanco.

   a) 4, 8, ___, 16, _____, 24, ….

   b) 10, ___, 30, 40, ___, 60, …

   c) 100, 200, _____, 400, _______, ….

   d) 0, -1, _____, -3, -4, _____, …

   e) 2, 4, _____, 16, 32, _____, _____, …

   f) 3, 4, 6, 9,_____,18, _____,…

2. Calcule el término general a_n de las siguientes sucesiones:

   a) 3, 6, 9, 12, …..

   b) 6, 12, 18, 24, …

   c) -1, -2, -3, -4, …

   d) 0, 1, 2, 3,…

   e) 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, …

   f) $\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots$

3. Calcule los primeros 5 términos y el término particular indicado a partir del término general dado.

   a) $a_n = -n$, $\quad a_{15}$

   b) $a_n = 3n+1$, $\quad a_9$

   c) $a_n = 1-n$, $\quad a_{20}$

   d) $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, $\quad a_7$

   e) $a_n = (-1)^n$, $\quad a_{10}$

   f) $a_n = 2^n - 1$, $\quad a_7$

Sección 2: Sucesiones aritméticas

Contenido 1: Sucesión aritmética

P

Complete el espacio en blanco 1, 4, 7, 10, ______, …

S

Cada término de la sucesión después del primero se obtiene de la siguiente manera:

$$1 \xrightarrow[+3]{} 4 \xrightarrow[+3]{} 7 \xrightarrow[+3]{} 10 \xrightarrow[+3]{} \_\_\ \ldots$$

Es decir, un término de la sucesión queda determinado sumando tres a su inmediato anterior. Además, cada término se identifica así:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= 4 \\ a_3 &= 7 \\ a_4 &= 10 \\ a_5 &= 13 \\ &\vdots \end{aligned}$$

La sucesión que resulta es 1, 4, 7, 10, **13**, … A este tipo de sucesión se le llama sucesión aritmética.

C

Una sucesión en la que cada término después del primero se obtiene sumándole al anterior inmediato una cantidad constante se llama **sucesión aritmética**. Esta cantidad constante recibe el nombre de **diferencia común** y la denotaremos con la letra d.

Ejemplo ¿Cuál es la diferencia común en la sucesión dada en el problema?

En la sucesión dada en el problema la diferencia común d es 3, que también se obtiene a partir de

$$d = a_2 - a_1 = 4 - 1 = 3$$

$$d = a_3 - a_2 = 7 - 4 = 3$$

$$d = a_4 - a_3 = 10 - 7 = 3$$

E

Dadas las siguientes sucesiones aritméticas, encuentre d y complete los espacios en blanco:

a) 5, 7, 9, 11, _____, …

b) 7, 10, 13, _____, _____, …

c) 6, 4, _____, 0, _____, …

d) $-1, -2, -3$, _____, -5, _____, …

e) 10, _____, _____, 4, 2,_____, ….

f) _____, 5, 10, _____, _____,…

Contenido 2: Término general de una sucesión aritmética

P

Dada la sucesión aritmética 2, 6, 10, 14, …
a) Encuentre a_1 y d.
b) Determine a_n.

S

a) En esta sucesión aritmética, $a_1=2$ y la diferencia común d se obtiene haciendo

$a_2-a_1=6-2=4$ $\quad$ $a_3-a_2=10-6=4$ $\quad$ $a_4-a_3=14-10=4$

Luego, la diferencia común es $d=4$.

b) En este caso,

$$\begin{aligned}
&a_1 && =2 && =2+(1-1)(4)\\
&a_2=a_1+4 && =2+4 && =2+(2-1)(4)\\
&a_3=a_2+4 && =2+\underbrace{4+4}_{\text{2 veces 4}} && =2+(3-1)(4)\\
&a_4=a_3+4 && =2+\underbrace{4+4+4}_{\text{3 veces 4}} && =2+(4-1)(4)\\
&\quad\vdots && && \quad\vdots\\
&a_n=a_{n-1}+4 && =2+\underbrace{4+4+4+\cdots+4}_{(n-1)\text{ veces 4}} && =2+(n-1)(4)=4n-2
\end{aligned}$$

Por tanto, $a_n=4n-2$.

C

El término general a_n de una sucesión aritmética se expresa en función de a_1 y d en la forma siguiente

$$\begin{aligned}
&a_1=a_1 && =a_1+(1-1)\,d\\
&a_2=a_1+d && =a_1+(2-1)\,d\\
&a_3=a_1+\underbrace{d+d}_{2d} && =a_1+(3-1)\,d\\
&a_4=a_1+\underbrace{d+d+d}_{3d} && =a_1+(4-1)\,d\\
&\quad\vdots && \quad\vdots\\
&a_n=a_1+\underbrace{d+d+\cdots+d}_{(n-1)d} && =a_1+(n-1)d
\end{aligned}$$

Es decir, $a_n=a_1+(n-1)\,d$

Ejemplo Dada una sucesión aritmética con $a_1=1$ y $d=5$, determine a_n y a_6.

Al sustituir $a_1=1$ y $d=5$ en la expresión $a_n=a_1+(n-1)\,d$, resulta

$a_n=1+(n-1)(5)=5n-4$; $\quad$ es decir, $a_n=5n-4$.

Para encontrar a_6 se sustituye n por 6 en la expresión anterior así $a_6=(5)(6)-4=26$.

E

Dadas las siguientes sucesiones aritméticas, determine a_n y el término que se indica:

a) 7, 11, 15, 19, … a_6 $\qquad$ b) 13, 20, 27, … a_8

c) -6, -2, 2, 6, … a_9 $\qquad$ d) -1, -3, -5, -7, … a_{11}

Contenido 3: Aplicación de la fórmula del término general de una sucesión aritmética (1)

P Dada una sucesión aritmética con $d=2$ y $a_4=13$, calcule a_1.

S

Se sustituye $n=4$ en la fórmula del término general y resulta

$$a_4=a_1+(4-1)\,d=a_1+3d$$

Se sustituye $a_4=13$ y $d=2$ en la expresión anterior y se obtiene

$$a_1+(3)(2)=13$$
$$a_1=13-6$$
$$\boldsymbol{a_1=7}$$

La sucesión aritmética es **7**, 9, 11, 13, 15, …

> Término general de una sucesión aritmética
>
> $a_n=a_1+(n-1)\,d$

E1

Calcule a_1 para cada una de las sucesiones aritméticas con:

a) $d=2$ y $a_4=12$ b) $d=3$ y $a_6=20$ c) $d=-2$ y $a_7=3$

Ejemplo Dada una sucesión aritmética con $a_1=-5$ y $a_5=3$, calcule d.

Si n toma el valor de 5 en la fórmula del término general, se tiene $a_5=a_1+(5-1)\,d=a_1+4d$.

Al sustituir $a_1=-5$ y $a_5=3$ en la expresión anterior se obtiene

$$-5+4d=3$$
$$4d=3+5$$
$$4d=8$$
$$\boldsymbol{d=2}$$

Así, la sucesión aritmética es -5, -3, -1, 1, …

E2

Calcule d para cada sucesión aritmética con:

a) $a_1=2$ y $a_4=14$ b) $a_1=-10$ y $a_7=2$ c) $a_1=-7$ y $a_{10}=-34$

Contenido 4: Aplicación de la fórmula del término general de una sucesión aritmética (2)

P

Utilizando el término general de una sucesión aritmética, calcule a_1 y d, sabiendo que $a_3=5$ y $a_6=20$.

S

Se sustituye $n=3$ y $n=6$ en la fórmula del término general de una sucesión aritmética, obteniéndose respectivamente:

$$a_3=a_1+(3-1)\,d=a_1+2d$$
$$a_6=a_1+(6-1)\,d=a_1+5d$$

Término general de una sucesión aritmética

$a_n=a_1+(n-1)\,d$

Al sustituir $a_3=5$ y $a_6=20$ se obtiene

$$\begin{cases} a_1+2d=5 & (1) \\ a_1+5d=20 & (2) \end{cases}$$

Se multiplica por -1 la ecuación (1) se obtiene

$$-a_1-2d=-5 \qquad (3)$$

Se suman (2) y (3) para obtener

$$\begin{array}{rr} & a_1+5d=20 \\ +) & -a_1-2d=-5 \\ \hline & 3d=15 \\ & d=5 \end{array}$$

Se sustituye $d=5$ en (1) y se obtiene

$$a_1+(2)(5)=5$$
$$a_1=5-10$$
$$a_1=-5$$

Por tanto, $\boldsymbol{a_1=-5}$ y $\boldsymbol{d=5}$.

La sucesión aritmética es $-5, 0, 5, 10, 15, 20, 25, \ldots$

C

Para determinar a_1 y d en una sucesión aritmética conocidos dos términos cualesquiera de la misma, se utiliza la fórmula $a_n=a_1+(n-1)\,d$ y se forma así un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas cuya solución corresponde a los valores de a_1 y d.

E

A partir de los términos que se indican de una sucesión aritmética, calcule a_1 y d.

a) $a_3=10$ y $a_6=16$

b) $a_4=3$ y $a_7=21$

c) $a_5=-1$ y $a_9=-13$

d) $a_2=-2$ y $a_{10}=-10$

Contenido 5: Comprobemos lo aprendido 2

E

1. Calcule la diferencia común y complete los espacios en blanco para cada una de las sucesiones aritméticas dadas.

   a) 4, 6, 8, 10,___, …
   b) 12, 15, 18, ___, ___, …
   c) 9, 7, ___, 3, ___, …
   d) $-2, -4, -6$, ___, -10, ___, …
   e) 30, ___, ___, 60, 70,___, ____, …
   f) ___, ___, -5, -10, ___, ___, …

2. Dadas las siguientes sucesiones aritméticas, determine a_n y el término que se indica:

   a) 5, 11, 17, … a_5
   b) 2, 10, 18, … a_7
   c) $-1, -4, -7, \dots$ a_6
   d) $-3, -6, -9, -12, \dots$ a_{11}

3. Calcule a_1 para cada sucesión aritmética con:

   a) $d=3$ y $a_4=5$
   b) $d=-2$ y $a_7=25$
   c) $d=-10$ y $a_9=90$
   d) $d=-7$ y $a_{11}=35$

4. Calcule d para cada sucesión aritmética que tiene:

   a) $a_1=4$ y $a_3=16$
   b) $a_1=-20$ y $a_8=1$
   c) $a_1=8$ y $a_9=-32$
   d) $a_1=-17$ y $a_5=-85$

5. A partir de los términos que se indican de cada sucesión aritmética, calcule a_1 y d.

   a) $a_3=12$ y $a_6=24$
   b) $a_2=5$ y $a_5=26$
   c) $a_6=-20$ y $a_{21}=55$
   d) $a_2=-20$ y $a_{10}=-100$

Contenido 6: Suma de los n primeros términos de una sucesión aritmética (1)

P

Dada la sucesión aritmética 1, 5, 9, 13, 17,…, determine la suma de los 5 primeros términos realizando los siguientes pasos:

a) Indique la suma S de los primeros 5 términos partiendo del primero al quinto.
b) Indique la suma S de los primeros 5 términos partiendo del quinto al primero.
c) Indique la suma de ambas sumas.
d) Calcule la suma S.

S

a) $S=1+5+9+13+17$ b) $S=17+13+9+5+1$

c) Al sumar ambas igualdades lado a lado, se tiene

$$\begin{array}{rl} & S = 1+5+9+13+17 \\ +) & S = 17+13+9+5+1 \\ \hline & 2S = (1+17)+(5+13)+\ldots+(17+1) \\ & 2S = 18+18+18+18+18 \\ & 2S = (5)(18) \\ & 2S = 90 \end{array}$$

d) Como $2S=90$, así $\boldsymbol{S=45}$.

C

En una sucesión aritmética conocidos a_1 y d, la suma de los n primeros términos, S_n, se obtiene como sigue

$$S_n = a_1 + \underbrace{(a_1+d)}_{a_2} + \underbrace{(a_1+2d)}_{a_3} + \cdots + \underbrace{(a_n-d)}_{a_{n-1}} + a_n \quad ①$$

que además se puede reescribir como

$$S_n = a_n + \underbrace{(a_n-d)}_{a_{n-1}} + \underbrace{(a_n-2d)}_{a_{n-2}} + \cdots + \underbrace{(a_1+d)}_{a_2} + a_1 \quad ②$$

Sumando ① y ② se tiene

$$\begin{array}{rl} & S_n = a_1 + (a_1+d) + (a_1+2d) + \cdots + (a_n-d) + a_n \\ +) & S_n = a_n + (a_n-d) + (a_n-2d) + \cdots + (a_1+d) + a_1 \\ \hline & 2S_n = \underbrace{(a_1+a_n) + (a_1+a_n) + (a_1+a_n) + \cdots + (a_1+a_n) + (a_1+a_n)}_{n \text{ veces}} \end{array}$$

$$2S_n = n\,(a_1+a_n)$$

$$\boldsymbol{S_n = \frac{n}{2}(a_1+a_n)}$$

Ejemplo Calcule la suma S_8 de los primeros ocho términos de una sucesión aritmética con $a_1=-1$ y $a_8=13$.

En este caso $n=8$, $a_1=-1$ y $a_8=13$. Al sustituir estos valores en la fórmula para S_n, resulta:

$S_8 = \frac{8}{2}(-1+13) = (4)(12) = 48$, es decir, $\boldsymbol{S_8 = 48}$.

E

Dadas las sucesiones aritméticas con los términos dados, encuentre las sumas indicadas.

a) $a_1=1$ y $a_6=16$, S_6 b) $a_1=5$ y $a_8=26$, S_8

c) $a_1=-10$ y $a_7=2$, S_7 d) $a_1=-1$ y $a_9=-33$, S_9

Contenido 7: Suma de los n primeros términos de una sucesión aritmética (2)

P

Exprese la suma S_n de los n primeros términos de una sucesión aritmética en función de a_1 y d.

S

Dado que $a_n = a_1 + (n-1)\,d$, la fórmula $S_n = \frac{n}{2}\,(a_1 + a_n)$

puede reescribirse como

$$S_n = \frac{n}{2}[a_1 + \underbrace{a_1 + (n-1)\,d}_{a_n}]$$

$$\mathbf{S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]}$$

C

La suma de los n primeros términos de una sucesión aritmética, conocidos a_1 y d, está dada por:

$$\mathbf{S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]}$$

Ejemplo Dada una sucesión aritmética con $a_1 = 11$ y $d = 5$, determine S_{10}.

Al sustituir $n = 10$, $a_1 = 11$ y $d = 5$ en la expresión $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$, se obtiene

$$S_{10} = \frac{10}{2}[(2)(11) + (10-1)\,(5)].$$

$$S_{10} = (5)\,(22 + 45)$$

$$S_{10} = (5)\,(67)$$

$$S_{10} = 335$$

Por tanto, $\mathbf{S_{10} = 335}$.

E

Dadas las sucesiones aritméticas con a_1 y d conocidos, calcule la suma indicada.

a) $a_1 = 1$ y $d = 5$, S_6

b) $a_1 = 2$ y $d = 6$, S_8

c) $a_1 = -20$ y $d = 2$, S_5

d) $a_1 = -3$ y $d = -5$, S_7

Contenido 8: Aplicación de la fórmula para encontrar la suma de términos de una sucesión aritmética (1)

P1 Dada la sucesión aritmética con $a_1 = 3$ y $S_6 = 48$, calcule el término a_6.

S

Se sustituye $a_1 = 3$, $n = 6$ y $S_6 = 48$ en la expresión $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$
se sigue que

$$48 = \frac{6}{2}(3 + a_6)$$
$$48 = 3(3 + a_6)$$
$$\frac{48}{3} = \frac{\cancel{3}(3 + a_6)}{\cancel{3}}$$
$$3 + a_6 = 16$$
$$a_6 = 16 - 3$$
$$\mathbf{a_6 = 13}$$

E1

A partir del término y la suma que se indican para cada sucesión aritmética con:

a) $a_1 = 5$ y $S_6 = 75$. Determine a_6.
b) $a_1 = 1$ y $S_8 = 64$. Determine a_8.
c) $a_1 = 4$ y $S_7 = 70$. Determine a_7.
d) $a_1 = 10$ y $S_9 = -36$. Determine a_9.

Si en una sucesión se identifica un primer y un último término, esta se denomina **finita**.

P2 Dada la sucesión aritmética finita 2, 5, 8, …,17.
a) Determine la posición n del número 17 en la sucesión.
b) Calcule la suma de sus términos.

S

a) Se observa que cada término de la sucesión se obtiene como sigue $2 \xrightarrow{+3} 5 \xrightarrow{+3} 8, \ldots, 17$

En consecuencia, la diferencia común d es 3. Se sustituye $a_1 = 2$, $d = 3$ y $a_n = 17$ en $a_n = a_1 + (n - 1)\,d$, resultando:

$$17 = 2 + (n - 1)\,3$$
$$17 = 3n - 1$$
$$3n = 18$$
$$\mathbf{n = 6}$$

Es decir, **17 es el sexto término** de la sucesión. Así, $a_6 = 17$.

b) Para determinar la suma requerida, se sustituye $n = 6$, $a_1 = 2$ y $a_6 = 17$ en la expresión

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n),$$

obteniendo $S_6 = \frac{6}{2}(2 + 17) = (3)(19) = 57$, es decir, $\mathbf{S_6 = 57}$.

E2

Dadas las siguientes sucesiones aritméticas finitas, calcule la suma de sus términos:

a) 1, 3, 5, …, 19
b) 3, 6, 9, …, 24
c) 2, 6, 10, …, 26
d) −1, −2, −3, …, −16

Contenido 9: Aplicación de la fórmula para encontrar la suma de términos de una sucesión aritmética (2)

P

Se colocan 60 pupitres en un aula, de tal manera que la primera fila tenga 6, la segunda 9, la tercera 12 y así sucesivamente.

a) Forme una sucesión aritmética con el número de pupitres dispuestos en cada fila.
b) Calcule la diferencia común.
c) Encuentre el número de filas que se forman.

S

a) Sea n el número de filas que se forman. Se identifica el número de pupitres dispuestos en cada fila como sigue

Primera fila: $a_1 = 6$

Segunda fila: $a_2 = 9$

Tercera fila: $a_3 = 12$

y así sucesivamente, formando de esta manera la sucesión aritmética **6, 9, 12, …**

b) Es obvio que la diferencia común es **3** y que cada término de la sucesión, excepto el primero, se obtiene sumando la diferencia común al anterior inmediato, como se muestra en el diagrama

$$6 \xrightarrow{+3} 9 \xrightarrow{+3} 12, \ldots$$

c) El número total de pupitres representa la suma de los primeros n términos de la sucesión, es decir, $S_n = 60$. Utilizando la fórmula $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)\,d]$

y se sustituye en esta $S_n = 60$, $a_1 = 6$ y $d = 3$ se tiene

$$60 = \frac{n}{2}\,[(2)(6) + (n-1)\,3]$$

$$120 = n(3n+9)$$

$$120 = 3n^2 + 9n$$

$$3n^2 + 9n - 120 = 0$$

$$n^2 + 3n - 40 = 0$$

$$(n+8)(n-5) = 0$$

$$n = -8, \quad n = 5$$

Como $n > 0$, $n = 5$. Por tanto, **se forman 5 filas.**

E

Resuelva el siguiente problema:

Un entrenador de gimnasia tiene 45 gimnastas y quiere acomodarlas en filas de modo que la primera fila tenga 1 gimnasta, la segunda 2 gimnastas, la tercera 3 gimnastas y así sucesivamente ¿en cuántas filas se distribuirán las gimnastas?

Contenido 10: Comprobemos lo aprendido 3

E

1. Dada una sucesión aritmética con
   a) $a_1 = 5$ y $a_8 = 40$, determine S_8
   b) $a_1 = 3$ y $a_{12} = 25$, determine S_{12}
   c) $a_1 = 9$ y $a_9 = -39$, determine S_9
   d) $a_1 = -13$ y $a_{11} = -47$, determine S_{11}

2. Dada una sucesión aritmética con
   a) $a_1 = 4$ y $d = 6$, determine S_7
   b) $a_1 = 3$ y $d = 10$, determine S_5
   c) $a_1 = -15$ y $d = 3$, determine S_{10}
   d) $a_1 = -7$ y $d = -4$, determine S_6

3. Calcule el término para cada sucesión aritmética con:
   a) $a_1 = 2$ y $S_5 = 50$, determine a_5
   b) $a_1 = 7$ y $S_9 = 180$, determine a_9
   c) $a_1 = -5$ y $S_6 = 270$, determine a_6
   d) $a_1 = -3$ y $S_{10} = -185$, determine a_{10}

4. Dadas las siguientes sucesiones, calcule la suma de sus términos:
   a) 1, 4, 7, …, 19
   b) 2, 10, 18, …, 58
   b) 10, 7, 4, …, -23
   d) 10, 5, 0, …, -30

5. Resuelva el siguiente problema.

   Un albañil coloca ladrillos en el piso de tal forma que la base tiene 26 ladrillos, la segunda capa 24, la tercera 22 y así sucesivamente, hasta que la capa superior tenga 12.

   a) ¿Cuántas filas se forman?

   b) ¿Cuántos ladrillos en total coloca el albañil?

Sección 3: Sucesiones geométricas

Contenido 1: Sucesión geométrica

P

Complete el espacio en blanco en la sucesión 1, 2, 4, 8, ___, 32, 64, … y establezca una relación entre cada dos términos consecutivos.

S

De acuerdo con el diagrama

$$1 \xrightarrow{\times 2} 2 \xrightarrow{\times 2} 4 \xrightarrow{\times 2} 8 \xrightarrow{\times 2} \_\_\_ \xrightarrow{\times 2} 32 \xrightarrow{\times 2} 64, \ldots$$

cada término, excepto el primero, se obtiene multiplicando por 2 el anterior inmediato, así que

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = (1)(2) = 2$$
$$a_3 = (2)(2) = 4$$
$$a_4 = (4)(2) = 8$$
$$a_5 = (8)(2) = \mathbf{16}$$
$$\vdots$$

Por tanto, resulta la sucesión 1, 2, 4, 8, **16**, 32, 64, …, que se conoce como sucesión geométrica.

C

Una sucesión en la que cada término después del primero se obtiene multiplicando el anterior inmediato por una cantidad constante se llama **sucesión geométrica**. Esta cantidad constante recibe el nombre de **razón común** y se denota con la letra r.

Ejemplo ¿Cuál es la razón común en la sucesión dada en el problema?

En la sucesión del problema dado la razón común r es 2, ya que esta es la constante por la cual se multiplica cada término para obtener el siguiente. También se puede calcular la razón obteniendo los cocientes

$$r = a_2 \div a_1 = 2 \div 1 = 2$$
$$r = a_3 \div a_2 = 4 \div 2 = 2$$
$$r = a_4 \div a_3 = 8 \div 4 = 2$$

Por lo tanto, la razón común es $r = 2$.

E

Dadas las siguientes sucesiones geométricas, complete los espacios en blanco y calcule r:

a) 3, 6, 12, _____, 48, 96, …

b) 2, 6, 18, _____, _____, …

c) 5, 10, _____, 40, _____, …

d) _____, _____, 8, 4, _____, …

e) 1, _____, _____, 27, 81, _____, , ….

f) _____, _____, 4, −8, _____, …

Contenido 2: Término general de una sucesión geométrica

P

Dada la sucesión geométrica 1, 3, 9, 27, …

a) Calcule a_1 y r.

b) Determine a_n.

S

a) En la sucesión dada vemos que $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 9$, $a_4 = 27$ y calculando los cocientes sucesivos

$$a_2 \div a_1 = 3 \div 1 = 3 \qquad a_2 \div a_1 = 9 \div 3 = 3 \qquad a_2 \div a_1 = 27 \div 9 = 3$$

se constata que la sucesión es geométrica con razón común $r = 3$.

b) En este caso

$$\begin{array}{lll}
a_1 & = 1 & = (1)(3^{1-1}) \\
a_2 = a_1(3) & = (1)(3) & = (1)(3^{2-1}) \\
a_3 = a_2(3) & = (1)\underbrace{(3)(3)}_{2\text{ veces }3} & = (1)(3^{3-1}) \\
a_4 = a_3(3) & = (1)\underbrace{(3)(3)(3)}_{3\text{ veces }3} & = (1)(3^{4-1}) \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
a_n = a_{n-1}(3) & = (1)\underbrace{(3)(3)\cdots(3)}_{(n-1)\text{ veces }3} & = (1)(3^{n-1}) = 3^{n-1}
\end{array}$$

Recuerde que $3^0 = 1$

En conclusión, el término general de la sucesión dada es $\boldsymbol{a_n = 3^{n-1}}$.

C

El término general a_n de una sucesión geométrica se puede expresar en función de a_1 y r como sigue

$$\begin{array}{ll}
a_1 = a_1 & = a_1\, r^{1-1} \\
a_2 = a_1\, r & = a_1\, r^{2-1} \\
a_3 = a_1\, \underbrace{r \cdot r}_{r^2} & = a_1\, r^{3-1} \\
a_4 = a_1\, \underbrace{r \cdot r \cdot r}_{r^3} & = a_1\, r^{4-1} \\
\vdots & \vdots \\
a_n = a_1\, \underbrace{r \cdots r}_{(n-1)\text{ veces } r} & = a_1 r^{n-1}
\end{array}$$

$r^0 = 1,\ r \neq 0$

En conclusión, el término general es $\boldsymbol{a_n = a_1\, r^{n-1}}$.

Ejemplo Determine a_n de una sucesión geométrica con $a_1 = 2$ y $r = 3$. Calcule a_4.

Se sustituye $a_1 = 2$ y $r = 3$ en la expresión $a_n = a_1 r^{n-1}$, así $a_n = (2)(3^{n-1})$.

Para encontrar a_4 se sustituye $n = 4$ en la expresión anterior

$$a_4 = (2)(3^{4-1}) = (2)(3^3) = (2)(27) = \mathbf{54}.$$

E

Dadas las siguientes sucesiones geométricas, determine el término general a_n y el término particular indicado:

a) $2, 4, 8, \ldots, a_6$

b) $5, 10, 20, \ldots, a_7$

c) $2, 8, 32, \ldots, a_5$

d) $-2, -6, \ldots, a_4$

Contenido 3: Aplicación de la fórmula del término general de una sucesión geométrica (1)

P Dada una sucesión geométrica con $r=2$ y $a_4=24$, calcule a_1.

S

Al sustituir $n=4$ en la fórmula del término general $a_n=a_1 r^{n-1}$, resulta

$$a_4=a_1 r^{4-1}=a_1 r^3$$

Se sustituye $a_4=24$ y $r=2$ en la expresión anterior y se sigue que

$$a_1(2^3)=24$$
$$a_1=\frac{24}{8}$$
$$\mathbf{a_1=3}$$

La sucesión geométrica es 3, 6, 12, 24, …

E

Calcule a_1 para cada sucesión geométrica con:

a) $r=3$ y $a_4=81$ b) $r=-2$ y $a_5=64$ c) $r=-1$ y $a_9=5$

Desafío

Ejemplo Dada una sucesión geométrica tal que $a_1=4$ y $a_4=108$, determine r.

Al sustituir $n=4$ en la fórmula del término general, se obtiene

$$a_4=a_1 r^{4-1}=a_1 r^3$$

Al sustituir $a_1=4$ y $a_4=108$ en la expresión anterior se obtiene

$$4r^3=108$$
$$r^3=\frac{108}{4}$$
$$r^3=27$$
$$r^3=3^3$$
$$\mathbf{r=3}$$

Descomposición de 27 en factores

27	3
9	3
3	3
1	

$27=(3)(3)(3)=3^3$

Así, la sucesión geométrica es 4, 12, 36, 108, …

E

Calcule r para cada sucesión geométrica con:

a) $a_1=1$ y $a_4=125$ b) $a_1=4$ y $a_6=128$ c) $a_1=2$ y $a_8=-256$

Contenido 4: Aplicación de la fórmula del término general de una sucesión geométrica (2)

P

Determine a_1 y r para una sucesión geométrica, sabiendo que $a_2=10$ y $a_4=40$.

S

Se sabe que $a_2=a_1r$ y $a_4=a_1r^3$. Si se calcula $a_4 \div a_2$ y se sustituye $a_2=10$ y $a_4=40$ resulta

$$\frac{a_1r^3}{a_1r}=\frac{40}{10}$$
$$r^2=4$$
$$r=\pm 2$$

Se sustituye $\boldsymbol{r=2}$ en $a_2=a_1r$, y se encuentra que $a_1(2)=10$, es decir, $\boldsymbol{a_1=5}$.

De igual manera, si se sustituye $\boldsymbol{r=-2}$ en $a_2=a_1r$, se tiene $a_1(-2)=10$, es decir, $\boldsymbol{a_1=-5}$.

E

Calcule a_1 y r para cada sucesión geométrica, sabiendo que:

a) $a_2=3$ y $a_4=27$

b) $a_3=12$ y $a_5=48$

Desafío

Ejemplo Calcule a_1 y r para una sucesión geométrica, sabiendo que $a_2=10$ y $a_5=80$.

Como $a_2=a_1\,r$ y $a_5=a_1\,r^4$, si se calcula el cociente $a_5 \div a_2$ resulta

$$\frac{a_5}{a_2}=\frac{a_1r^4}{a_1r}=r^3 \qquad ①$$

También $a_2=10$ y $a_5=80$, así que

$$\frac{a_5}{a_2}=\frac{80}{10}=8 \qquad ②$$

Igualando ① y ② se tiene

$$r^3=8$$
$$r^3=2^3$$
$$r=2$$

Descomposición de 8 en factores

8	2
4	2
2	2
1	

$8=(2)(2)(2)=2^3$

Se sustituye $a_2=10$ y $r=2$, en la expresión $a_2=a_1\,r$, resultando

$$10=a_1(2)$$
$$a_1=\frac{10}{2}=5$$

En consecuencia, $\boldsymbol{a_1=5}$ y $\boldsymbol{r=2}$.

E

Calcule a_1 y r de cada sucesión geométrica, sabiendo que:

a) $a_2=6$ y $a_5=48$

b) $a_2=6$ y $a_5=-162$

Contenido 5: Suma de los n primeros términos de una sucesión geométrica

P

Dada la sucesión geométrica 1, 3, 9, 27, 81, …, calcule la suma de los primeros 5 términos mediante los siguientes pasos:

a) Indique la suma S de los primeros 5 términos.

b) Multiplique por 3 la suma anterior.

c) De la expresión obtenida en b) reste la expresión obtenida en a) y calcule el valor de la suma S.

S

a) $S = 1 + 3 + 9 + 27 + 81$

b) $3S = 3 + 9 + 27 + 81 + 243$

c) Se expresa $3S - S$

$$\begin{array}{rl} 3S = & \quad\ \ 3 + 9 + 27 + 81 + 243 \\ -S = & -1 - 3 - 9 - 27 - 81 \\ \hline 2S = & -1 \qquad\qquad\qquad\quad + 243 \end{array}$$

$$2S = 242$$

$$S = \frac{242}{2}, \quad \text{es decir,} \quad \mathbf{S = 121}.$$

C

En una sucesión geométrica conocidos a_1 y r se establece la suma de sus n primeros términos S_n, de la siguiente manera:

$$S_n = a_1 + \underbrace{(a_1 r)}_{a_2} + \underbrace{(a_1 r^2)}_{a_3} + \cdots + \underbrace{(a_1 r^{n-2})}_{a_{n-1}} + \underbrace{(a_1 r^{n-1})}_{a_n} \qquad ①$$

la multiplicación de la expresión anterior por r se transforma en

$$rS_n = \underbrace{(a_1 r)}_{a_2} + \underbrace{(a_1 r^2)}_{a_3} + \cdots + \underbrace{(a_1 r^{n-2})}_{a_{n-1}} + \underbrace{(a_1 r^{n-1})}_{a_n} + a_1 r^n \qquad ②$$

La sustracción ② − ① da lugar a lo siguiente:

$$\begin{array}{rl} rS_n = & \qquad\quad (a_1 r) + (a_1 r^2) + \cdots + (a_1 r^{n-2}) + (a_1 r^{n-1}) + a_1 r^n \\ -S_n = & -a_1 - (a_1 r) - (a_1 r^2) - \cdots - (a_1 r^{n-2}) - (a_1 r^{n-1}) \\ \hline rS_n - S_n = & -a_1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + a_1 r^n \end{array}$$

$$(r-1)\,S_n = a_1(r^n - 1)$$

Si $r \neq 1$, se escribe $S_n = \dfrac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$ o equivalentemente $S_n = \dfrac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$.

Ejemplo Compruebe el resultado obtenido en la solución del problema aplicando la fórmula anterior.

De acuerdo con el problema, $a_1 = 1$, $r = 3$ y $n = 5$, al sustituir estos valores en la fórmula anterior se sigue que

$$S_5 = \frac{1(3^5 - 1)}{3 - 1} = \frac{242}{2} = \mathbf{121}$$

Obteniendo de esta manera la misma respuesta dispuesta en la solución del problema.

E

Calcule la suma indicada para cada sucesión geométrica con:

a) $a_1 = 2$ y $r = 4$, determine S_3

b) $a_1 = 8$ y $r = 2$, determine S_5

c) $a_1 = -9$ y $r = 3$, determine S_4

d) $a_1 = -3$ y $r = -1$, determine S_7

Contenido 6: Aplicación de la fórmula para la suma de términos de una sucesión geométrica

P

Dada la sucesión geométrica con $r = 2$ y $S_6 = 126$, calcule a_1.

S

Al sustituir $r = 2$, $n = 6$ y $S_6 = 126$ en la expresión $S_n = \dfrac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$

se sigue que

$$126 = \frac{a_1(2^6 - 1)}{2 - 1}$$

$$126 = a_1(63)$$

$$a_1 = \frac{126}{63}$$

$$\mathbf{a_1 = 2}$$

E

Determine a_1 para cada sucesión geométrica con:

a) $r = 2$ y $S_5 = 93$

b) $r = 5$ y $S_3 = 155$

c) $r = -2$ y $S_4 = 5$

d) $r = -4$ y $S_4 = 204$

Contenido 7: Comprobemos lo aprendido 4

E

1. Complete los espacios en blanco de las siguientes sucesiones geométricas y calcule la razón común:

a) 1, 4, 16, ___, ___, …

b) 4, 12, ___, 108, ___, …

c) ___, ___, -12, -24,___, …

d) -81, ___, ___, 3, -1,___, ___, ….

2. Dadas las siguientes sucesiones geométricas, determine a_n y el término que se indica:

a) 1, 6, 36, … a_4

b) 5, 15, 45, … a_5

c) -7, 14, -28, … a_6

d) -16, -8, -4… a_7

3. Calcule a_1 para cada sucesión geométrica con:

a) $r=2$ y $a_4=64$

b) $r=-3$ y $a_5=324$

c) $r=\frac{1}{2}$ y $a_6=-1$

4. Calcule r para cada sucesión geométrica que tiene:

a) $a_1=5$ y $a_4=-40$

b) $a_1=9$ y $a_6=288$

c) $a_5=3$ y $a_7=27$

5. Calcule la suma de términos indicada para las sucesiones geométricas con:

a) $a_1=1$ y $r=4$, S_3

b) $a_1=3$ y $r=4$, S_4

c) $a_1=9$ y $r=-3$, S_3

6. Calcule a_1 para cada sucesión geométrica con:

a) $r=2$ y $S_3=63$

b) $r=5$ y $S_4=156$

c) $r=-2$ y $S_4=10$

Sección 4: Notación de sumatoria

Contenido 1: Símbolo de sumatoria $\sum$

La suma extendida $a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_n$ de los primeros n términos de una sucesión puede expresarse con el símbolo Sigma $\sum$ como sigue

Suma extendida	En notación de sumatoria	Se lee
$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$	$\sum_{k=1}^{n} a_k$	Sumatoria desde $k=1$ hasta n de a_k

Nótese que k indica la posición del término que se suma.

Se observa además que para expresar la suma con el uso de este símbolo, no es necesario enumerar todos los sumandos.

Más concretamente, se pueden puntualizar los elementos que intervienen en la notación de sumatoria $\sum$ de la siguiente manera:

$$\sum_{k=\boxed{1}}^{\boxed{n}} \boxed{a_k}$$

n → Límite superior

a_k → Argumento o k-ésimo elemento

1 → Límite inferior

Ejemplo 1 Escriba las expresiones dadas como una suma extendida sustituyendo sucesivamente los valores de k desde 1 hasta el límite superior indicado.

a) $\sum_{k=1}^{n} 2k$ b) $\sum_{k=1}^{5} k^2$ c) $\sum_{k=3}^{6} k^3$ d) $\sum_{k=1}^{n} (3k+1)$

---

a) $\sum_{k=1}^{n} 2k = 2+4+6+\cdots+2n$

b) $\sum_{k=1}^{5} k^2 = 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2$

c) $\sum_{k=3}^{6} k^3 = 3^3+4^3+5^3+6^3$

d) $\sum_{k=1}^{n} (3k+1) = 4+7+10+\cdots+(3n+1)$

E_1

Escriba las expresiones dadas como una suma extendida sustituyendo los valores de k desde 1 hasta el límite superior indicado.

a) $\sum_{k=1}^{n} 3k$ b) $\sum_{k=1}^{6} k^2$ c) $\sum_{k=4}^{7} 2^k$

Ejemplo 2 Exprese las siguientes sumas dadas en forma extendida usando la notación sumatoria $\sum$.

a) $1+2+3+4+\cdots+n$ b) $3+3^2+3^3+3^4+3^5$

---

a) $1+2+3+4+\cdots+n = \sum_{k=1}^{n} k$

b) $3+3^2+3^3+3^4+3^5 = \sum_{k=1}^{5} 3^k$

E_2

Exprese las siguientes sumas extendidas usando la notación sumatoria $\sum$.

a) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$ b) $1+2+3+4+\cdots+20$ c) $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}$

Contenido 2: Propiedades de sumatoria

P

En cada uno de los incisos escriba las siguientes expresiones como sumas extendidas y establezca una relación entre ellas:

a) $\sum_{k=1}^{10} 2k$ y $2\sum_{k=1}^{10} k$

b) $\sum_{k=1}^{10} (k+k^2)$ y $\sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=1}^{10} k^2$

S

a) $\sum_{k=1}^{10} 2k = (2)(1)+(2)(2)+(2)(3)+\cdots+(2)(10) = 2(1+2+3+\cdots+10)$

$2\sum_{k=1}^{10} k = 2(1+2+3+\cdots+10)$

Por tanto, $\sum_{k=1}^{10} 2k = 2\sum_{k=1}^{10} k$

b) $\sum_{k=1}^{10} (k+k^2) = (1+1^2)+(2+2^2)+(3+3^2)+\cdots+(10+10^2)$

$= (1+2+3+\cdots+10)+(1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2)$

y $\sum_{k=1}^{10} k = 1+2+3+\cdots+10$, $\sum_{k=1}^{10} k^2 = 1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2$

Así, $\sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=1}^{10} k^2 = (1+2+3+\cdots+10)+(1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2)$

Por tanto, $\sum_{k=1}^{10} (k+k^2) = \sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=1}^{10} k^2$

C

En general, si c es una constante, se tienen las siguientes propiedades:

a) $\sum_{k=1}^{n} ck = c\sum_{k=1}^{n} k$, en particular $\sum_{k=1}^{n} c = nc$.

b) $\sum_{k=1}^{n} (a_k+b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

$\sum_{k=1}^{n} c = \underbrace{c+c+\cdots+c}_{n \text{ veces}} = nc$

Ejemplo:

$\sum_{k=1}^{5} 3 = 3+3+3+3+3 = (5)(3) = 15$

E

Reescriba las siguientes expresiones utilizando las propiedades estudiadas:

a) $\sum_{k=1}^{5} 5k$

b) $\sum_{k=1}^{15} 2$

c) $\sum_{k=1}^{4} (k^2+k^3)$

d) $\sum_{k=1}^{6} (2k+k^2)$

Contenido 3: Suma de los n primeros números naturales

P

Deduzca una expresión para la suma de los términos de la sucesión 1, 2, 3, 4,…, n.

S

La diferencia común d es 1 ya que

$$1 \xrightarrow{+1} 2 \xrightarrow{+1} 3 \xrightarrow{+1} 4, \ldots$$

Ahora bien, se sustituye $a_1 = 1$ y $a_n = n$ en la fórmula para la suma de los n primeros términos de una sucesión aritmética para obtener

$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

$$S_n = \frac{n}{2}(1+n)$$

Pero, $S_n = 1+2+3+\cdots+n = \sum_{k=1}^{n} k$, así que utilizando sumatoria se tiene

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n}{2}(n+1)$$

C

La suma de los n primeros números naturales está dada por

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n}{2}(n+1)$$

Ejemplo

Calcule el valor de la sumatoria $\sum_{k=1}^{20} k$

Sustituyendo $n = 20$ en la fórmula anterior resulta

$$\sum_{k=1}^{20} k = \left(\frac{20}{2}\right)(20+1) = (10)(21) = 210$$

E

Calcule el valor de las siguientes sumatorias:

a) $\sum_{k=1}^{10} k$ b) $\sum_{k=1}^{15} k$ c) $\sum_{k=1}^{30} k$

Contenido 4: Suma de los cuadrados de los n primeros números naturales

La suma de los cuadrados de los n primeros números naturales está dada por

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1+4+9+\cdots+n^2$$

Ejemplo 1 Calcule el valor de la sumatoria $\sum_{k=1}^{7} k^2$.

Aplicando la fórmula anterior para $n=7$ se sigue

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{7} k^2 &= \left(\frac{1}{6}\right)(7)(7+1)[(2)(7)+1]\\ &= \left(\frac{1}{6}\right)(7)(8)(15)\\ &= 140\end{aligned}$$

Por tanto, $\sum_{k=1}^{7} k^2 = \mathbf{140}$.

E1

Calcule el valor de las siguientes sumas:

a) $\sum_{k=1}^{5} k^2$ b) $1+4+9+16+25+36+49+64$ c) $\sum_{k=1}^{10} k^2$

Ejemplo 2 Calcule el valor de la sumatoria $\sum_{k=1}^{5} (2k^2+k)$.

La suma dada puede ser reescrita como

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{5} (2k^2+k) &= \sum_{k=1}^{5} 2k^2 + \sum_{k=1}^{5} k\\ &= 2\sum_{k=1}^{5} k^2 + \sum_{k=1}^{5} k\end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k+b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$$

Dado que $\sum_{k=1}^{5} k^2 = \left(\frac{1}{6}\right)(5)(5+1)[(2)(5)+1] = 55$ y $\sum_{k=1}^{5} = \left(\frac{1}{2}\right)(5)(5+1) = 15$, entonces

$$2\sum_{k=1}^{5} k^2 + \sum_{k=1}^{5} k = (2)(55)+15 = 125$$

Por tanto, $\sum_{k=1}^{5} (2k^2+k) = \mathbf{125}$.

E2

Calcule el valor de las siguientes sumatorias:

a) $\sum_{k=1}^{5} (3k^2+k)$ b) $\sum_{k=1}^{7} \left(\frac{1}{2}k^2+5\right)$ c) $\sum_{k=1}^{6} (2k^2+3k)$

Contenido 5: Comprobemos lo aprendido 5

$\mathcal{E}$

1. Escriba las expresiones dadas como sumas extendidas sustituyendo sucesivamente los valores de k desde el límite inferior hasta el límite superior.

   a) $\sum_{k=1}^{n} 6k$

   b) $\sum_{k=3}^{10} k^2$

   c) $\sum_{k=2}^{6} 2^k$

2. Exprese las sumas dadas usando la notación sumatoria $\sum$.

   a) $2^2+3^2+4^2+\cdots+18^2$

   b) $3+5+\cdots+(2n+1)$

   c) $(-1)+1+(-1)+1+\cdots+(-1)^n$

3. Reescriba las siguientes expresiones utilizando las propiedades estudiadas:

   a) $\sum_{k=1}^{4} 10k$

   b) $\sum_{k=2}^{8} \frac{1}{5}k^2$

   c) $\sum_{k=1}^{7} (3k+k^2)$

4. Calcule el valor de las siguientes sumatorias aplicando las propiedades de sumatorias:

   a) $\sum_{k=1}^{25} k$

   b) $\sum_{k=1}^{8} 10$

   c) $\sum_{k=1}^{7} k^2$

   d) $\sum_{k=1}^{5} (3+k^2)$

   e) $\sum_{k=1}^{6} [k+(-1)]$

   f) $\sum_{k=1}^{8} (k^2+2k+1)$

Desafío

Demostración "Suma de los cuadrados de los n primeros números naturales"

P Demuestre que

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

S

Como

$$\begin{aligned}(k+1)^3 &= (k+1)^2(k+1)\\ &= (k^2+2k+1)(k+1)\\ &= k^3+k^2+2k^2+2k+k+1\\ &= k^3+3k^2+3k+1\end{aligned}$$

entonces $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2+3k+1$

Si se hace $k = 1, 2, 3, 4, \ldots, n$ en la expresión anterior, se sigue que para

$$\begin{array}{lccc} k=1, & \cancel{2}^3 - 1^3 & = & (3)(1^2)+(3)(1)+1\\ k=2, & \cancel{3}^3 - \cancel{2}^3 & = & (3)(2^2)+(3)(2)+1\\ k=3, & \cancel{4}^3 - \cancel{3}^3 & = & (3)(3^2)+(3)(3)+1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ k=n, & (n+1)^3 - \cancel{n}^3 & = & 3n^2+3n+1 \end{array}$$

Sumando lado a lado las n igualdades anteriores, se tiene

$$(n+1)^3 - 1^3 = 3(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)+3(1+2+3+\cdots+n)+n$$

De donde, $\quad = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + n$

$$\begin{aligned}3\sum_{k=1}^{n} k^2 &= (n+1)^3 - 1 - 3\sum_{k=1}^{n} k - n\\ &= (n+1)^3 - \frac{3}{2}n(n+1) - (n+1)\\ &= \frac{2}{2}(n+1)^3 - \frac{3}{2}n(n+1) - \frac{2}{2}(n+1)\\ &= \frac{1}{2}(n+1)[2(n+1)^2 - 3n - 2]\\ &= \frac{1}{2}(n+1)(2n^2+n)\\ &= \frac{1}{2}n(n+1)(2n+1).\end{aligned}$$

Por tanto, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

Unidad 2

Potenciación y Funciones Exponenciales

Sección 1: Potenciación y radicación

Contenido 1: Definición de potencia con base racional y exponente un número natural

P

Escriba en el espacio en blanco el número que hace verdadera la expresión.

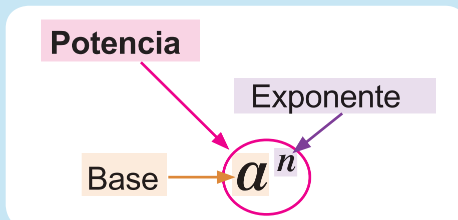
a) $(2)(2) = 2^{\square}$ b) $(2)(2)(2) = 2^{\square}$ c) $(2)(2)(2)(2)(2)(2)(2) = 2^{\square}$

S

a) $(2)(2) = 2^2$ b) $(2)(2)(2) = 2^3$ c) $(2)(2)(2)(2)(2)(2)(2) = 2^7$

C

Si n es un número natural, entonces: $\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots a}_{n\text{-veces}} = a^n$



Potenciación es la operación que consiste en repetir como factor un número llamado **base**, tantas veces como lo indique el **exponente**. Una expresión del tipo a^n se llama **potencia**.

E1

Exprese los siguientes productos en la forma a^n :

a) $(3)(3)(3)$ b) $(4)(4)(4)(4)$ c) $(10)(10)(10)(10)(10)$

d) $(1{,}2)(1{,}2)$ e) $\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)$

Ejemplo Calcule el valor de las siguientes expresiones:

a) 5^3 b) $(-5)^2$ c) $(-2)^3$

a) $5^3 = (5)(5)(5) = \mathbf{125}$

b) $(-5)^2 = (-5)(-5) = \mathbf{25}$

c) $(-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = \mathbf{-8}$

Cuando la base a es positiva, a^n es positiva.

Si la base a es negativa $\begin{cases} a^n \text{ es positivo si } n \text{ es par} \\ a^n \text{ es negativo si } n \text{ es impar} \end{cases}$

E2

Calcule el valor de las siguientes expresiones:

a) 3^5 b) $(-2)^4$ c) $(-3)^3$ d) $(0{,}2)^2$ e) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$

Contenido 2: Propiedades de la potenciación con exponente un número natural

P

Exprese los productos y divisiones indicadas como una sola potencia y establezca una relación entre los exponentes.

a) $a^2 \cdot a^5$ b) $(a^2)^5$ c) $(ab)^3$ d) $a^5 \div a^3$

S

a) $a^2 \cdot a^5 = \underbrace{\underbrace{(a \cdot a)}_{2\text{ veces}}\underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a)}_{5\text{ veces}}}_{7\text{ veces}} = a^7$ Se observa $a^2 \cdot a^5 = a^{2+5}$

b) $(a^2)^5 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = \underbrace{\underbrace{(a \cdot a)}_{2\text{ veces}}\underbrace{(a \cdot a)}_{2\text{ veces}}\underbrace{(a \cdot a)}_{2\text{ veces}}\underbrace{(a \cdot a)}_{2\text{ veces}}\underbrace{(a \cdot a)}_{2\text{ veces}}}_{10\text{ veces}} = a^{10}$ Se observa $(a^2)^5 = a^{(2)(5)}$

c) $(ab)^3 = (ab)(ab)(ab) = (a \cdot a \cdot a)(b \cdot b \cdot b) = a^3\, b^3$

d) $a^5 \div a^3 = a^5 \cdot \dfrac{1}{a^3} = \dfrac{a^5}{a^3} = \dfrac{a \cdot a \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}}{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}} = a^2$ Se observa $a^5 \div a^3 = a^{5-3}$

C

Propiedades de la potenciación

Si $a \neq 0$, $b \neq 0$ y m, n son números naturales;

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

2) $(a^m)^n = a^{mn}$

3) $(ab)^n = a^n b^n$

4) $a^m \div a^n = a^{m-n}$ (si $m > n$)

Ejemplo Aplique las propiedades de potenciación según corresponda.

a) $a^7 \cdot a^4$ b) $(a^2)^6$ c) $(ab)^2$ d) $a^6 \div a^4$

a) $a^7 \cdot a^4 = a^{7+4} = a^{11}$

b) $(a^2)^6 = a^{(2)(6)} = a^{12}$

c) $(ab)^2 = a^2\, b^2$

d) $a^6 \div a^4 = a^{6-4} = a^2$

E

Aplique las propiedades de la potenciación según corresponda.

a) $a^4 \cdot a^3$

b) $a^4 \cdot a$

c) $(a^5)^4$

d) $(a^4)^2$

e) $(ab)^5$

f) $(a^2\, b)^3$

g) $a^6 \div a^2$

h) $a^3 \div a^2$

Contenido 3: Potencia con exponente cero o número negativo y base un número racional

P

Calcule los valores de las siguientes potencias:

a) 2^3 b) 2^0 c) 2^{-1} d) 2^{-2}

S

Se observa en el dibujo que las potencias de 2 con exponente positivo se encuentran multiplicando por 2 sucesivamente; para las potencias con exponentes negativos se multiplica sucesivamente por $\frac{1}{2}$.

$$\begin{tikzcd}
\cdots\, 2^{-2} \arrow[r, bend left, "\times 2"] \arrow[d, equal] & 2^{-1} \arrow[r, bend left, "\times 2"] \arrow[d, equal] & 2^{0} \arrow[r, bend left, "\times 2"] \arrow[d, equal] & 2^{1} \arrow[r, bend left, "\times 2"] \arrow[d, equal] & 2^{2} \arrow[r, bend left, "\times 2"] \arrow[d, equal] & 2^{3} \arrow[r, bend left, "\times 2"] \arrow[d, equal] & 2^{4}\, \cdots \arrow[d, equal] \\
\mathbf{\frac{1}{4}} & \mathbf{\frac{1}{2}} \arrow[l, bend left, "\times\frac{1}{2}"] & \mathbf{1} \arrow[l, bend left, "\times\frac{1}{2}"] & \mathbf{2} \arrow[l, bend left, "\times\frac{1}{2}"] & \mathbf{4} \arrow[l, bend left, "\times\frac{1}{2}"] & \mathbf{8} \arrow[l, bend left, "\times\frac{1}{2}"] & \mathbf{16} \arrow[l, bend left, "\times\frac{1}{2}"]
\end{tikzcd}$$

Por lo dicho anteriormente,

a) $2^3 = \mathbf{8}$ b) $2^0 = \mathbf{1}$ c) $2^{-1} = \mathbf{\frac{1}{2}}$ d) $2^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \mathbf{\frac{1}{4}}$

C

Si $a \neq 0$ y n es un número natural, entonces

1) $a^0 = 1$ 2) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Ejemplo

Calcule los valores de las siguientes potencias:

a) 5^0 b) 3^{-2}

a) $5^0 = \mathbf{1}$ b) $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \mathbf{\frac{1}{9}}$

E

Calcule los valores de las siguientes potencias:

a) 3^0 b) 4^0

c) $\left(-\frac{1}{2}\right)^0$ d) 5^{-1}

e) 4^{-2} f) $(-2)^{-3}$

Contenido 4: Propiedades de una potencia cuando el exponente es un número entero

P

Exprese los productos y división indicados como una sola potencia y establezca relaciones entre los exponentes, si $a \neq 0$ y $b \neq 0$.

a) $a^3 \cdot a^{-2}$ b) $(a^3)^{-2}$ c) $(ab)^{-2}$ d) $a^{-3} \div a^{-5}$

S

a) $a^3 \cdot a^{-2} = a^3 \cdot \frac{1}{a^2} = \frac{a^3}{a^2} = a^{3-2} = a^1 = a$ Se observa $a^3 \cdot a^{-2} = a^{3+(-2)}$

b) $(a^3)^{-2} = \frac{1}{(a^3)^2} = \frac{1}{a^6} = a^{-6}$ Se observa $(a^3)^{-2} = a^{(3)(-2)}$

c) $(ab)^{-2} = \frac{1}{(ab)^2} = \frac{1}{a^2 b^2} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{b^2} = a^{-2} b^{-2}$

d) $a^{-3} \div a^{-5} = \frac{1}{a^3} \div \frac{1}{a^5} = \frac{1}{a^3} \cdot \frac{a^5}{1} = \frac{a^5}{a^3} = a^2$ Se observa $a^{-3} \div a^{-5} = a^{-3-(-5)}$

C

Propiedades de la potenciación cuando el exponente es un número entero

Si $a \neq 0$, $b \neq 0$ y m, n son números enteros, entonces:

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ 2) $(a^m)^n = a^{mn}$ 3) $(ab)^n = a^n b^n$ 4) $a^m \div a^n = a^{m-n}$

E1

Aplique la propiedad de potenciación según corresponda, si $a \neq 0$, $b \neq 0$.

a) $a^5 \cdot a^{-2}$ b) $(a^2)^{-3}$ c) $(ab)^{-3}$ d) $a^2 \div a^4$ e) $(a^{-2} b^4)^5$

Ejemplo Calcule el valor de las siguientes expresiones:

a) $(5^5)(5^{-3})$ b) $(3^2)^{-3}$ c) $(5^{-2})^0$ d) $2^3 \div 2^5$

a) $(5^5)(5^{-3}) = 5^{5+(-3)} = 5^2 = \mathbf{25}$

b) $(3^2)^{-3} = 3^{(2)(-3)} = 3^{-6} = \frac{1}{3^6} = \mathbf{\frac{1}{729}}$

c) $(5^{-2})^0 = 5^{(-2)(0)} = 5^0 = \mathbf{1}$

d) $2^3 \div 2^5 = 2^{3-5} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \mathbf{\frac{1}{4}}$

E2

Calcule el valor de las siguientes expresiones:

a) $(2^5)(2^{-2})$ b) $(3^{-1})^4$

c) $3^4 \div 3^7$ d) $(10^{-5})(10^2)$

e) $(7^{-4})^0$

Contenido 5: Raíz enésima y la relación entre potenciación y radicación

P

a) Calcule el valor de $\sqrt{4}$.

b) Reescriba las igualdades $2^3 = 8$ y $3^4 = 81$ utilizando radicales.

S

a) $\sqrt{4} = 2$, porque $2^2 = 4$. Se lee "la raíz cuadrada de 4 es 2".

b) $\sqrt[3]{8} = 2$ por que $2^3 = 8$ y se lee "la raíz cúbica de 8 es 2".

$\sqrt[4]{81} = 3$ por que $3^4 = 81$ y se lee "la raíz cuarta de 81 es 3".

C

Relación entre potenciación y radicación

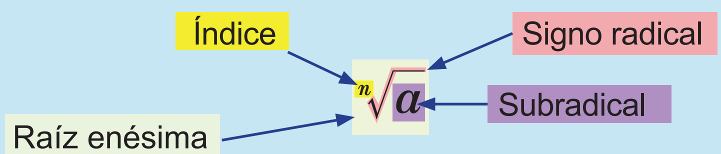
Potenciación **Radicación**

$b^n = a$ si y solo si $b = \sqrt[n]{a}$

En el caso $n = 2$ se omite el índice de la raíz cuadrada

$\sqrt[2]{a}$ se escribe $\sqrt{a}$

Elementos de la raíz enésima:



Se dice que b es raíz enésima de a si y solo si $b^n = a$. Es decir, $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

Al sustituir b por $\sqrt[n]{a}$ en $b^n = a$:

$(\sqrt[n]{a})^n = a$

Ejemplo Observe la relación entre potenciación y radicación en la siguiente tabla:

Potenciación	Radicación	La radicación se lee
$2^6 = 64$	$2 = \sqrt[6]{64}$	Dos es igual a la **raíz sexta** de sesenta y cuatro
$(-2)^5 = -32$	$-2 = \sqrt[5]{-32}$	Menos dos es igual a la **raíz quinta** de menos treinta y dos

E

Complete la tabla utilizando la relación entre potenciación y radicación.

Potenciación	Radicación	La radicación se lee
$2^4 = 16$		
$3^2 = 9$		
$(-3)^3 = -27$		
	$3 = \sqrt[4]{81}$	

Contenido 6: Simplificación de radicales

P

Calcule los valores de los siguientes radicales:

a) $\sqrt[4]{16}$ b) $-\sqrt[4]{16}$ c) $\sqrt[3]{8}$ d) $\sqrt[3]{-8}$

S

a) $16 = 2^4$, así que $\sqrt[4]{16} = \mathbf{2}$.
Al sustituir 16 por 2^4 se obtiene $\sqrt[4]{2^4} = 2$

b) Utilizando la respuesta de a), $\sqrt[4]{16} = 2$, luego $-\sqrt[4]{16} = \mathbf{-2}$.

c) La igualdad $8 = 2^3$ implica que $\sqrt[3]{8} = \mathbf{2}$.
Al sustituir 8 por 2^3 se obtiene $\sqrt[3]{2^3} = 2$.

d) De la igualdad $-8 = (-2)^3$ se tiene que $\sqrt[3]{-8} = \mathbf{-2}$ y sustituyendo -8 por $(-2)^3$ resulta $\sqrt[3]{(-2)^3} = -2$.

C

En el caso en el que el índice de la raíz es igual al exponente del subradical se cumple que

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

Ejemplo Calcule el valor de $\sqrt[5]{32}$.

$\sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$

E

Calcule los valores de los siguientes radicales:

a) $\sqrt[4]{81}$

b) $-\sqrt[4]{81}$

c) $\sqrt[3]{125}$

d) $\sqrt[3]{-27}$

e) $\sqrt[3]{1000}$

f) $-\sqrt[4]{10000}$

Contenido 7: Multiplicación de radicales de igual índice

Repaso

Escriba en el recuadro el número que hace verdadera la igualdad.

$(\sqrt{2})(\sqrt{3}) = \sqrt{\square}$

Utilizando la propiedad de la raíz cuadrada, $(\sqrt{a})(\sqrt{b}) = \sqrt{ab}$, se tiene que

$(\sqrt{2})(\sqrt{3}) = \sqrt{(2)(3)} = \sqrt{6}$

En el caso de la raíz enésima se cumplen las mismas propiedades de la raíz cuadrada, siendo una de estas la siguiente:

C

Propiedad de la raíz enésima:

Si $a>0$, $b>0$ y n un número entero positivo, entonces:

$$(\sqrt[n]{a})(\sqrt[n]{b}) = \sqrt[n]{ab}$$

Ejemplo Calcule los valores de los siguientes productos de radicales:

a) $(\sqrt[3]{9})(\sqrt[3]{3})$ b) $(\sqrt[6]{2})(\sqrt[6]{32})$ c) $(\sqrt[5]{125})(\sqrt[5]{25})$

a) $(\sqrt[3]{9})(\sqrt[3]{3}) = \sqrt[3]{(9)(3)} = \sqrt[3]{(3^2)(3^1)} = \sqrt[3]{3^{2+1}} = \sqrt[3]{3^3} = 3$

b) $(\sqrt[6]{2})(\sqrt[6]{32}) = \sqrt[6]{(2)(32)} = \sqrt[6]{(2^1)(2^5)} = \sqrt[6]{2^{1+5}} = \sqrt[6]{2^6} = 2$

c) $(\sqrt[5]{125})(\sqrt[5]{25}) = \sqrt[5]{(125)(25)} = \sqrt[5]{(5^3)(5^2)} = \sqrt[5]{5^{3+2}} = \sqrt[5]{5^5} = 5$

E

Calcule los valores de los siguientes productos de radicales:

a) $(\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{4})$

b) $(\sqrt[3]{5})(\sqrt[3]{25})$

c) $(\sqrt[4]{3})(\sqrt[4]{27})$

d) $(\sqrt[5]{27})(\sqrt[5]{9})$

e) $(\sqrt[7]{16})(\sqrt[7]{8})$

Contenido 8: División de radicales de igual índice y propiedades de los radicales

Repaso

Escriba en los recuadros los números que hacen verdaderas las tres igualdades.

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\square}{\square}} = \sqrt{\square}$$

Utilizando la propiedad de la raíz cuadrada $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$, se tiene $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{6}{2}} = \sqrt{3}$

La raíz enésima cumple las mismas propiedades de la raíz cuadrada, siendo una de ellas la siguiente:

C1

Propiedad de los radicales

Si $a>0$, $b>0$ y n es un número natural, entonces

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Ejemplo 1 Calcule los valores de los siguientes cocientes de radicales:

a) $\frac{\sqrt[3]{189}}{\sqrt[3]{7}}$ b) $\frac{\sqrt[5]{5}}{\sqrt[5]{160}}$

a) $\frac{\sqrt[3]{189}}{\sqrt[3]{7}} = \sqrt[3]{\frac{189}{7}} = \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$

b) $\frac{\sqrt[5]{5}}{\sqrt[5]{160}} = \sqrt[5]{\frac{\cancel{5}^{1}}{\cancel{160}_{32}}} = \sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \sqrt[5]{\frac{1}{2^5}} = \sqrt[5]{\left(\frac{1}{2}\right)^5} = \frac{1}{2}$

E1

Calcule los valores de los siguientes cocientes de radicales:

a) $\frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}}$ b) $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}$ c) $\frac{\sqrt[3]{128}}{\sqrt[3]{2}}$ d) $\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{162}}$ e) $\frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{486}}$

C2

Propiedades de los radicales

Si $a>0$, m, n son números naturales, entonces

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a} \qquad \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Ejemplo 2 Calcule los valores de las siguientes expresiones:

a) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$ b) $\left(\sqrt[4]{16}\right)^2$

a) $\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[(3)(2)]{64} = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$

b) $\left(\sqrt[4]{16}\right)^2 = \sqrt[4]{16^2} = \sqrt[4]{(4^2)^2} = \sqrt[4]{4^{(2)(2)}} = \sqrt[4]{4^4} = 4$

E2

Calcule los valores de las siguientes expresiones:

a) $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$ b) $\sqrt[3]{\sqrt{729}}$ c) $\left(\sqrt[6]{27}\right)^2$

Contenido 9: Potencias con exponentes racionales (1)

P

Exprese $\sqrt[3]{a^2}$ en forma de potencia con base a y exponente racional.

S

Recuerde:
$(a^m)^n = a^{mn}$
$(\sqrt[n]{a})^n = a$

Al sustituir $n=\frac{2}{3}$ y $m=3$ en $(a^n)^m=a^{nm}$, resulta:

$$\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^3 = a^{\left(\frac{2}{3}\right)(3)} = a^2 \qquad ①$$

La sustitución de $n=3$ en $(\sqrt[n]{a})^n=a$, da lugar a $(\sqrt[3]{a})^3=a$ y si se reemplaza en esta última igualdad a por a^2 se obtiene:

$$\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^3 = a^2 \qquad ②$$

El lado derecho en ① y en ② es a^2, así que

$$\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^3 = \left(\sqrt[3]{a^2}\right)^3$$
$$a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$$

Recuerde:
$b^n = a$ si y solo si $b=\sqrt[n]{a}$

Es decir, $\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$

C

Si $a>0$, m es entero y n es un número natural, entonces

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

En el caso de $m=1$ se obtiene:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Ejemplo Convierta las siguientes expresiones de la forma radical a potencia o viceversa:

a) $a^{\frac{2}{3}}$ b) $a^{-\frac{3}{5}}$ c) $\sqrt[6]{a}$ d) $\sqrt[5]{a^3}$

a) $a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$ b) $a^{-\frac{3}{5}} = \frac{1}{a^{\frac{3}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{a^3}}$ c) $\sqrt[6]{a} = a^{\frac{1}{6}}$ d) $\sqrt[5]{a^3} = a^{\frac{3}{5}}$

E

Convierta las siguientes expresiones de la forma radical a potencia o viceversa:

a) $a^{\frac{3}{5}}$ b) $a^{\frac{1}{4}}$

c) $a^{\frac{5}{2}}$ d) $a^{\frac{3}{4}}$

e) $a^{-\frac{2}{3}}$ f) $\sqrt[4]{a}$

g) $\sqrt{a^3}$ h) $\sqrt[7]{a^4}$

i) $\sqrt[5]{a^4}$ j) $\sqrt[3]{a^8}$

Contenido 10: Potencias con exponentes racionales (2)

Ejemplo Calcule los valores de las siguientes potencias con exponentes racionales:

a) $4^{\frac{1}{2}}$ b) $8^{\frac{1}{3}}$ c) $27^{\frac{2}{3}}$ d) $25^{-\frac{1}{2}}$

Se procede con los cálculos haciendo uso de las propiedades de los radicales.

a) $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = \sqrt{2^2} = \mathbf{2}$

Otra forma de resolver este ejercicio es la siguiente:

$$4^{\frac{1}{2}} = (2^2)^{\frac{1}{2}} = 2^{(2)\left(\frac{1}{2}\right)} = \mathbf{2}$$

b) En este caso se utiliza la descomposición prima de 8 y las propiedades de los radicales.

$$8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$$

De otra forma $8^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2^{(3)\left(\frac{1}{3}\right)} = 2$

c) De nuevo se necesita usar la descomposición en factores primos y las propiedades de los radicales.

$$27^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^2} = \sqrt[3]{(3^3)^2} = \sqrt[3]{(3^2)^3} = 3^2 = \mathbf{9}$$

Análogamente, $27^{\frac{2}{3}} = (3^3)^{\frac{2}{3}} = 3^{(3)\left(\frac{2}{3}\right)} = 3^2 = 9$

d) $25^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{25^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{25}} = \mathbf{\dfrac{1}{5}}$

O de manera equivalente, $25^{-\frac{1}{2}} = \left(\dfrac{1}{25}\right)^{\frac{1}{2}} = \left[\left(\dfrac{1}{5}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left(\dfrac{1}{5}\right)^{(2)\left(\frac{1}{2}\right)} = \dfrac{1}{5}$

E

Calcule los valores de las siguientes potencias con exponentes racionales:

a) $9^{\frac{1}{2}}$

b) $16^{\frac{1}{4}}$

c) $64^{\frac{2}{3}}$

d) $125^{-\frac{1}{3}}$

Contenido 11: Potencias con exponentes racionales (3)

Ejemplo Calcule los valores de las siguientes expresiones:

a) $(2^{\frac{4}{3}})(16^{\frac{1}{6}})$ b) $\sqrt{27} \div \sqrt[6]{27}$ c) $\sqrt[3]{3}(\sqrt{3}) \div \sqrt[6]{243}$

a) $(2^{\frac{4}{3}})(16^{\frac{1}{6}}) = (2^{\frac{4}{3}})(2^4)^{\frac{1}{6}}$ Se expresa 16 como una potencia de 2

$= (2^{\frac{4}{3}})(2^{\frac{2}{3}})$ Se eleva una potencia a un exponente

$= 2^{\frac{4}{3}+\frac{2}{3}}$ Se multiplican potencias

$= 2^{\frac{6}{3}}$ Se efectúa la suma indicada de exponentes

$= 2^2$

$= 4$

b) $\sqrt{27} \div \sqrt[6]{27} = 27^{\frac{1}{2}} \div 27^{\frac{1}{6}}$ Se expresan los radicales como potencias

$= (3^3)^{\frac{1}{2}} \div (3^3)^{\frac{1}{6}}$ Se expresa 27 como una potencia de 3

$= 3^{\frac{3}{2}} \div 3^{\frac{1}{2}}$ Se eleva una potencia a un exponente

$= 3^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}$ Se efectúa la división de potencia

$= 3^1$

$= 3$ Se aplica la propiedad $a^1 = a$

c) $\sqrt[3]{3}(\sqrt{3}) \div \sqrt[6]{243} = (3^{\frac{1}{3}})(3^{\frac{1}{2}}) \div (3^5)^{\frac{1}{6}}$ Se expresan los radicales como potencia

$= (3^{\frac{1}{3}})(3^{\frac{1}{2}}) \div 3^{\frac{5}{6}}$ Se eleva una potencia a un exponente

$= 3^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{5}{6}}$ Se efectúa el producto y la división de potencias

$= 3^0$

$= 1$ Se aplica la propiedad $a^0 = 1$

E

Calcule los valores de las siguientes expresiones:

a) $(3^{\frac{2}{3}})(3^{\frac{1}{3}})$

b) $\sqrt[3]{81} \div \sqrt[6]{9}$

c) $(\sqrt[6]{25})(\sqrt[3]{25})$

d) $\sqrt[3]{3}(\sqrt{243}) \div 3^{\frac{5}{6}}$

Contenido 12: Comprobemos lo aprendido 1

1. Escriba cada producto en forma de potencia.

a) $(7)(7)(7)(7)$

b) $(0,3)(0,3)(0,3)(0,3)$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$

2. Calcule el valor de las siguientes expresiones:

a) 8^3

b) $(-3)^4$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^2$

d) 3^0

e) $(-2)^0(-3)^0$

f) 4^{-3}

g) $(-5)^{-3}$

h) $(-0,1)^{-2}$

3. Calcule el valor de las siguientes expresiones:

a) $\sqrt{64}$

b) $\sqrt[3]{729}$

c) $(\sqrt[4]{16})^2$

d) $(\sqrt[4]{8})(\sqrt[4]{2})$

e) $\sqrt[12]{8^4}$

4. Calcule el valor de las siguientes expresiones:

a) $64^{\frac{3}{2}}$

b) $27^{\frac{4}{3}}$

c) $(25^{\frac{2}{3}})(40^{\frac{2}{3}})$

d) $(3^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$

5. Calcule el valor de las siguientes expresiones:

a) $(\sqrt[4]{25})(\sqrt[12]{25}) \div \sqrt[3]{25}$

b) $(8^{-\frac{2}{3}})(4^{\frac{3}{2}}) \div 2$

Sección 2: Funciones exponenciales

Contenido 1: Gráfica de la función exponencial creciente

P

Dada la siguiente tabla de valores asociada a la función $y = 2^x$, realice lo siguiente:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{8}$			1			8
Punto	$A\left(-3, \frac{1}{8}\right)$	$B(-2,\ \ )$	$C(-1,\ \ )$	$D(0, 1)$	$E(1,\ \ )$	$F(2,\ \ )$	$G(3, 8)$

a) Complete las casillas vacías y los pares.

b) Ubique los puntos A, B, C, D, E, F y G en el plano cartesiano.

c) Trace una curva suave sobre la trayectoria que indican los puntos y prolónguela más allá de A y G.

S

a) Se calculan los valores de y para $x = -2, -1, 1$ y 2.

Para $x = -2$; $y = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

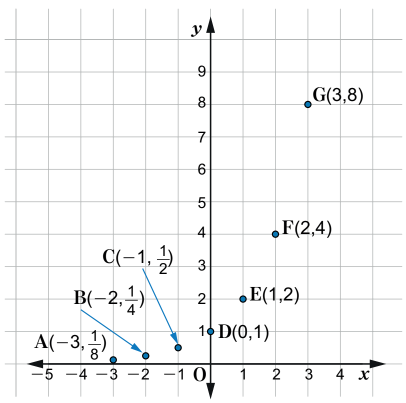
Para $x = -1$; $y = 2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$

Para $x = 1$; $y = 2^1 = 2$

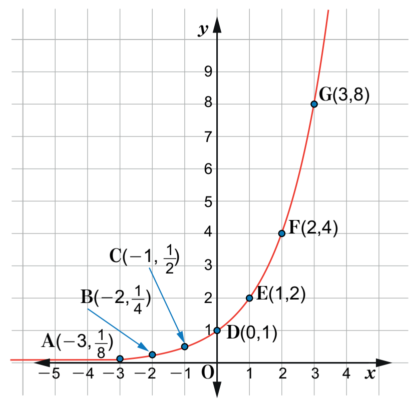
Para $x = 2$; $y = 2^2 = 4$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{8}$	$\mathbf{\frac{1}{4}}$	$\mathbf{\frac{1}{2}}$	1	**2**	**4**	8
Punto	$A\left(-3, \frac{1}{8}\right)$	$B\left(-2, \mathbf{\frac{1}{4}}\right)$	$C\left(-1, \mathbf{\frac{1}{2}}\right)$	$D(0, 1)$	$E(1, \mathbf{2})$	$F(2, \mathbf{4})$	$G(3, 8)$

b) Se ubican los puntos en el plano cartesiano



c) Se unen los puntos con una curva suave



E

Dada la siguiente tabla de valores asociada a la función $y = 3^x$, realice lo siguiente:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{27}$			1			27
Punto	$A\left(-3, \frac{1}{27}\right)$	$B(-2,\ \ )$	$C(-1,\ \ )$	$D(0, 1)$	$E(1,\ \ )$	$F(2,\ \ )$	$G(3, 27)$

a) Complete las casillas vacías y los pares.

b) Ubique los puntos B, C, D, E y F en el plano cartesiano.

c) Una los puntos con una curva suave.

Contenido 2: Gráfica de la función exponencial decreciente

P

Dada la siguiente tabla de valores asociada a la función $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, realice lo siguiente:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	8			1			$\frac{1}{8}$
Punto	$A(-3, 8)$	$B(-2, \quad)$	$C(-1, \quad)$	$D(0, 1)$	$E(1, \quad)$	$F(2, \quad)$	$G\left(3, \frac{1}{8}\right)$

a) Complete las casillas vacías y los pares.
b) Ubique los puntos A, B, C, D, E, F y G en el plano cartesiano.
c) Trace una curva suave sobre la trayectoria que indican los puntos y prolónguela más allá de A y G.

S

a) Se calculan los valores de y para $x = -2, -1, 1$ y 2.

Para $x = -2$; $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = (2^{-1})^{-2} = 2^2 = 4$

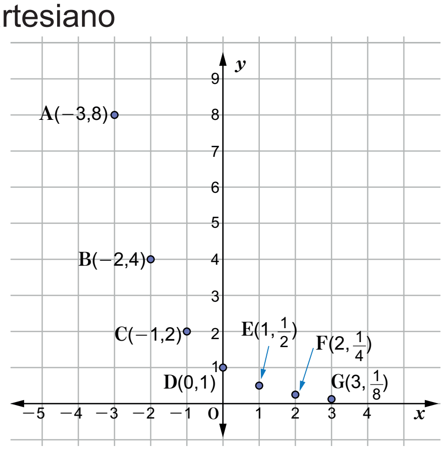
Para $x = -1$; $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = (2^{-1})^{-1} = 2^1 = 2$

Para $x = 1$; $y = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$

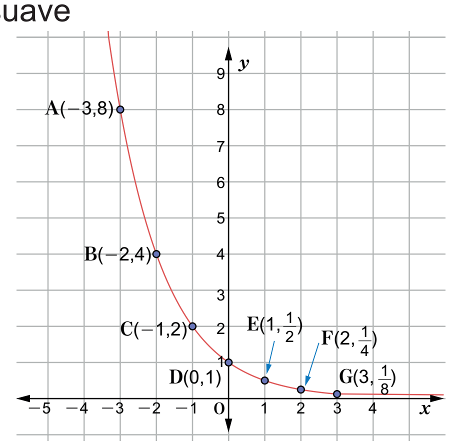
Para $x = 2$; $y = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	8	**4**	**2**	1	$\mathbf{\frac{1}{2}}$	$\mathbf{\frac{1}{4}}$	$\frac{1}{8}$
Punto	$A(-3, 8)$	$B(-2, \mathbf{4})$	$C(-1, \mathbf{2})$	$D(0, 1)$	$E\left(1, \mathbf{\frac{1}{2}}\right)$	$F\left(2, \mathbf{\frac{1}{4}}\right)$	$G\left(3, \frac{1}{8}\right)$

b) Se ubican los puntos en el plano cartesiano



c) Se unen los puntos con una curva suave



E

Dada la siguiente tabla de valores asociada a la función $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, realice lo siguiente:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	27			1			$\frac{1}{27}$
Punto	$A(-3, 27)$	$B(-2, \quad)$	$C(-1, \quad)$	$D(0, 1)$	$E(1, \quad)$	$F(2, \quad)$	$G\left(3, \frac{1}{27}\right)$

a) Complete las casillas vacías y los pares.
b) Ubique los puntos B, C, D, E y F en el plano cartesiano.
c) Una los puntos con una curva suave.

Contenido 3: Gráfica y propiedades de la función exponencial creciente

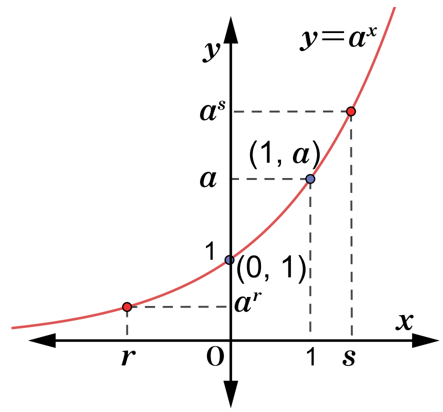
Propiedades de la gráfica de $y=a^x$, $a>1$:

1. La gráfica pasa por los puntos (0, 1) y (1, a), ya que $a^0=1$ y $a^1=a$.
2. El eje x es asíntota horizontal, es decir la gráfica no toca a la parte negativa de este eje, aunque se acerca indefinidamente a este.

Observando la gráfica se concluye que esta es creciente, es decir, si $r<s$, entonces $a^r<a^s$.

3. Dominio: números reales

   Rango: números reales positivos.



Asíntota de la gráfica de una función es una línea recta a la que se aproxima continuamente la gráfica de tal función.

P Escriba $<$ o $>$ en el espacio en blanco: 2^3 $\square$ 2^5

S

2^3 $\boxed{<}$ 2^5 Dado que la base es $2\,(2>1)$, sucede que $3<5$ implica $2^3<2^5$.

E1

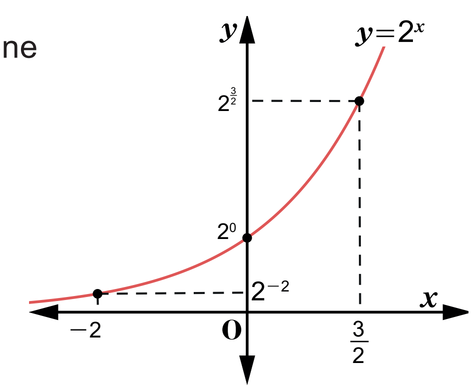
Escriba $<$ o $>$ en el espacio en blanco, según corresponda:

a) 2^2 $\square$ 2^3 b) 3^5 $\square$ 3^7 c) 4^3 $\square$ 4^2

Ejemplo Ordene la siguiente secuencia numérica de forma creciente: 2^{-2}, $2^{\frac{3}{2}}$, 2^0.

Dado que la base es 2 $(2>1)$, de $-2<0<\frac{3}{2}$, se obtiene

$$\mathbf{2^{-2}<2^0<2^{\frac{3}{2}}}$$



E2

Ordene las siguientes secuencias numéricas de forma creciente:

a) $2^{-3}, 2^{\frac{1}{2}}, 2^2$ b) $5^{\frac{1}{2}}, 5^{-1}, 5^2$

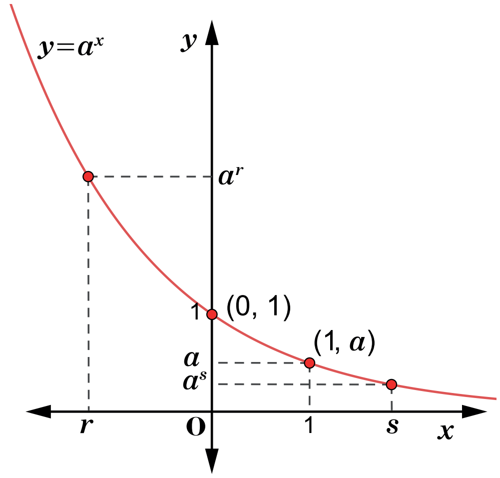
Contenido 4: Gráfica y propiedades de la función exponencial decreciente

Propiedades de la gráfica de $y=a^x$, $0<a<1$:

1. La gráfica pasa por los puntos (0, 1) y (1, a), ya que $a^0=1$ y $a^1=a$.
2. El eje x es asíntota horizontal, es decir la gráfica no toca a la parte positiva de este eje, aunque se acerca indefinidamente a este.

Observando la gráfica se concluye que esta es decreciente, es decir, si $r<s$, entonces $a^r>a^s$.

3. Dominio: números reales
   Rango: números reales positivos.



P

Escriba $<$ o $>$ en el espacio en blanco: $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \square \left(\frac{1}{2}\right)^5$

S

$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \boxed{>} \left(\frac{1}{2}\right)^5$

Como la base es $\frac{1}{2}\left(0<\frac{1}{2}<1\right)$, sucede que $3<5$ implica que $\left(\frac{1}{2}\right)^3>\left(\frac{1}{2}\right)^5$.

E1

Escriba $<$ o $>$ en el espacio en blanco:

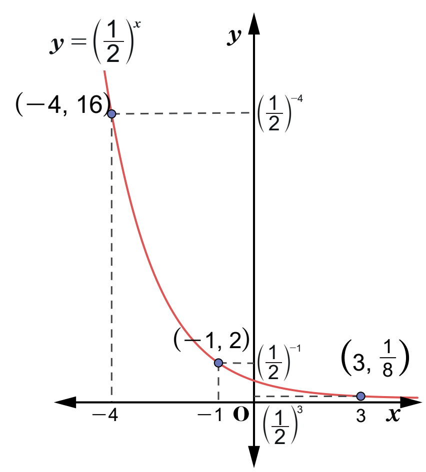
a) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \square \left(\frac{1}{2}\right)^6$ b) $\left(\frac{1}{3}\right)^2 \square \left(\frac{1}{3}\right)^4$ c) $\left(\frac{1}{4}\right)^3 \square \left(\frac{1}{4}\right)^2$

Ejemplo Ordene la siguiente secuencia numérica de forma creciente: $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{3}$

Como la base es $\frac{1}{2}\left(0<\frac{1}{2}<1\right)$,

y $-4<-1<3$, entonces

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3<\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}<\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$$



E2

Ordene las siguientes secuencias numéricas de manera creciente:

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{3}$ b) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$, $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$, $\left(\frac{1}{5}\right)^{2}$

Contenido 5: Ecuaciones exponenciales (1)

Propiedad

Dos potencias a^p y a^q, con $a \neq 0, 1, -1$, son iguales si y solo si $p = q$.
En símbolos,

$$a^p = a^q \text{ si y solo si } p = q$$

Potencia

exponente

base → a^p

P

Encuentre la solución de cada ecuación exponencial.

a) $2^x = 8$ b) $3^{2x} = 9$ c) $7^{-x} = \frac{1}{49}$

S

a) $2^x = 8$ — Se descompone 8 en factores para obtener potencias con igual base

$x = 3$ — Se usa la propiedad $a^p = a^q$ implica $p = q$

Descomposición de 8 en factores

8	2
4	2
2	2
1	

$8 = (2)(2)(2) = 2^3$

b) $3^{2x} = 9$ — Se descompone 9 en factores para obtener

$3^{2x} = 3^2$ — potencias con igual base

$2x = 2$ — Se usa la propiedad $a^p = a^q$ implica $p = q$

$\frac{2x}{2} = \frac{2}{2}$ — Se resuelve la ecuación de primer grado

$x = 1$

Descomposición de 9 en factores

9	3
3	3
1	

$9 = (3)(3) = 3^2$

c) $7^{-x} = \frac{1}{49}$ — Se descompone 49 en factores para obtener potencias con igual base

$7^{-x} = \frac{1}{7^2}$

$7^{-x} = 7^{-2}$ — Se utiliza la propiedad $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$

$-x = -2$ — Se usa la propiedad $a^p = a^q$ implica $p = q$

$x = 2$

E

Encuentre las soluciones de las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $3^x = 9$

b) $2^{2x} = 16$

c) $5^{2x} = 125$

d) $2^x = \frac{1}{32}$

e) $6^{-x} = \frac{1}{216}$

Contenido 6: Ecuaciones exponenciales (2)

P

Encuentre las soluciones de las ecuaciones exponenciales.

a) $9^{2x} = 81$ b) $64^{x} = 4^{4x+1}$ c) $125^{x-1} = 25^{x+3}$

S

a)

$9^{2x} = 81$

$(3^2)^{2x} = 3^4$

Se descomponen 9 y 81 en factores para obtener potencias con la misma base con la misma base 3

$3^{4x} = 3^4$

Se aplica la propiedad $(a^m)^n = a^{mn}$

$4x = 4$

Se usa la propiedad $a^p = a^q$ implica $p = q$

$\frac{4x}{4} = \frac{4}{4}$

Se resuelve la ecuación de primer grado

$\boldsymbol{x=1}$

Otra forma de resolver la ecuación es

Se descompone 81 en factores para obtener potencias de base 9.

$9^{2x} = 81$

$9^{2x} = 9^2$

$2x = 2$

$x = 1$

b)

$64^{x} = 4^{4x+1}$

$(2^6)^{x} = (2^2)^{4x+1}$

Se descomponen 64 y 4 en factores para obtener potencias con la base común 2

$2^{6x} = 2^{2(4x+1)}$

Se aplica la propiedad $(a^m)^n = a^{mn}$

$6x = 8x + 2$

Se usa la propiedad $a^p = a^q$ implica $p = q$

$6x - 8x = 2$

Se resuelve la ecuación de primer grado

$\frac{-2x}{-2} = \frac{2}{-2}$

$\boldsymbol{x=-1}$

c)

$125^{x-1} = 25^{x+3}$

$(5^3)^{x-1} = (5^2)^{x+3}$

Se descomponen 125 y 25 en factores para obtener potencias con la base común 5

$5^{3(x-1)} = 5^{2(x+3)}$

Se aplica la propiedad $(a^m)^n = a^{mn}$

$3(x-1) = 2(x+3)$

Se usa la propiedad $a^p = a^q$ implica $p = q$

$3x - 3 = 2x + 6$

Se resuelve la ecuación de primer grado

$3x - 2x = 6 + 3$

$\boldsymbol{x=9}$

E

Encuentre la solución de cada ecuación exponencial.

a) $4^{2x} = 16$

b) $2^{x+1} = 256$

c) $27^{x} = 3^{2x+3}$

d) $27^{x-1} = 9^{x+3}$

e) $10^{3-x} = 1$

f) $9^{x+1} = \left(\frac{1}{27}\right)^{1-x}$

Contenido 7: Ecuaciones exponenciales (3)

Ejemplo Encuentre la solución de cada ecuación exponencial.

a) $3^{x^2-10}=3^{3x}$ b) $2^{x^2-3x}=16$

a)

$$3^{x^2-10}=3^{3x}$$

$x^2-10=3x$ — Se usa la propiedad $a^p=a^q$ implica $p=q$

$x^2-3x-10=0$ — Se escribe la ecuación en la forma $ax^2+bx+c=0$

$(x-5)(x+2)=0$ — Se resuelve la ecuación de segundo grado con el método de factorización

$x-5=0,\quad x+2=0$

$\mathbf{x=5,\quad x=-2}$

b)

$$2^{x^2-3x}=16$$

$2^{x^2-3x}=2^4$ — Se descompone 16 en factores para obtener potencias con base común 2

$x^2-3x=4$ — Se aplica la propiedad $a^p=a^q$ implica $p=q$

$x^2-3x-4=0$ — Se transpone el 4 al lado izquierdo

$(x-4)(x+1)=0$ — Se resuelve la ecuación de segundo grado con el método de factorización

$x-4=0,\quad x+1=0$

$\mathbf{x=4,\quad x=-1}$

E

Encuentre la solución de cada ecuación exponencial.

a) $2^{x^2-5}=2^{4x}$

b) $3^{x^2-2x}=27$

c) $2^{x^2+6x}=32^{x}$

d) $5^{x^2+2x+4}=125$

e) $9^{x^2}=3^{3x+2}$

Contenido 8: Ecuaciones exponenciales (4)

P

Encuentre la solución de la ecuación $9^x - 3^x - 6 = 0$.

Para encontrar la solución de la ecuación dada se realizan los siguientes pasos:

1. Se expresa la ecuación tomando como variable a 3^x.
2. Se hace un cambio de variable t por 3^x y se escribe la ecuación con t.
3. Se resuelve la ecuación de segundo grado para $t > 0$.
4. Se regresa a la variable original y se escribe la solución.

S

Paso 1:

$9^x - 3^x - 6 = 0$

$(3^2)^x - 3^x - 6 = 0$ Se transpone el 6 al lado izquierdo

$(3^x)^2 - 3^x - 6 = 0$ Se sustituye $(3^2)^x$ por $(3^x)^2$

Paso 2:

$t^2 - t - 6 = 0$ Se realiza el cambio de variable t por 3^x

Paso 3:

$(t-3)(t+2) = 0$ Se factoriza el trinomio

$t - 3 = 0$ o $t + 2 = 0$ Se resuelve la ecuación de segundo grado

$t = 3$, $t = -2$

Como $t > 0$ entonces $t = 3$

Paso 4:

$3^x = 3$ Se regresa a la variable original

$3^x = 3^1$ Se aplica la propiedad que aparece a la derecha

$x = 1$

La solución de la ecuación $9^x - 3^x - 6 = 0$ es $x = 1$.

Propiedad
$a^p = a^q$
es equivalente a $p = q$

E

Encuentre la solución de cada ecuación.

a) $9^x - 2(3^x) - 3 = 0$

b) $9^x - 4(3^x) + 3 = 0$

Contenido 9: Comprobemos lo aprendido 2

E

1. Ordene las secuencias numéricas de manera creciente:

   a) $(3)^{-2}$, $(3)^{-3}$, 3^0

   b) $\left(\frac{1}{5}\right)^4$, $\left(\frac{1}{5}\right)^3$, $\left(\frac{1}{5}\right)^{3,5}$

   c) $\left(\frac{1}{4}\right)^2$, $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$, $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$

2. Encuentre las soluciones de las siguientes ecuaciones exponenciales:

   a) $2^{2x+1} = 4$

   b) $\left(\frac{9}{25}\right)^x = \frac{5}{3}$

   c) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{1}{81}$

   d) $9^{x+1} = \left(\frac{1}{81}\right)^{1-x}$

   e) $16^{1-x} = \left(\frac{1}{64}\right)^{x+1}$

   f) $4^x + 2(2^x) - 8 = 0$

   g) $4^x - 5(2^x) - 24 = 0$

Unidad 3

Logaritmo y Funciones Logarítmicas

Sección 1 Logaritmo

Sección 2 Funciones logarítmicas

Sección 1: Logaritmo

Contenido 1: Definición de logaritmo

Definición

El logaritmo del número $M > 0$ en la base a, con $a > 0$ y $a \neq 1$, es el exponente p al que debe elevarse la base a para obtener el número M. En símbolos

$$\log_{\underset{\text{Base}}{a}} \overset{\text{Argumento}}{M} = \underset{\text{Logaritmo}}{p} \quad \text{si y solo si} \quad M = a^p$$

- $\log_a M = p$ se lee: "p es el logaritmo de M en la base a".
- $\log$ es una abreviatura de la palabra logaritmo.

Ejemplo 1 Convierta de la forma exponencial a la logarítmica o viceversa.

Forma exponencial $M = a^p$	$8 = 2^3$	$81 = 3^4$	$\frac{1}{9} = 3^{-2}$	
Forma logarítmica $\log_a M = p$				$\log_{10} 100 = 2$

Utilizando el hecho de que $a^p = M$ es equivalente a $\log_a M = p$ se completa la tabla dada.

Forma exponencial $M = a^p$	$8 = 2^3$	$81 = 3^4$	$\frac{1}{9} = 3^{-2}$	$100 = 10^2$
Forma logarítmica $\log_a M = p$	$\log_2 8 = 3$	$\log_3 81 = 4$	$\log_3 \frac{1}{9} = -2$	$\log_{10} 100 = 2$

E1 Convierta de la forma exponencial a la logarítmica o viceversa.

Forma exponencial $M = a^p$	$144 = 12^2$	$7 = 7^1$		
Forma logarítmica $\log_a M = p$			$\log_3 9 = 2$	$\log_3 \frac{1}{243} = -5$

Ejemplo 2 Encuentre el valor de x y el de b empleando la definición de logaritmo.

a) $\log_4 x = 2$

b) $\log_b 100 = 2$

Utilizando que $\log_a M = p$ es equivalente a $M = a^p$ se tiene:

a) Se expresa $\log_4 x = 2$ como $x = 4^2$

$x = 16$

b) La ecuación $\log_b 100 = 2$ se lleva a la forma $100 = b^2$

$b = \sqrt{100}$ (base $b > 0$)

$b = \sqrt{10^2} = \mathbf{10}$

E2

Encuentre el valor de x y el de b empleando la definición de logaritmo.

a) $\log_2 x = 2$ b) $\log_3 x = 2$ c) $\log_b 16 = 2$

d) $\log_2 x = -3$ e) $\log_b 25 = 2$ f) $\log_b 10^{-3} = -3$

Contenido 2: Propiedades básicas de los logaritmos (1)

P

Calcule los valores de los siguientes logaritmos:

a) $\log_{10}10^5$ b) $\log_2 1$ c) $\log_3 3$

S

a) Sea $\log_{10}10^5 = p$. Entonces se utiliza la definición de logaritmo y se tiene, en forma exponencial,

$$10^5 = 10^p$$

como ambas potencias con la misma base son iguales, los exponentes son iguales. Por tanto $p = 5$, de donde $\mathbf{\log_{10}10^5 = p = 5}$.

b) Sea $\log_2 1 = p$. Al sustituir 1 por 2^0 se obtiene

$$\log_2 2^0 = p,$$

lo que en forma exponencial se escribe $2^0 = 2^p$. De aquí se obtiene $p = 0$.

Por tanto $\mathbf{\log_2 1 = 0}$.

c) Sea $\log_3 3 = p$. Entonces $3 = 3^p$, es decir $3^1 = 3^p$, de donde $1 = p$.

Por tanto $\mathbf{\log_3 3 = p = 1}$.

C

Propiedades de los logaritmos

Si $a > 0$ y $a \neq 1$, entonces

$\log_a a^p = p$ $\log_a 1 = 0$ $\log_a a = 1$

Ejemplo Encuentre los valores de los siguientes logaritmos:

a) $\log_6 36$ b) $\log_2 \frac{1}{4}$

a) $\log_6 36 = \log_6 6^2 = 2$ b) $\log_2 \frac{1}{4} = \log_2 2^{-2} = -2$

E

Encuentre los valores de los siguientes logaritmos:

a) $\log_2 2^5$ b) $\log_3 1$

c) $\log_7 7$ d) $\log_5 25$

e) $\log_{10} \frac{1}{10}$ f) $\log_3 \sqrt{3}$

Contenido 3: Propiedades básicas de los logaritmos (2)

P

Demuestre que $\log_a 2^3 = 3\log_a 2$.

S

Sea $\log_a 2 = r$. Esto se puede escribir de manera exponencial como

$$2 = a^r$$

Elevando al cubo ambos lados de esta igualdad, se obtiene

$$2^3 = (a^r)^3$$

$$2^3 = a^{3r}$$

Pasando a la forma logarítmica se tiene,

$$\log_a 2^3 = 3r$$

y sustituyendo $r = \log_a 2$, resulta

$$\log_a 2^3 = 3\log_a 2$$

C

Propiedad de los logaritmos

Si $a > 0$, $a \neq 1$, $N > 0$ y k es un número real, entonces,

$$\log_a N^k = k \log_a N$$

Ejemplo Exprese las siguientes expresiones logaritmos en la forma $k \log_a N$.

a) $\log_2 3^4$ b) $\log_3 25$ c) $\log_5 \frac{1}{2}$

Se aplica la propiedad anterior

a) $\log_2 3^4 = 4 \log_2 3$ b) $\log_3 25 = \log_3 5^2 = 2 \log_3 5$ c) $\log_5 \frac{1}{2} = \log_5 2^{-1} = -\log_5 2$

E

Exprese las siguientes expresiones logarítmicas en la forma $k \log_a N$:

a) $\log_3 7^2$

b) $\log_{10} 5^{-2}$

c) $\log_2 9$

d) $\log_5 27$

e) $\log_7 \frac{1}{9}$

Contenido 4: Propiedades básicas de los logaritmos (3)

P

Demuestre que $\log_a(2)(3)=\log_a 2+\log_a 3$.

S

Sea $\log_a 2=r$ y $\log_a 3=s$. De forma exponencial

$$2=a^r \text{ y } 3=a^s$$

Se multiplica lado a lado ambas ecuaciones y se aplica la propiedad $a^m\, a^n=a^{m+n}$ dando como resultado

$$(2)(3)=a^r\, a^s$$

$$(2)(3)=a^{r+s}$$

Se aplica la definición de logaritmo en base a

$$\log_a(2)(3)=r+s$$

Se sustituye $r=\log_a 2$, $s=\log_a 3$. Entonces se obtiene

$$\mathbf{\log_a(2)(3)=\log_a 2+\log_a 3}$$

C

Propiedad de los logaritmos

Si $a>0$, $a\neq 1$, $M>0$ y $N>0$, entonces

$$\mathbf{\log_a MN=\log_a M+\log_a N}$$

Ejemplo

Calcule los valores de las siguientes expresiones logarítmicas, usando la propiedad anterior:

a) $\log_4 8+\log_4 2$

b) $\log_3 10+\log_3\frac{6}{5}+\log_3\frac{9}{4}$

a) $\log_4 8+\log_4 2=\log_4(8)\,(2)$
$=\log_4 16$
$=\log_4 4^2$
$=2$

b) $\log_3 10+\log_3\frac{6}{5}+\log_3\frac{9}{4}=\log_3(10)\left(\frac{6}{5}\right)\left(\frac{9}{4}\right)$
$=\log_3 27$
$=\log_3 3^3$
$=3$

E

Calcule los valores de las siguientes expresiones logarítmicas:

a) $\log_6 12+\log_6 3$

b) $\log_6 2+\log_6 3$

c) $\log_8 32+\log_8 2$

d) $\log_{10} 5+\log_{10} 2$

Contenido 5: Propiedades básicas de los logaritmos (4)

P

Demuestre que $\log_a \frac{2}{3} = \log_a 2 - \log_a 3$

S

Sea $\log_a 2 = r$ y $\log_a 3 = s$. Estas expresiones se escriben de manera exponencial como

$$2 = a^r \quad \text{y} \quad 3 = a^s$$

Se dividen lado a lado estas ecuaciones y se aplica la propiedad $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$,

$$\frac{2}{3} = \frac{a^r}{a^s}$$

$$\frac{2}{3} = a^{r-s}$$

Ahora se aplica logaritmo de base a en ambos lados de la última igualdad

$$\log_a \frac{2}{3} = \log_a a^{r-s} = r - s$$

De lo que resulta $\log_a \frac{2}{3} = r - s$. Finalmente se sustituye $r = \log_a 2$ y $s = \log_a 3$, obteniendo,

$$\log_a \frac{2}{3} = \log_a 2 - \log_a 3.$$

C

Propiedad de los logaritmos
Si $a > 0$, $a \neq 1$, $M > 0$, $N > 0$, entonces

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

Ejemplo Calcule el valor de la siguiente expresión logarítmica:

$\log_4 8 - \log_4 2$

Aplicando la propiedad anterior se tiene

$$\begin{aligned} \log_4 8 - \log_4 2 &= \log_4 \frac{8}{2} \\ &= \log_4 4 \\ &= 1 \end{aligned}$$

E

Calcule los valores de las siguientes expresiones logarítmicas:

a) $\log_8 16 - \log_8 2$

b) $\log_3 54 - \log_3 2$

c) $\log_4 3 - \log_4 48$

d) $\log_3 324 - \log_3 4$

Contenido 6: Propiedades básicas de los logaritmos (5)

Ejemplo Calcule los valores de las siguientes expresiones logarítmicas:

a) $\log_5 2+\log_5 50-\log_5 4$

b) $\log_6 9-\log_6 15+\log_6 10$

Se procede con los cálculos usando las propiedades reunidas en el cuadro de la derecha.

Si $a>0$, $a\neq 1$, $M>0$ y $N>0$

1) $\log_a a^p=p$

2) $\log_a 1=0$

3) $\log_a a=1$

4) $\log_a N^k=k\log_a N$

5) $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$ (k es número real)

6) $\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

a) $\log_5 2+\log_5 50-\log_5 4 =(\log_5 2+\log_5 50)-\log_5 4$ Se asocian los dos primeros términos

$=\log_5 (2)(50)-\log_5 4$ Se usa la propiedad 5

$=\log_5 \frac{(2)(50)}{4}$ Se utiliza la propiedad 6

$=\log_5 25$ Se simplifica el argumento

$=\log_5 5^2$ Se expresa el 25 como potencia

$=2$ Se aplica la propiedad 1

b) $\log_6 9-\log_6 15+\log_6 10=(\log_6 9-\log_6 15)+\log_6 10$ Se asocian los dos primeros logaritmos

$=\log_6 \frac{9}{15}+\log_6 10$ Se usa la propiedad 6

$=\log_6 \left(\frac{9}{15}\right)(10)$ Se utiliza la propiedad 5

$=\log_6 \frac{90}{15}$ Se opera en el argumento

$=\log_6 6$ Se simplifica el argumento

$=1$ Se usa la propiedad 3

E

Calcule los valores de las siguientes expresiones logarítmicas:

a) $\log_2 8+\log_2 5-\log_2 20$

b) $2\log_3 6+\log_3 5-\log_3 20$

c) $\log_{10} 24-2\log_{10} 6+\log_{10} 15$

Contenido 7: Propiedades básicas de los logaritmos (6)

P

Deduzca una fórmula que utilice logaritmo en base 2 para calcular el valor de $\log_8 4$.

S

Sea $\log_8 4 = p$ que en forma exponencial es

$$4 = 8^p$$

Aplicando logaritmo de base 2 en ambos lados de la ecuación anterior se tiene

$$\log_2 4 = \log_2 8^p$$

y utilizando la propiedad $\log_a N^k = k \log_a N$ se obtiene

$$\log_2 4 = p \log_2 8, \text{ de donde } \frac{\log_2 4}{\log_2 8} = p.$$

Luego, sustituyendo p por $\frac{\log_2 4}{\log_2 8}$ en $\log_8 4 = p$ resulta

$$\log_8 \mathbf{4} = \frac{\log_2 \mathbf{4}}{\log_2 \mathbf{8}}$$

C

Fórmula de cambio de base

Si $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $a \neq 1$, $c \neq 1$,

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Ejemplo Calcule los valores de las siguientes expresiones logarítmicas usando la fórmula de cambio de base:

a) $\log_{16} 8$

b) $\log_3 2 \cdot \log_2 9$

a) $$\log_{16} 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 16} = \frac{\log_2 2^3}{\log_2 2^4} = \frac{3\cancel{\log_2 2}}{4\cancel{\log_2 2}} = \mathbf{\frac{3}{4}}$$

b) $$\log_3 2 \cdot \log_2 9 = \cancel{\log_3 2} \cdot \frac{\log_3 9}{\cancel{\log_3 2}} = \log_3 9 = \log_3 3^2 = \mathbf{2}$$

E

Calcule los valores de las siguientes expresiones logarítmicas usando la fórmula de cambio de base:

a) $\log_9 27$

b) $\log_4 32$

c) $\log_{25} 5$

d) $\log_3 5 \cdot \log_5 9$

e) $\log_2 11 \cdot \log_{11} 16$

Contenido 8: Comprobemos lo aprendido 1

E

1. Calcule los valores de las siguientes expresiones logarítmicas:

a) $\log_3 9$

b) $\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{125}$

c) $\log_2 \sqrt{32}$

d) $\log_4 \frac{1}{16}$

e) $\log_8 32$

f) $\log_9 \frac{1}{3}$

g) $\log_2 3 \cdot \log_3 2$

h) $\log_4 5 \cdot \log_5 8$

2. Calcule los valores de las siguientes expresiones logarítmicas:

a) $\log_4 10 - \log_4 5$

b) $\log_3 24 - \log_3 8$

c) $\frac{1}{3} \log_2 8 + \frac{1}{2} \log_2 4$

d) $\log_{10} 72 - 2 \log_{10} 3 - 3 \log_{10} 2$

3. Calcule los valores de las siguientes expresiones logarítmicas:

a) $\log_5 12 - \log_5 20 - \log_5 15$

b) $\log_3 20 - \log_3 15 - \log_3 12$

c) $3 \log_5 12 - \log_5 300 - 2 \log_5 60$

d) $\log_2 \sqrt[3]{18} - \frac{2}{3} \log_2 3$

e) $\log_2 7 \cdot \log_7 32$

f) $\log_9 8 \cdot \log_8 3$

g) $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 8$

Sección 2: Funciones logarítmicas

Contenido 1: Gráfica de la función logarítmica creciente

P

Dada la siguiente tabla de valores asociada a la función $y=\log_2 x$, realice lo siguiente:

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
y	-3			0			3
Punto	$\mathrm{A}\left(\frac{1}{8},-3\right)$	$\mathrm{B}\left(\frac{1}{4},\quad\right)$	$\mathrm{C}\left(\frac{1}{2},\quad\right)$	D(1, 0)	E(2,)	F(4,)	G(8,)

a) Complete las casillas vacías y los pares.
b) Ubique los puntos A, B, C, D, E, F y G en el plano cartesiano.
c) Trace una curva suave sobre la trayectoria indicada por los puntos ubicados y prolónguela más allá de A y G.

S

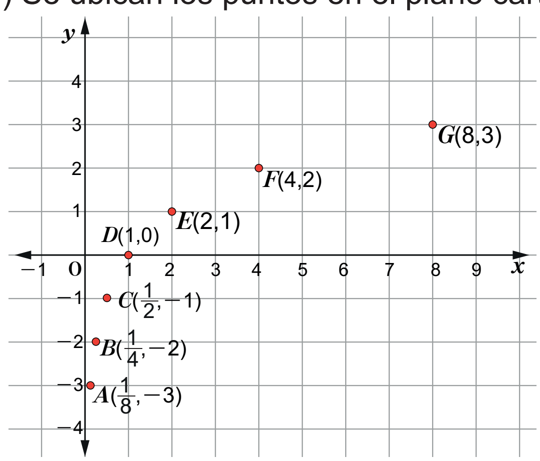
a) Se calculan los valores de y para $x=\frac{1}{4}, \frac{1}{2}$, 2 y 4.

Para $x=\frac{1}{4}$; $y=\log_2\frac{1}{4}=\log_2 2^{-2}=-2$ Para $x=\frac{1}{2}$; $y=\log_2\frac{1}{2}=\log_2 2^{-1}=-1$

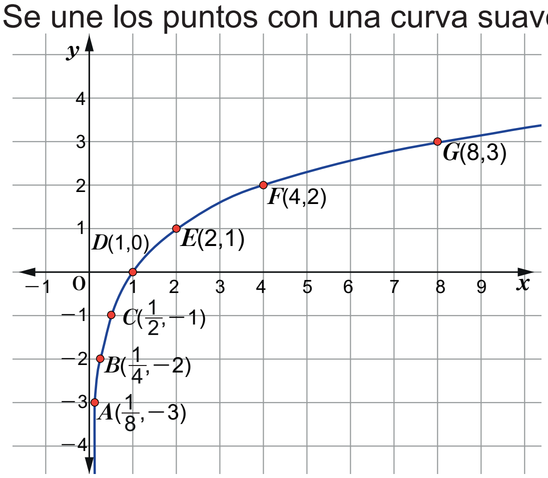
Para $x=2$; $y=\log_2 2=\log_2 2^1=1$ Para $x=4$; $y=\log_2 4=\log_2 2^2=2$

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
y	-3	**-2**	**-1**	0	**1**	**2**	3
Punto	$\mathrm{A}\left(\frac{1}{8},-3\right)$	$\mathrm{B}\left(\frac{1}{4},\mathbf{-2}\right)$	$\mathrm{C}\left(\frac{1}{2},\mathbf{-1}\right)$	D(1, 0)	E(2 , **1**)	F(4, **2**)	G(8, 3)

b) Se ubican los puntos en el plano cartesiano.



c) Se une los puntos con una curva suave.



E

Dada la siguiente tabla de valores asociada a la función $y=\log_3 x$, determine lo que se le pide.

x	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27
y	-3			0			3
Punto	$\mathrm{A}\left(\frac{1}{27},-3\right)$	$\mathrm{B}\left(\frac{1}{9},\quad\right)$	$\mathrm{C}\left(\frac{1}{3},\quad\right)$	D(1, 0)	E(3,)	F(9,)	G(27, 3)

a) Complete la tabla.
c) Una los puntos con una curva suave.
b) Ubique los puntos B, C, D, E y F en el plano cartesiano.

Contenido 2: Gráfica de la función logarítmica decreciente

P

Dada la siguiente tabla de valores asociada a la función $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, determine lo que se le pide.

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
y	3			0			-3
Punto	$A\left(\frac{1}{8}, 3\right)$	$B\left(\frac{1}{4}, \quad\right)$	$C\left(\frac{1}{2}, \quad\right)$	$D(1, 0)$	$E(2, \quad)$	$F(4, \quad)$	$G(8, -3)$

a) Complete la tabla.
b) Ubique los puntos en el plano cartesiano.
c) Trace una curva suave sobre la trayectoria indicada por los puntos ubicados y prolónguela más allá de A y G.

S

a) Se calculan los valores de y para $x = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 2$ y 4.

Para $x = \frac{1}{4}$; $y = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2$

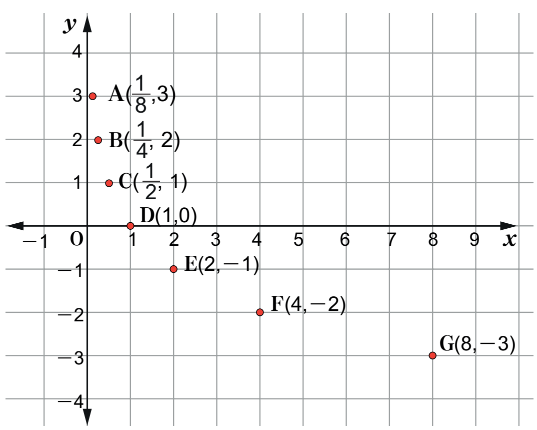
Para $x = \frac{1}{2}$; $y = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 1$

Para $x = 2$; $y = \log_{\frac{1}{2}} 2 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = -1$

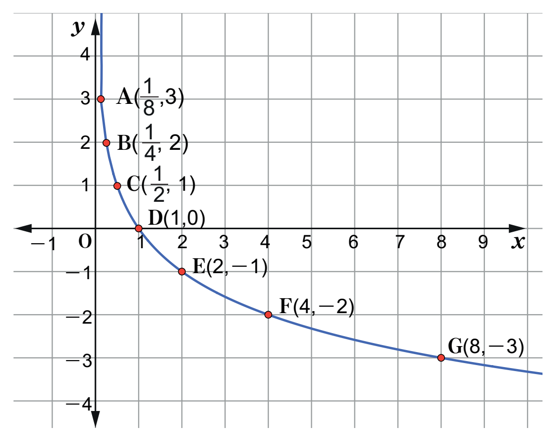
Para $x = 4$; $y = \log_{\frac{1}{2}} 4 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = -2$

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
y	3	**2**	**1**	0	**−1**	**−2**	**−3**
Punto	$A\left(\frac{1}{8}, 3\right)$	$B\left(\frac{1}{4}, \mathbf{2}\right)$	$C\left(\frac{1}{2}, \mathbf{1}\right)$	$D(1, 0)$	$E(2, \mathbf{-1})$	$F(4, \mathbf{-2})$	$G(8, \mathbf{-3})$

b) Se ubican los puntos en el plano cartesiano.



c) Se unen los puntos con una curva suave.



E

Dada la siguiente tabla de valores asociada a la función $y = \log_{\frac{1}{3}} x$, determine lo que se le pide.

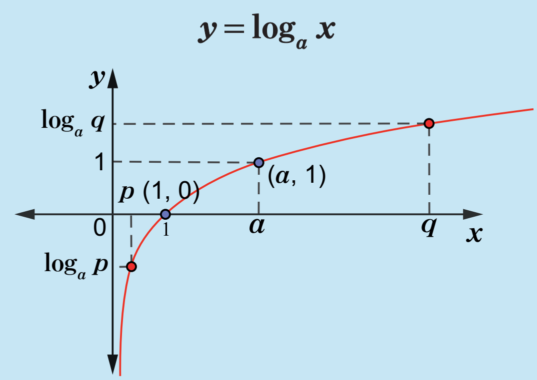
x	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27
y	3			0			-3
Punto	$A\left(\frac{1}{27}, 3\right)$	$B\left(\frac{1}{9}, \quad\right)$	$C\left(\frac{1}{3}, \quad\right)$	$D(1, 0)$	$E(3, \quad)$	$F(9, \quad)$	$G(27, -3)$

a) Complete las casillas vacías y los pares
b) Ubique los puntos B, C, D, E y F en el plano cartesiano.
c) Una los puntos con curva suave.

Contenido 3: Propiedades básicas de la función logarítmica creciente

Propiedades de la gráfica de $y = \log_a x$, $a > 1$:

1. La gráfica pasa por los puntos $(1, 0)$ y $(a, 1)$ ya que $\log_a 1 = 0$ y $\log_a a = 1$.
2. El eje y es asíntota vertical, es decir, la gráfica no toca a la parte negativa de este eje, aunque se acerca indefinidamente a este.
3. Observando la gráfica se concluye que esta es creciente, es decir si $p < q$, $\log_a p < \log_a q$.
4. Dominio: Números reales positivos.
   Rango: Números reales.



P

Ordene los logaritmos de forma creciente.

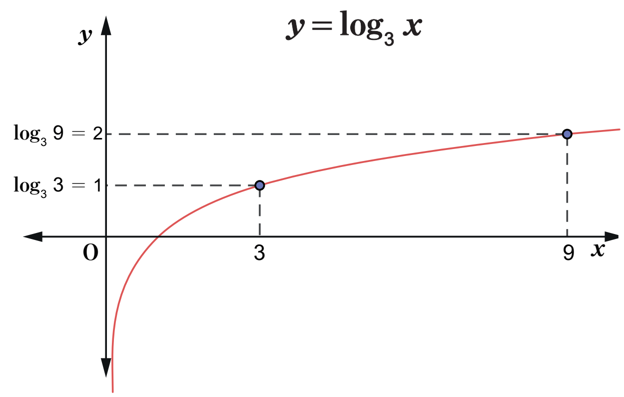
a) $\log_3 9$, $\log_3 3$

b) $\log_2 7$, $\log_2 \frac{1}{3}$, $\log_2 5$

S

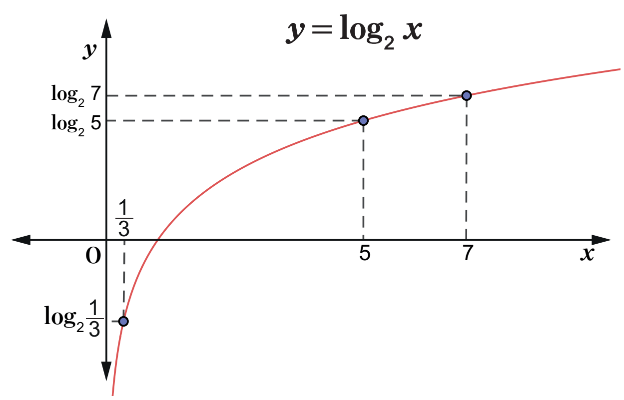
a) Puesto que $3 < 9$ y la base 3 es mayor que 1, por la propiedad 3 se tiene

$$\log_3 3 < \log_3 9.$$



b) Puesto que $\frac{1}{3} < 5 < 7$ y la base 2 es mayor que 1 por la propiedad 3 se tiene

$$\log_2 \frac{1}{3} < \log_2 5 < \log_2 7$$



E

Ordene los logaritmos de forma creciente.

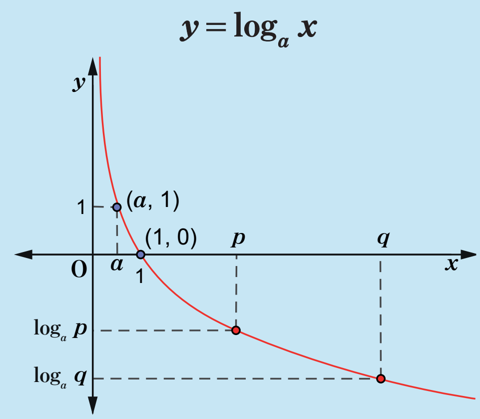
a) $\log_2 5$, $\log_2 3$

b) $\log_3 2$, $\log_3 \frac{1}{2}$, $\log_3 4$

Contenido 4: Propiedades básicas de la función logarítmica decreciente

Propiedades de la gráfica de $y = \log_a x$, $0 < a < 1$:

1. La gráfica pasa por los puntos $(1, 0)$ y $(a, 1)$ ya que
$$\log_a 1 = 0 \ \text{ y } \ \log_a a = 1$$
2. El eje y es asíntota vertical, es decir, la gráfica no toca a la parte positiva de este eje, aunque se acerca indefinidamente a este.
3. Observando la gráfica puede notarse que $p < q$; no obstante, $\log_a p > \log_a q$, siendo la gráfica decreciente.
4. Dominio: Números reales positivos.
   Rango: Números reales.



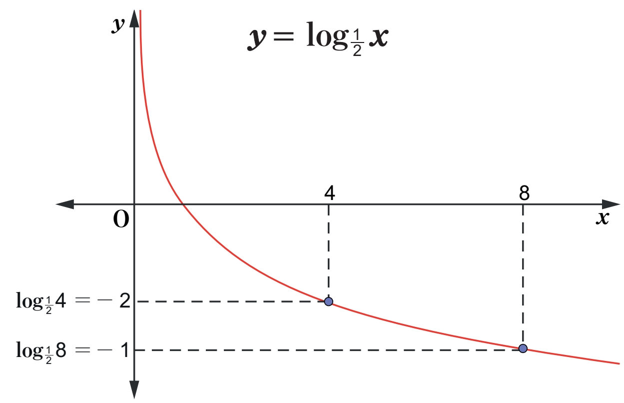
P

Ordene los logaritmos de forma creciente.

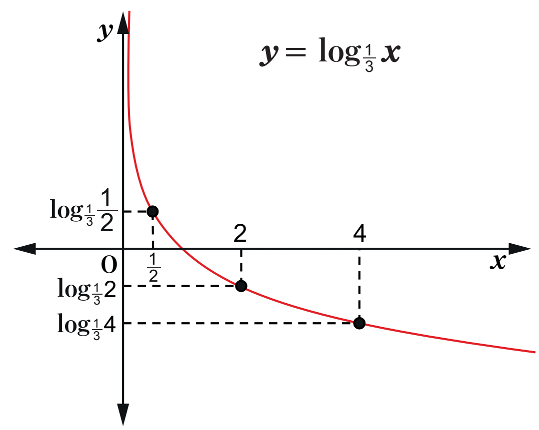
a) $\log_{\frac{1}{2}} 8$, $\log_{\frac{1}{2}} 4$ b) $\log_{\frac{1}{3}} 2$, $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$, $\log_{\frac{1}{3}} 4$

S

a) Puesto que $4 < 8$ y la base $\frac{1}{2}$ es menor que 1, por la propiedad 3 se tiene que
$$\log_{\frac{1}{2}} 8 < \log_{\frac{1}{2}} 4$$



b) Puesto que $\frac{1}{2} < 2 < 4$ y la base $\frac{1}{3}$ es menor que 1 y, por la propiedad 3, se tiene
$$\log_{\frac{1}{3}} 4 < \log_{\frac{1}{3}} 2 < \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$$



E

Ordene los logaritmos de forma creciente.

a) $\log_{\frac{1}{2}} 3, \log_{\frac{1}{2}} 5$ b) $\log_{\frac{1}{3}} 4, \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{4}, \log_{\frac{1}{3}} 8$

Contenido 5: Ecuaciones logarítmicas (1)

P

Encuentre la solución de cada una de las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\log_2 x = 5$ b) $\log_5 (2x+7) = 2$

S

a) $\log_2 x = 5$ se pasa a la forma exponencial

$$x = 2^5 = 32$$

Este valor satisface la condición de que el argumento debe ser positivo. Por tanto la solución es

$$x = 32$$

b) Igualmente, la ecuación $\log_5 (2x+7) = 2$ se escribe en forma exponencial

$$2x+7 = 5^2$$

es decir

$$2x+7 = 25$$

Resolviendo esta ecuación se tiene

$$2x = 25-7$$

$$2x = 18$$

$$x = \frac{18}{2} = 9$$

Los valores x del argumento de la función deben cumplir la condición

$$2x+7 > 0$$

$$x > -\frac{7}{2}$$

Esto quiere decir que $x = 9$ cumple con lo exigido, siendo entonces la solución.

E

Encuentre las soluciones de las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\log_3 x = 2$

b) $\log_7 (3x+4) = 2$

c) $2\log_2 x = 4$

Contenido 6: Ecuaciones logarítmicas (2)

P

Encuentre la solución de cada una de las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\log_2 x+\log_2 (x+3)=2\log_2 2$ b) $\log_9 (x+1)+\log_9 (x-7)=1$

S

a) $\log_2 x+\log_2 (x+3)=2\log_2 2$

Se aplica las propiedades del logaritmo

$\log_2 x(x+3)=\log_2 2^2$ $\log_a M+\log_a N=\log_a MN$ y $k\log_a N=log_a N^k$

$x(x+3)=2^2$ $\log_a p=\log_a q$ si y solo si $p=q$

$x^2+3x=4$

$x^2+3x-4=0$

Se resuelve la ecuación de segundo grado

$(x+4)(x-1)=0$

$x+4=0,\quad x-1=0$

$x=-4,\quad x=1$

para $x>0$, $\boldsymbol{x=1}$

En el logaritmo $\log_a M$, el argumento es $M>0$.

Por lo tanto, en las expresiones: $\log_2 x$ y $\log_2 (x+3)$, los argumentos verifican

$x>0$ y $x+3>0$

$x>0$ y $x>-3$

Es decir, las soluciones serán: $x>0$

b) $\log_9 (x+1)+\log_9 (x-7)=1$

Aplicando las propiedades del logaritmo se tiene

$\log_9 (x+1)(x-7)=\log_9 9$ $\log_a M+\log_a N=\log_a MN$ y $1=\log_a a$

$(x+1)(x-7)=9$ $\log_a p=\log_a q$ si y solo si $p=q$

$x^2-6x-7=9$

Se resuelve la ecuación de segundo grado

$x^2-6x-16=0$

$(x-8)(x+2)=0$

$x-8=0,\quad x+2=0$

$x=8,\quad x=-2$

para $x>7$, $\boldsymbol{x=8}$

En la expresiones: $\log_9 (x+1)$ y $\log_9 (x-7)$, los argumentos cumplen que

$x+1>0$ y $x-7>0$

$x>-1$ y $x>7$

Es decir, las soluciones serán: $x>7$

E

Encuentre las soluciones de las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\log_2 x+\log_2 (x-1)=1$

b) $\log_{10}(x+2)(x+5)=1$

c) $\log_2 (x-2)+\log_2 (x+1)=2$

Contenido 7: Cálculo de logaritmos de base 10

P

Calcule el valor de cada uno de los siguientes logaritmos si $\log_{10} 2 = 0{,}3010$ y $\log_{10} 3 = 0{,}4771$:

a) $\log_{10} 9$ b) $\log_{10} 6$ c) $\log_{10} 12$

S

a) $\log_{10} 9 = \log_{10} 3^2$ Se descompone el 9 en factores primos

$= 2\log_{10} 3$ Se utiliza la propiedad $\log_{10} M^k = k\log_{10} M$

$= (2)(0{,}4771)$ Se sustituye el valor de $\log_{10} 3$

$= 0{,}9542$ Se multiplican ambos factores

b) $\log_{10} 6 = \log_{10} (2)(3)$ Se descompone el 6 en factores primos

$= \log_{10} 2 + \log_{10} 3$ Se utiliza la propiedad $\log_{10} MN = \log_{10} M + \log_{10} N$

$= 0{,}3010 + 0{,}4771$ Se sustituyen los valores para $\log_{10} 2$ y $\log_{10} 3$

$= 0{,}7781$ Se realiza la suma

c) $\log_{10} 12 = \log_{10}(4)(3)$ Se descompone el 12 en los factores 4 y 3

$= \log_{10} 4 + \log_{10} 3$ Se aplica la propiedad $\log_a MN = \log_{10} M + \log_{10} N$

$= \log_{10} 2^2 + \log_{10} 3$ Se expresa el 4 como potencia de 2

$= 2\log_{10} 2 + \log_{10} 3$ Se aplica la propiedad $\log_{10} N^k = k\log_{10} N$

$= (2)(0{,}3010) + (0{,}4771)$ Se sustituyen los valores para $\log_{10} 2$ y $\log_{10} 3$

$= 1{,}0791$ Se realizan las operaciones indicadas

E

Calcule los valores de los siguientes logaritmos si $\log_{10} 2 = 0{,}3010$ y $\log_{10} 3 = 0{,}4771$:

a) $\log_{10} 4$ b) $\log_{10} 18$

c) $\log_{10} 24$ d) $\log_{10} 27$

e) $\log_{10} 32$ f) $\log_{10} 36$

Contenido 8: Comprobemos lo aprendido 2

E

1. Trace la gráfica de cada una de las funciones logarítmicas.

   a) $y = \log_4 x$

   b) $y = \log_{\frac{1}{4}} x$

2. Enliste los logaritmos dados en el orden que se indica a la par.

   a) $\log_2 5,\ \log_2 \frac{1}{2},\ \log_2 3$ (orden creciente)

   b) $\log_{\frac{1}{3}} 2,\ \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9},\ \log_{\frac{1}{3}} 6$ (orden decreciente)

3. Encuentre las soluciones de las siguientes ecuaciones logarítmicas:

   a) $\log_2 x = -5$

   b) $\log_4 (x-3) = \frac{1}{2}$

   c) $\log_2 (3-x) = \log_2 (2x+18)$

   d) $\log_8 (x+2)^2 = 2$

   e) $\log_3 (x-2) + \log_3 (2x-7) = 2$

4. Calcule los valores de cada uno de los siguientes logaritmos si $\log_{10} 2 = 0{,}3010$ y $\log_{10} 3 = 0{,}4771$:

   a) $\log_{10} 16$

   b) $\log_{10} 81$

   c) $\log_{10} 48$

Unidad 4

Geometría Analítica

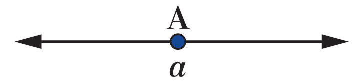
Sección 1: Punto y segmento

Contenido 1: Distancia entre dos puntos de la recta numérica

Repaso

Sistema de coordenadas en la recta numérica

En la recta numérica, cada punto A de esta se identifica con un único número real a el cual se denomina coordenada de dicho punto. Se usará la notación $\mathrm{A}(a)$ para referirnos al punto y su coordenada asociada.

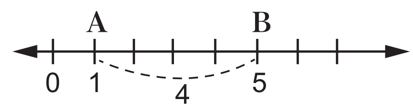


P

Dados $\mathrm{A}(1)$, $\mathrm{B}(5)$, $\mathrm{C}(-2)$ y $\mathrm{D}(3)$ calcule la distancia entre A y B y entre C y D.

S

En la gráfica de la derecha se observa que hay 4 unidades desde A hasta B, esto es



$$\mathrm{AB}=\underbrace{5}_{\text{Coordenada de B}}-\underbrace{1}_{\text{Coordenada de A}}=4$$

Es decir, si se utiliza valor absoluto,

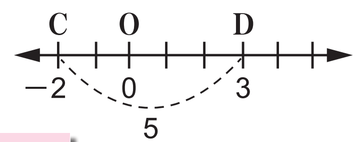
$$\mathrm{AB}=4=|4|=|5-1|$$
$$=|\text{coordenada de B}-\text{coordenada de A}|$$

Valor absoluto de x

$$|x|=\begin{cases} x & \text{si } x\geq 0 \\ -x & \text{si } x<0 \end{cases}$$

Ahora se calcula la distancia entre C y D.

Hay 5 unidades entre los puntos $\mathrm{C}(-2)$, $\mathrm{D}(3)$, de modo que



$$\mathrm{CD}=\underbrace{3}_{\text{Coordenada de D}}-\underbrace{(-2)}_{\text{Coordenada de C}}=5$$

Utilizando valor absoluto para calcular la distancia se tiene

$$\mathrm{CD}=|\text{coordenada de D}-\text{coordenada de C}|=|3-(-2)|=|5|=5$$

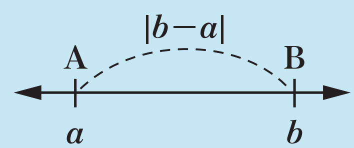
C

La distancia entre dos puntos cualesquiera A y B de la recta numérica, cuyas coordenadas son a y b, respectivamente, es la longitud del $\overline{\mathrm{AB}}$ y está dada por

$$\mathrm{AB}=|b-a|$$

La distancia entre los puntos A y B se denotará como d, de modo que

$$d=\mathrm{AB}$$



E

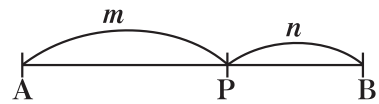
1. Calcule la distancia entre cada pareja de puntos.
   a) $\mathrm{A}(3)$, $\mathrm{B}(7)$
   b) $\mathrm{C}(-5)$, $\mathrm{D}(0)$
   c) $\mathrm{M}(0)$, $\mathrm{F}(-7)$
   d) $\mathrm{F}(-7)$, $\mathrm{H}(-2)$
   e) $\mathrm{R}(-5)$, $\mathrm{Q}(1, 5)$
2. Dados los puntos $\mathrm{A}(-5)$, $\mathrm{B}(-2)$, $\mathrm{C}(10)$, verifique que $\mathrm{AB}+\mathrm{BC}=\mathrm{AC}$.

Contenido 2: División de un segmento de la recta numérica en una razón dada

Repaso

División de un segmento por un punto en una razón dada

Recuerde que un punto P en el interior de $\overline{\mathrm{AB}}$ divide a este en la razón $m:n$ si P se ubica a m unidades de A y a n unidades de B, esto es $\mathrm{AP}:\mathrm{PB}=m:n$.



P

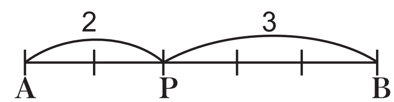
Represente gráficamente la división del segmento AB por el punto P en la razón 2:3, dividiendo a este en 5 partes iguales.

S

El segmento dado se divide en 5 partes iguales puesto que

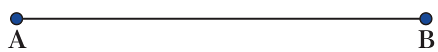
$$2+3=5.$$

La razón 2:3 nos indica que el punto P se ubica a 2 unidades de A y a 3 unidades de B.



E1

Represente gráficamente la división del segmento AB por el punto P en la razón 3:7.

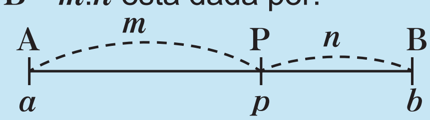


C

Coordenadas del punto que divide a un segmento en una razón dada

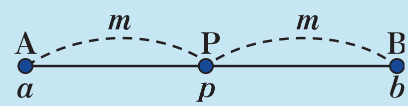
Recuerde también que si $\mathrm{A}(a)$ y $\mathrm{B}(b)$ son los extremos de $\overline{\mathrm{AB}}$, la coordenada p del punto P en el interior de dicho segmento que lo divide en la razón $\mathrm{AP}:\mathrm{PB}=m:n$ está dada por:

$$p=\frac{na+mb}{m+n}$$



Si $m=n$, entonces P es el punto medio de $\overline{\mathrm{AB}}$ y su coordenada es

$$p=\frac{a+b}{2}$$



Ejemplo

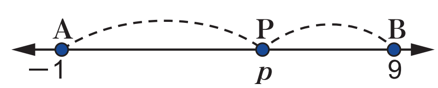
Los puntos $\mathrm{A}(-1)$ y $\mathrm{B}(9)$ son los extremos de $\overline{\mathrm{AB}}$. Calcule la coordenada del punto P en $\overline{\mathrm{AB}}$, tal que:

a) P divide a $\overline{\mathrm{AB}}$ en la razón 3:2

b) P es punto medio de $\overline{\mathrm{AB}}$

a) Se usa la fórmula $p=\dfrac{na+mb}{m+n}$; siendo $a=-1$, $b=9$, $m=3$, $n=2$.

$$p=\frac{(2)(-1)+(3)(9)}{3+2}=\frac{25}{5}=5$$

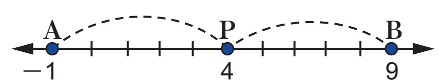


La coordenada de P es 5.

b) Como P es el punto medio de $\overline{\mathrm{AB}}$, se usa la fórmula $p=\dfrac{a+b}{2}$, siendo $a=-1$, $b=9$:

$$p=\frac{-1+9}{2}=\frac{8}{2}=4.$$

De manera que el punto medio de $\overline{\mathrm{AB}}$ tiene coordenada $p=4$.



E2

Encuentre la coordenada de cada punto P del segmento dado $\overline{\mathrm{AB}}$, sabiendo que:

a) Los extremos de $\overline{\mathrm{AB}}$ son $\mathrm{A}(5)$ y $\mathrm{B}(15)$, además P divide este segmento en la razón 2:3.

b) Los extremos de $\overline{\mathrm{AB}}$ son $\mathrm{A}(-7)$ y $\mathrm{B}(14)$, además P divide este segmento en la razón 4:3.

c) Los extremos de $\overline{\mathrm{AB}}$ son $\mathrm{A}(15)$ y $\mathrm{B}(45)$, además P es punto medio de $\overline{\mathrm{AB}}$.

Contenido 3: Distancia entre dos puntos del plano cartesiano

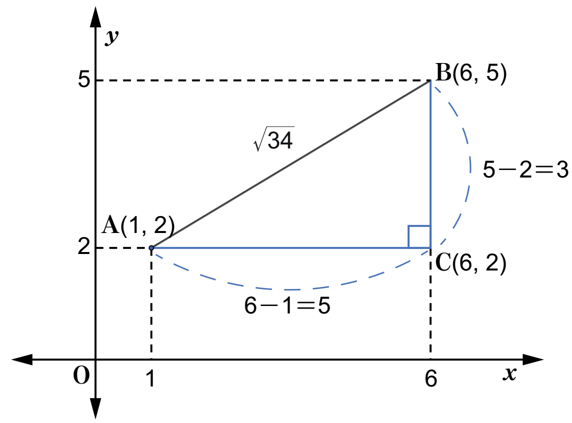
P

Calcule la distancia entre los puntos $A(1, 2)$ y $B(6, 5)$ del plano cartesiano.

S

La distancia entre A y B es la longitud de $\overline{AB}$.

Si se traza una recta paralela al eje x, pasando por A y una recta paralela al eje y pasando por B, estas se cortan en C, formando el triángulo rectángulo ABC.



La longitud de $\overline{AC}$ es

$$AC = 6-1 = 5,$$

y la longitud de $\overline{BC}$ es

$$BC = 5-2 = 3.$$

La distancia a determinar es la longitud de la hipotenusa del $\triangle ABC$, de modo que, aplicando el Teorema de Pitágoras se tiene

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}$$

$$AB = \sqrt{(6-1)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$$

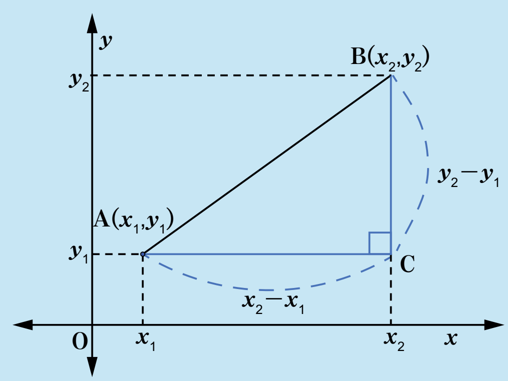
Luego, la distancia entre los puntos $A(1, 2)$ y $B(6, 5)$ es $\sqrt{\mathbf{34}}$.

C

Distancia entre dos puntos del plano cartesiano

La distancia entre dos puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ del plano, denotada por d, es la longitud del segmento AB y se determina con:

$$d = AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



E

Calcule la distancia entre dos puntos:

a) $A(2, -3)$, $B(5, 1)$

b) $M(0, 0)$, $Q(-4, 2)$

c) $R(-2, 1)$, $S(2, 4)$

d) $F(3, -2)$, $T(3, -9)$

Contenido 4: División de un segmento en una razón dada

Definición

Coordenadas de un punto que divide a un segmento del plano en una razón dada

Las coordenadas del punto $\mathrm{P}(x, y)$ que divide a $\overline{\mathrm{AB}}$, con extremos $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, y $\mathrm{B}(x_2, y_2)$, en la razón $m{:}n$ son

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{m+n}, \quad y = \frac{ny_1 + my_2}{m+n}.$$

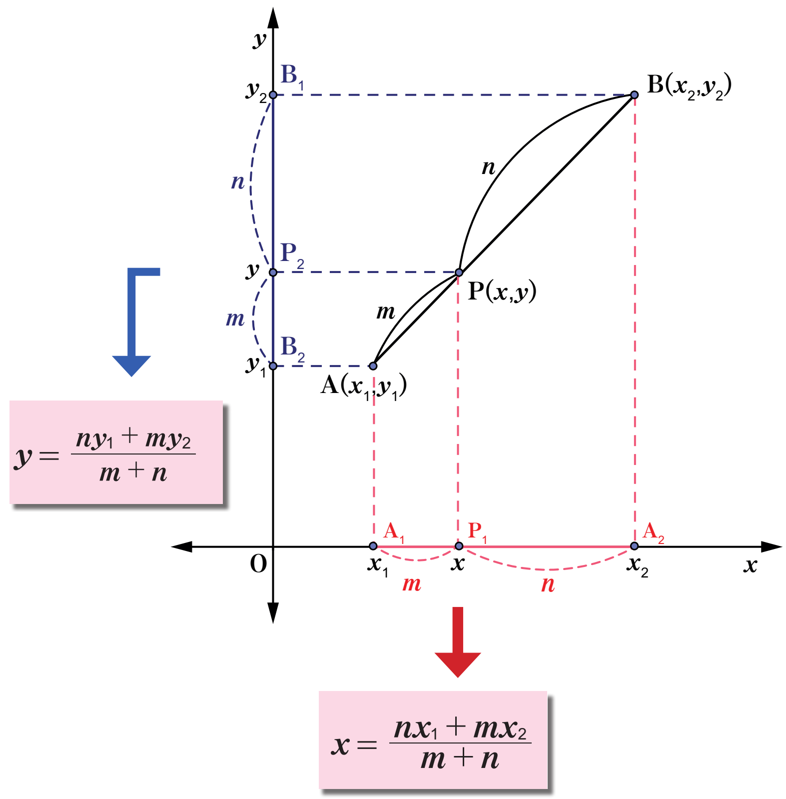
Esto se confirma a partir del siguiente gráfico, en el que se muestra que sobre el eje x se forman segmentos cuyas longitudes están también en la razón $m{:}n$, lo cual ocurre a su vez sobre el eje y:

Al proyectar el segmento AB sobre el eje x se forma el segmento $\mathrm{A_1A_2}$ cuyos extremos son $\mathrm{A_1}\,(x_1, 0)$ y $\mathrm{A_2}\,(x_2, 0)$. El punto $\mathrm{P_1}\,(x, 0)$ es la proyección de P sobre el eje x y este divide al segmento $\mathrm{A_1A_2}$ también en la razón $m{:}n$, de manera que

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{m+n}$$

Al proyectar el segmento AB sobre el eje y se forma el segmento $\mathrm{B_1B_2}$ cuyos extremos son $\mathrm{B_1}\,(0, y_1)$ y $\mathrm{B_2}\,(0, y_2)$. El punto $\mathrm{P_2}\,(0, y)$ es la proyección de P sobre el eje y y este divide al segmento $\mathrm{B_1B_2}$ también en la razón $m{:}n$, de manera que

$$y = \frac{ny_1 + my_2}{m+n}$$



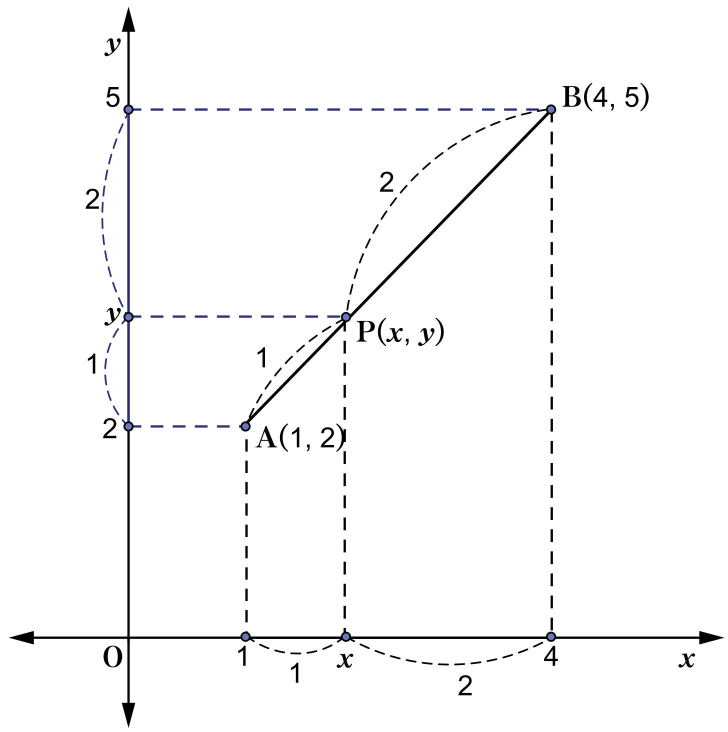
Es decir, las coordenadas de P son

$$\mathrm{P}\left(\frac{nx_1 + mx_2}{m+n}, \frac{ny_1 + my_2}{m+n}\right).$$

Ejemplo

Calcule las coordenadas del punto $P(x, y)$ que divide al segmento AB cuyos extremos son $A(1, 2)$ y $B(4, 5)$ en la razón 1:2.

En la gráfica de abajo se muestra $\overline{AB}$ y el punto P que lo divide en la razón 1:2.



Para el uso de las fórmulas anteriores se identifica

$$x_1 = 1,\quad x_2 = 4,\quad y_1 = 2,$$
$$y_2 = 5,\quad m = 1,\quad n = 2.$$

Así,

$$x = \frac{(2)(1)+(1)(4)}{1+2} = \frac{6}{3} = 2$$

$$y = \frac{(2)(2)+(1)(5)}{1+2} = \frac{9}{3} = 3$$

Por tanto, el punto buscado es **P(2, 3)**.

E

a) Encuentre las coordenadas del punto P que divide al segmento con extremos $A(2, 1)$ y $B(9, 8)$ en la razón 3:4.

b) Encuentre las coordenadas del punto P que divide al segmento con extremos $A(-1, 6)$ y $B(6, -1)$ en la razón 4:3.

Contenido 5: Coordenadas del punto medio de un segmento

P

Determine las coordenadas del punto P que divide al segmento con extremos $\mathrm{A}(1, 2)$ y $\mathrm{B}(3, 6)$ en la razón 1:1.

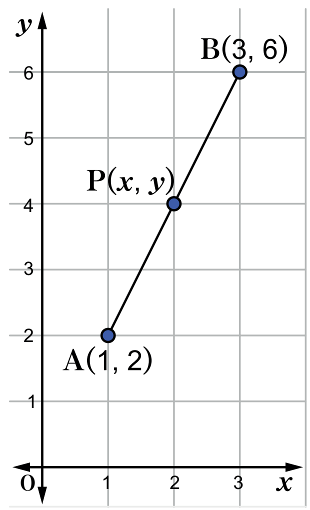
S

Las coordenadas de P son:

$$x = \frac{(1)(1)+(1)(3)}{1+1} = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2, \quad y = \frac{(1)(2)+(1)(6)}{1+1} = \frac{2+6}{2} = \frac{8}{2} = 4.$$

Luego, el punto buscado es $\mathrm{P}(2, 4)$.

Se observa que en este caso, $m = n = 1$, lo que indica que P es punto medio de $\overline{\mathrm{AB}}$.



C

Punto medio de un segmento del plano

Las coordenadas del punto medio $\mathrm{P}(x, y)$ de $\overline{\mathrm{AB}}$ con extremos $\mathrm{A}(x_1, y_1)$ y $\mathrm{B}(x_2, y_2)$ son

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Es decir,

$$\mathrm{P}\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Ejemplo

a) Encuentre las coordenadas del punto medio del segmento con extremos $A(1, 3)$ y $B(-2, 5)$.

b) Si $(0, 3)$ son las coordenadas del punto medio de $\overline{AB}$ con extremos $A(-2, 4)$ y $B(x_2, y_2)$, determine las coordenadas de B.

a) Como $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $y_1 = 3$, $y_2 = 5$, el punto medio tiene coordenadas

$$x = \frac{1+(-2)}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$y = \frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

De manera que el punto medio es $\mathbf{P\left(-\frac{1}{2}, 4\right)}$.

b) Esta vez se sabe que $x = 0$, $y = 3$, $x_1 = -2$, $y_1 = 4$, valores que se sustituyen en las expresiones para las coordenadas del punto medio:

$$0 = \frac{-2+x_2}{2}, \quad 3 = \frac{4+y_2}{2}$$

$$0 = -2+x_2, \quad 6 = 4+y_2$$

$$x_2 = 2, \quad y_2 = 2$$

De manera que el extremo buscado es $\mathbf{B(2, 2)}$.

E

1. Encuentre en cada caso el punto medio de $\overline{AB}$ cuyos extremos son:

   a) $A(2, 4)$, $B(5, 8)$

   b) $A(4, -1)$, $B(7, 3)$

   c) $A(-2, 3)$, $B(5, 1)$

   d) $A(0, 3)$, $B(3, 0)$

2. Uno de los extremos de un segmento es el punto $(7, 8)$ y su punto medio es $(4, 3)$. Encuentre las coordenadas del otro extremo.

Contenido 6: Comprobemos lo aprendido 1

1. Calcule la distancia entre los puntos dados en la recta numérica:

   a) $\mathrm{A}(-3)$, $\mathrm{B}(0)$

   b) $\mathrm{P}(12)$, $\mathrm{Q}(-5)$

   c) $\mathrm{M}(-7)$, $\mathrm{T}(-4)$

2. Encuentre la coordenada del punto P de $\overline{\mathrm{AB}}$, sabiendo que:

   a) Los extremos de $\overline{\mathrm{AB}}$ son $\mathrm{A}(1)$ y $\mathrm{B}(9)$, además P divide este segmento en la razón 3:1.

   b) Los extremos de $\overline{\mathrm{AB}}$ son $\mathrm{A}(9)$ y $\mathrm{B}(2)$, además P divide este segmento en la razón 5:2.

   c) Los extremos de $\overline{\mathrm{AB}}$ son $\mathrm{A}(-10)$ y $\mathrm{B}(14)$, además P es punto medio de $\overline{\mathrm{AB}}$.

3. Determine la distancia entre los puntos dados del plano.

   a) $\mathrm{P}(0, 0)$, $\mathrm{Q}(4, 3)$

   b) $\mathrm{F}(3, 0)$, $\mathrm{N}(-2, 0)$

   c) $\mathrm{H}(6, 2)$, $\mathrm{K}(-3, -1)$

   d) $\mathrm{W}(3, 2)$, $\mathrm{U}(-1, -1)$

4. Los puntos extremos de un segmento son $\mathrm{P}_1(2, 4)$ y $\mathrm{P}_2(9, -3)$. Determine las coordenadas del punto $\mathrm{P}(x, y)$ que divide a este segmento en la razón 5:2.

5. Uno de los puntos extremos de un segmento es $\mathrm{P}_1(-5, 4)$ y su punto medio es $\mathrm{P}(1, 1)$. Halle las coordenadas del otro extremo.

Sección 2: La recta

Contenido 1: Ecuación de la recta (pendiente y el intercepto con el eje y)

Repaso

La gráfica de la ecuación $y=mx+b$ es una recta que tiene **pendiente m** y pasa por el punto $(0,\ b)$. **El punto $(0,\ b)$ es el intercepto con eje y**.

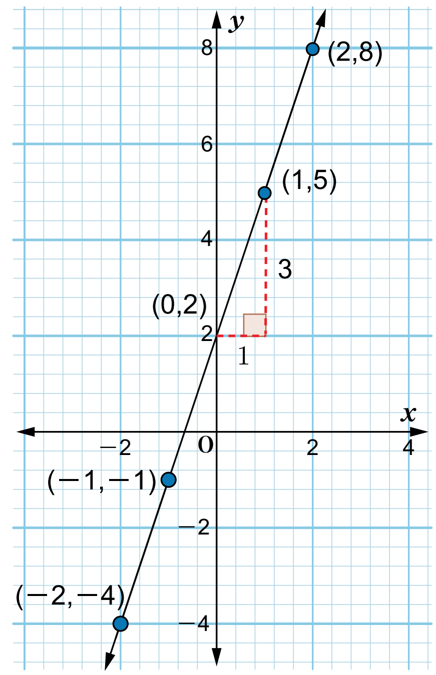
P

Dada la recta $y=3x+2$ responda a los incisos propuestos.
a) Encuentra la pendiente y el intercepto con el eje y.
b) Trace la gráfica de la ecuación dada.

S

a) A partir de la forma de la ecuación $y=3x+2$, $m=3$ y $b=2$: la pendiente de la recta $y=3x+2$ es **3** y el intercepto con el eje y es el punto **(0, 2)**.

b) Para trazar la gráfica de esta recta se necesita otro punto diferente de (0, 2) y como la pendiente es 3, el otro punto que se obtiene a partir de este es (1, 5).



E

Para cada inciso, identifique la pendiente de la recta dada y el intercepto con el eje y. Trace la gráfica.

a) $y=2x+2$

b) $y=-3x+4$

c) $y=5x$

d) $x+y=3$

Contenido 2: Ecuación punto – pendiente de la recta

Demostración

Sea $A(x_1, y_1)$ un punto de la recta que tiene pendiente m cuya ecuación es

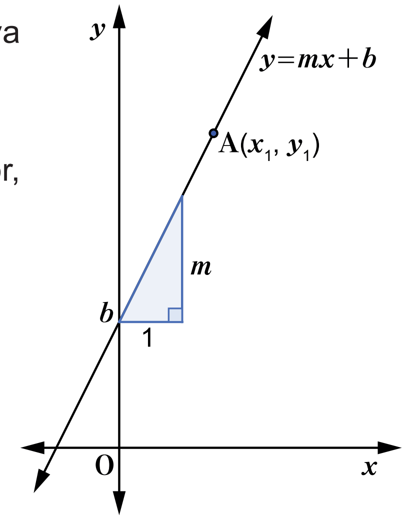
$$y = mx + b \qquad ①$$

Las coordenadas de este punto satisfacen la ecuación anterior, es decir,

$$y_1 = mx_1 + b \qquad ②$$

Al restar ② de ① se obtiene

$$\begin{array}{rrcl} & y & = & mx + b \\ +) & -y_1 & = & -mx_1 - b \\ \hline & y - y_1 & = & mx - mx_1 \\ & y - y_1 & = & m(x - x_1) \end{array}$$



C

La ecuación de la recta que tiene pendiente m y pasa por el punto $A(x_1, y_1)$ es:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

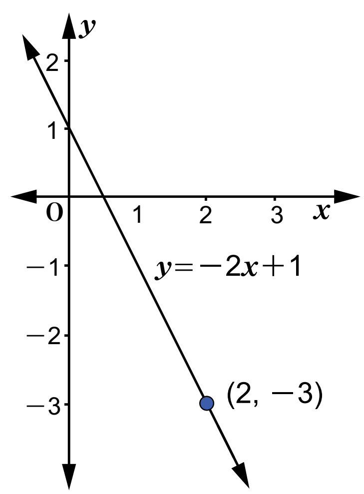
se llama **ecuación punto - pendiente** de la recta.

Ejemplo Determine la ecuación y trace la gráfica de la recta que pasa por $A(2, -3)$ y su pendiente es -2.

Como $x_1 = 2$, $y_1 = -3$ y $m = -2$, al sustituirlos en la ecuación $y - y_1 = m(x - x_1)$ se tiene

$$y - (-3) = -2(x - 2)$$
$$y + 3 = -2x + 4$$
$$y = -2x + 1$$

La ecuación de la recta es $\boldsymbol{y = -2x + 1}$ y su gráfica se muestra a la derecha.



E

1. Determine la ecuación de la recta que pasa por el punto (2, 3) y tiene la pendiente indicada:

   a) $m = 2$ b) $m = -3$ c) $m = 0$

2. Determine la ecuación de la recta que pasa por $(4, -1)$ y su pendiente es -4.

Contenido 3: Expresión para la pendiente de una recta

P

La siguiente tabla muestra las coordenadas de algunos puntos de la recta $y = 3x+2$:

x	-2	-1	0	1	2
y	-4	-1	2	5	8
Punto	$A(-2,\ -4)$	$B(-1,\ -1)$	$C(0,\ 2)$	$D(1,\ 5)$	$E(2,\ 8)$

a) Determine los valores $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ para las siguientes parejas de puntos:

- A y B
- B y E
- C y D

b) Compare los resultados obtenidos en a) con la pendiente de la recta.

S

a) Para los puntos $A(-2,\ -4)$ y $B(-1,\ -1)$ se tiene

$x_1=-2$, $y_1=-4$, $x_2=-1$ y $y_2=-1$, así

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-1-(-4)}{-1-(-2)}=\frac{3}{1}=\mathbf{3}.$$

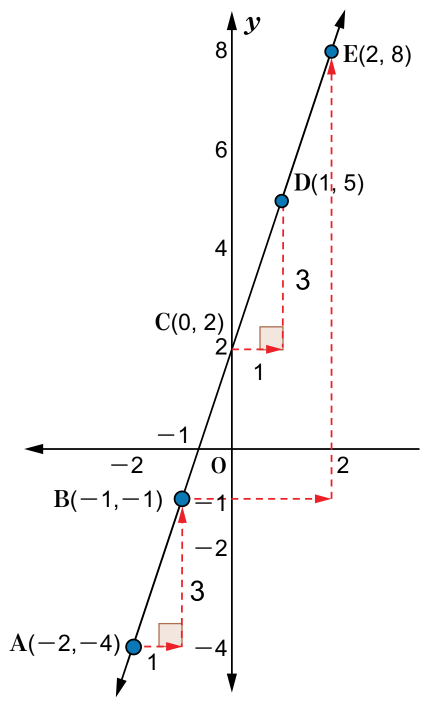
En el caso de $B(-1,\ -1)$ y $E(2,\ 8)$ se tiene

$x_1=-1$, $y_1=-1$, $x_2=2$ y $y_2=8$, de modo que

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{8-(-1)}{2-(-1)}=\frac{9}{3}=\mathbf{3}.$$

Y, para $C(0,\ 2)$ y $D(1,\ 5)$, $x_1=0$, $y_1=2$, $x_2=1$ y $y_2=5$, de manera que

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{5-2}{1-0}=\frac{3}{1}=\mathbf{3}.$$



b) La pendiente de la recta $y = 3x+2$ es 3, la cual coincide con el valor obtenido en los cocientes de a).

C

La pendiente de la recta $y = mx + b$ que pasa por dos puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ es la razón

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},\quad x_1\neq x_2$$

E

Calcule para cada inciso la pendiente de la recta que pasa por los puntos:

a) $A(3,\ 4)$ y $B(1,\ -2)$

b) $M(-5,\ 3)$ y $P(2,\ -3)$

c) $F(1,\ 3)$ y $J(7,\ 1)$

d) $Q(3,\ 4)$ y $C(0,\ 4)$

Contenido 4: Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

P Determine la ecuación de la recta que pasa por los dos puntos $\mathrm{A}(1, 3)$ y $\mathrm{B}(2, 4)$.

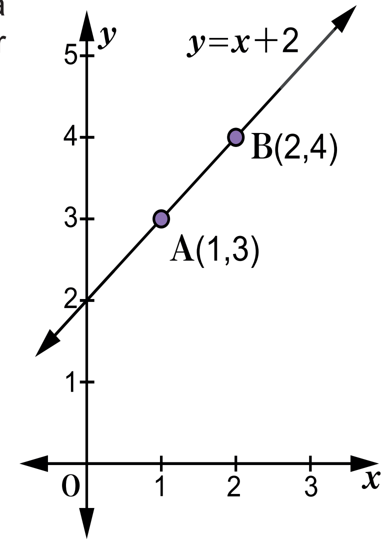
S

La pendiente m dada por

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{4-3}{2-1}.$$

Se utiliza la ecuación punto – pendiente $y-y_1=m(x-x_1)$, para la cual se requiere de uno de los puntos de la recta, tómese por ejemplo $\mathrm{A}(1, 3)$ toma la forma.

$$y-\underbrace{3}_{y_1}=\overbrace{\frac{4-3}{2-1}}^{\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}(x-\underbrace{1}_{x_1})$$



Es decir,

$$y-3=1(x-1)$$
$$y-3=x-1$$
$$y=x+2.$$

La ecuación encontrada es por tanto $\boldsymbol{y=x+2}$.

C

La ecuación de la recta que pasa por los dos puntos $\mathrm{A}(x_1, y_1)$ y $\mathrm{B}(x_2, y_2)$ siendo $x_1 \neq x_2$, es

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

Ejemplo Determine la ecuación de la recta que pasa por los dos puntos $\mathrm{A}(2, 1)$ y $\mathrm{B}(3, -1)$.

Como $x_1=2$, $y_1=1$, $x_2=3$ y $y_2=-1$, usando la ecuación para la recta que pasa por dos puntos se tiene

$$y-1=\frac{-1-1}{3-2}(x-2)$$
$$y-1=-2(x-2)$$
$$y-1=-2x+4$$
$$y=-2x+5$$

La ecuación encontrada es $\boldsymbol{y=-2x+5}$.

E

Determine la ecuación de la recta que pasa por los dos puntos:

a) $\mathrm{A}(-2, 3)$ y $\mathrm{B}(1, 9)$

b) $\mathrm{Q}(2, 1)$ y $\mathrm{H}(4, 7)$

c) $\mathrm{F}(2, 5)$ y $\mathrm{M}(-7, 5)$

d) $\mathrm{W}(1, -2)$ y $\mathrm{J}(-4, 5)$

Contenido 5: Ecuación general de la recta

P

Exprese la ecuación de la recta $y=\frac{2}{3}x+1$ en la forma $Ax+By+C=0$ con $A\neq 0$ o $B\neq 0$.

S

Se observa que en la expresión $Ax+By+C=0$ el lado derecho es igual a cero, de modo que se efectúa una transposición de términos en $y=\frac{2}{3}x+1$, ordenándolos adecuadamente

$$y=\frac{2}{3}x+1$$

$$-\frac{2}{3}x+y-1=0 \qquad ①$$

$$\mathbf{2x-3y+3=0}$$

Se multiplica la ecuación ① por -3 para simplificar el denominador.

La ecuación $y=\frac{2}{3}x+1$ se puede escribir como $2x-3y+3=0$ o también de la forma $\frac{2}{3}x-y+1=0$.

C

La ecuación de una recta en su forma general es $Ax+By+C=0$, siendo A, B, C números cualesquiera con $A\neq 0$ o $B\neq 0$.

Ejemplo

Identifique los números A, B y C para que la ecuación de la recta $x=2$ tenga la forma general con $A\neq 0$ o $B\neq 0$.

En vista de que $x=2$ se escribe como

$$x+0y-2=0,$$

se tienen los números $\mathbf{A=1, B=0, C=-2}$.

E

1. Escriba cada ecuación dada en la forma $Ax+By+C=0$ con $A\neq 0$ o $B\neq 0$:

a) $y=-2x+3$ b) $x=10$

c) $y-1=-\frac{3}{5}x$ d) $y=2$

2. Dada la recta $3x-5y+1=0$, determine la ecuación de la forma $y=mx+b$ que le corresponde.

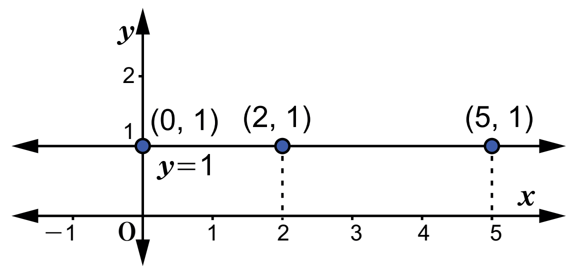
Contenido 6: Ecuaciones de rectas paralelas a los ejes coordenados

$\mathcal{P}_1$ Determine la ecuación de la recta que pasa por los puntos (2, 1) y (5, 1). Trace su gráfica.

$\mathcal{S}_1$

Se aplica la ecuación de la recta que pasa por dos puntos:

$$y-1=\frac{1-1}{5-2}(x-2)$$
$$y-1=\frac{0}{3}(x-2)$$
$$y-1=0$$
$$\boldsymbol{y=1}$$



La ecuación obtenida indica que todos los puntos de esta recta tienen al 1 como ordenada. La recta trazada es paralela al eje x. En la gráfica se muestran algunos puntos.

$\mathcal{C}$

La ecuación de la recta que pasa por los puntos $\mathrm{A}(x_1, y_1)$ y $\mathrm{B}(x_2, y_1)$ es

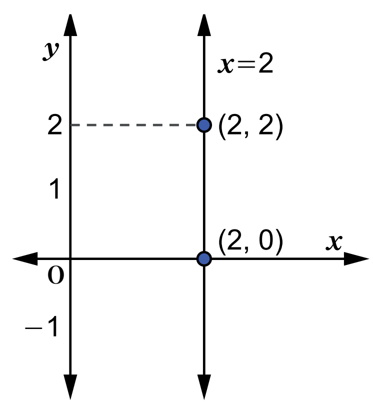
$$\boldsymbol{y=y_1}$$

Esta es una recta paralela al eje x, cuya pendiente es 0.

$\mathcal{P}_2$ Determine la ecuación de la recta que pasa por (2, 2) e intercepta al eje x en (2, 0).

$\mathcal{S}_2$

La recta pasa por los puntos (2, 2) y (2, 0) y es paralela al eje y, a como se aprecia en la gráfica derecha.



Se observa que todos los puntos de esta recta tienen como abscisa $x=2$. Esto permite decir que la ecuación de la recta es

$$\boldsymbol{x=2}.$$

$\mathcal{C}$

La ecuación de la recta que pasa por los puntos $\mathrm{A}(x_1, y_1)$ y $\mathrm{B}(x_1, y_2)$ es

$$\boldsymbol{x=x_1}$$

Esta es una recta paralela al eje y, la cual carece de pendiente.

$\mathcal{E}$

1. Determine para cada inciso la ecuación de la recta que pasa por los puntos dados:

a) $\mathrm{T}(-2, 1)$ y $\mathrm{R}(2, 1)$　　b) $\mathrm{M}(1, 3)$ y $\mathrm{J}(1, -3)$

c) $\mathrm{Q}(-1, 2)$ y $\mathrm{T}(-1, 10)$　　d) $\mathrm{H}(0, 3)$ y $\mathrm{T}(-6, 3)$

2. Determine la ecuación de la recta que pasa por (2, 3) y cuya pendiente es cero.

Contenido 7: Condición de paralelismo de dos rectas

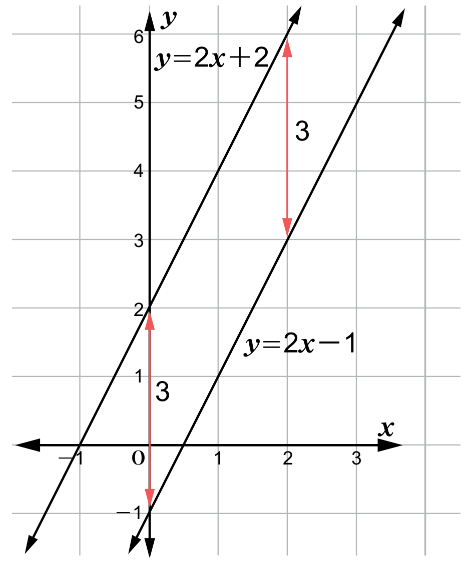
P

Verifique que las rectas $y=2x+2$ y $y=2x-1$ son paralelas.

S

En la gráfica de la derecha se observa una separación vertical constante de 3 unidades entre las dos rectas, lo que indica que estas no tienen puntos en común, es decir, son rectas paralelas.

Nótese que la pendiente de ambas rectas es $m=2$.



C

Las rectas $y=m_1 x+n_1$, $y=m_2 x+n_2$ son paralelas si sus pendientes son iguales.
Es decir, $m_1=m_2$

E1

Investigue si las parejas de rectas dadas son paralelas:

a) $y=-3x+1$
$y=3x+6$

b) $y=10+3x$
$y=3x-1$

c) $y=-5x+1$
$5x+y+7=0$

d) $y=-5x+3$
$y=-3-5x$

Ejemplo Determine la ecuación de la recta que pasa por $(3, -2)$ y es paralela a la recta $2x+y-2=0$.

La pendiente de la recta buscada es la misma que la de $2x+y-2=0$, esta última se lleva a la forma $y=mx+b$:

$$2x+y-2=0$$
$$y=-2x+2$$

De modo que la pendiente de ambas rectas es -2. Como el punto $(3, -2)$ está en la recta a determinar, entonces

$$y-(-2)=-2(x-3)$$
$$y+2=-2x+6$$
$$y=-2x+4$$

La ecuación de la recta es $\boldsymbol{y=-2x+4}$.

E2

a) Determine la ecuación de la recta que pasa por $(-2, -3)$ y es paralela a la recta cuya ecuación es $4x+y-5=0$.

b) Determine la ecuación de la recta que pasa por $(-3, 4)$ y es paralela a $6x+3y-3=0$.

Contenido 8: Condición de perpendicularidad de rectas

P

Considere la recta que pasa por (0, 0) y (−2, 1) y la recta $y=2x$ y responda los siguientes incisos:

a) Determine la ecuación de la recta que pasa por (0, 0) y (−2, 1).

b) Verifique con un transportador que las rectas dadas son perpendiculares.

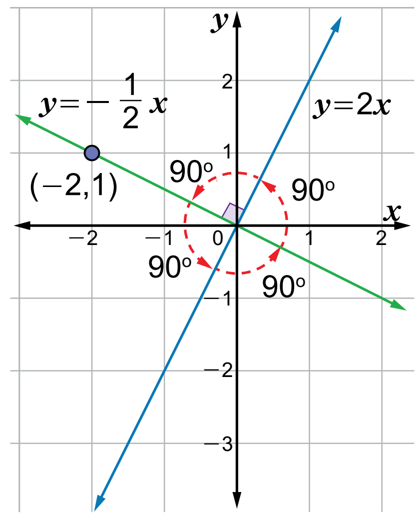
c) Establezca la relación existente entre las pendientes de dichas rectas.

S

a) La ecuación de la recta que pasa por (0, 0) y (−2, 1) es

$$y-0=\frac{1-0}{-2-0}(x-0)$$

$$\boldsymbol{y=-\frac{1}{2}x}$$



b) La gráfica de la derecha muestra que los ángulos formados por las rectas $y=2x$ y $y=-\frac{1}{2}x$ son de 90°, es decir, dichas rectas son perpendiculares.

c) Las pendientes de $y=2x$ y $y=-\frac{1}{2}x$ son $m_1=2$ y $m_2=-\frac{1}{2}$, respectivamente. De esta última igualdad se tiene

$$m_2=-\frac{1}{2}=-\frac{1}{m_1}$$

Es decir,

$$\boldsymbol{m_1 m_2=-1.}$$

C

Las rectas $y=m_1x+n_1$, $y=m_2x+n_2$ son perpendiculares si el producto de sus pendientes es −1.

Es decir, $m_1 m_2=-1$

Ejemplo Calcule la pendiente de una recta perpendicular a la recta $y=-6x+1$.

La pendiente de $y=-6x+1$ es $m_1=-6$. Si una recta con pendiente m_2 es perpendicular a la dada, $m_1m_2=-1$, esto es $(-6)\,m_2=-1$. Luego,

$$m_2=\frac{-1}{-6}=\boldsymbol{\frac{1}{6}}$$

E

Para cada recta calcule la pendiente de una recta perpendicular a esta:

a) $y=-4x$

b) $y=5x+1$

c) $y=\frac{1}{2}x+1$

d) $6x+y-1=0$

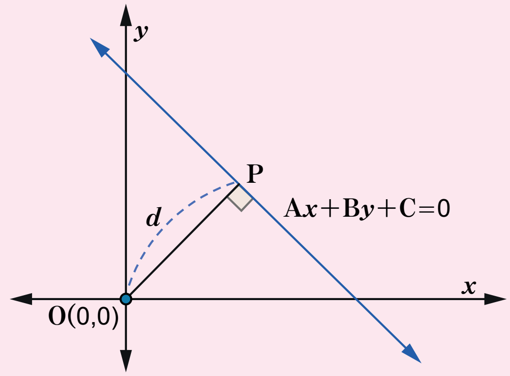
Contenido 9: Distancia del origen a una recta del plano

Distancia del punto $\mathrm{O}(0, 0)$ a una recta

La distancia del punto $\mathrm{O}(0,0)$ a la recta $\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}=0$ es la longitud del segmento OP siendo P un punto de la recta de modo que $\overline{\mathrm{OP}}$ es perpendicular a $\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}=0$.

La distancia de $(0, 0)$ a la recta $\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}=0$ es

$$d=\frac{|\mathrm{C}|}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}}.$$



Ejemplo Calcule la distancia del origen $\mathrm{O}(0, 0)$ a cada recta dada:

a) $3x+4y+15=0$

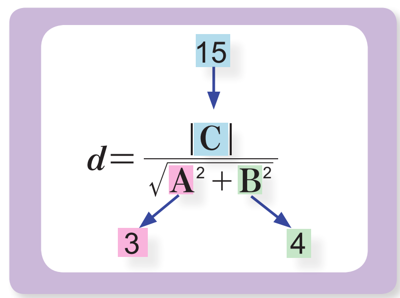
b) $2x-y-2=0$

a) En $3x+4y+15=0$, $\mathrm{A}=3$, $\mathrm{B}=4$, $\mathrm{C}=15$, de modo que

$$d=\frac{|15|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{15}{\sqrt{9+16}}$$

$$=\frac{15}{\sqrt{25}}=\frac{15}{5}=3.$$

Así, la distancia de $\mathrm{O}(0, 0)$ a $3x+4y+15=0$ es **3**.



b) En el caso de $2x-y-2=0$ se tiene $\mathrm{A}=2$, $\mathrm{B}=-1$, $\mathrm{C}=-2$, de modo que

$$d=\frac{|-2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{4+1}}=\boldsymbol{\frac{2}{\sqrt{5}}}$$

Se racionaliza el valor encontrado:

$$\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2(\sqrt{5})}{\sqrt{5}(\sqrt{5})}=\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

De manera que la distancia de $\mathrm{O}(0, 0)$ a $2x-y-2=0$ es $\boldsymbol{\frac{2\sqrt{5}}{5}}$.

E

Calcule la distancia del origen $\mathrm{O}(0, 0)$ a cada recta dada:

a) $4x+3y+5=0$

b) $x+2y+2=0$

c) $6x+8y-5=0$

d) $x+3y-7=0$

e) $5x+12y-13=0$

f) $2x+y=0$

Contenido 10: Comprobemos lo aprendido 2

E

Resuelva los siguientes ejercicios:

a) Encuentre la ecuación de la recta que pasa por (0, 3) y tiene pendiente $m=2$.

b) Encuentre la pendiente de la recta que pasa por (1, 2) y (3, -1).

c) Encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos (-2, 1) y (3, 4).

d) Escriba la ecuación de la recta $3y=-2x+1$ en la forma general $\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}=0$.

e) ¿Cuál es la ecuación de la recta que es perpendicular al eje x y que se encuentra a 5 unidades a la derecha del eje y?

f) Una recta dada pasa por (3, 1) y es paralela a $y=2x-5$. Encuentre la ecuación de dicha recta.

g) Determine la pendiente de una recta perpendicular a $y=-3x+5$.

h) Encuentre la distancia del origen (0, 0) a la recta $3x-2y+1=0$.

Desafío

Demostración de la fórmula para la distancia del origen a una recta

P

Demuestre que la distancia de $\mathrm{O}(0,0)$ a la recta $\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}=0$ es $d=\dfrac{|\mathrm{C}|}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}}$.

S

Suponga que A y B son distintos de cero. Considérese $\mathrm{P}(x_1,y_1)$ el punto de dicha recta que es extremo de $\overline{\mathrm{OP}}$. La pendiente de la recta que pasa por $\mathrm{O}(0,0)$ y $\mathrm{P}(x_1,y_1)$ es

$$m_1=\frac{y_1-0}{x_1-0}=\frac{y_1}{x_1}.$$

La ecuación $\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}=0$ se puede escribir como $y=-\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}x-\dfrac{\mathrm{C}}{\mathrm{B}}$, de modo que la pendiente de esta es $m_2=-\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$. Como estas rectas son perpendiculares, se tiene

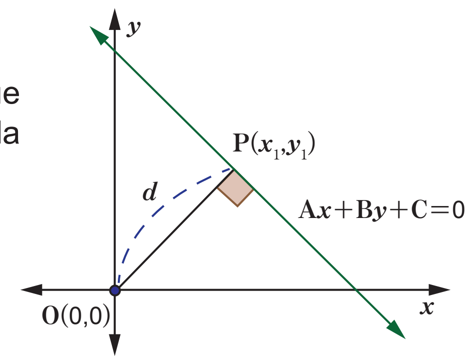
$$m_1\cdot m_2=\left(\frac{y_1}{x_1}\right)\left(-\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}\right)=-1$$

es decir,

$$\frac{y_1}{x_1}=\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}$$

Por la igualdad anterior, existe una constante k tal que $y_1=k\mathrm{B}$, $x_1=k\mathrm{A}$. Las coordenadas de P satisfacen la ecuación de la recta, de modo que

$$\begin{aligned}\mathrm{A}x_1+\mathrm{B}y_1+\mathrm{C}&=0\\ \mathrm{A}(k\mathrm{A})+\mathrm{B}(k\mathrm{B})+\mathrm{C}&=0\\ (\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2)k+\mathrm{C}&=0\end{aligned}$$



$$k=-\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}$$

La distancia de $\mathrm{O}(0,0)$ a $\mathrm{P}(x_1,y_1)$ cumple que

$$d^2=\mathrm{OP}^2=(x_1-0)^2+(y_1-0)=x_1^2+y_1^2=(k\mathrm{A})^2+(k\mathrm{B})^2=(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2)k^2.$$

Si se sustituye la expresión para k en la igualdad anterior resulta

$$d^2=(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2)\left(-\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}\right)^2=(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2)\frac{\mathrm{C}^2}{(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2)^2}=\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}.$$

Es decir,

$$d^2=\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}$$

Al aplicar raíz cuadrada en los miembros de la igualdad anterior se tiene

$$d=\frac{|\mathrm{C}|}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}}$$

Sección 3: La circunferencia

Contenido 1: Ecuación de la circunferencia con centro en el origen

Definición

Circunferencia

Una circunferencia con centro C y radio r es el conjunto de todos los puntos P del plano que equidistan de C, es decir $CP = r$.

P

Determine la ecuación de la circunferencia con centro el origen y radio 3. Grafíquela.

S

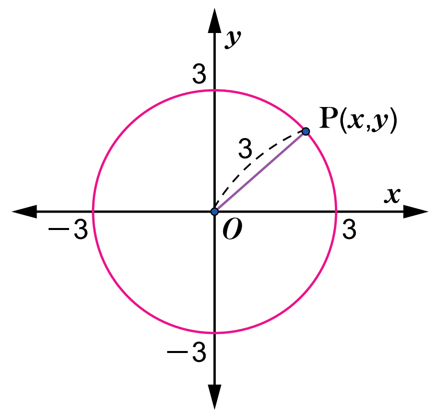
La distancia del centro $O(0, 0)$ a un punto arbitrario $P(x, y)$ de la circunferencia es $OP = 3$. Por la fórmula de la distancia entre dos puntos se tiene

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} = 3,$$

es decir,

$$x^2+y^2=9$$

Luego, la ecuación de la circunferencia es $\boldsymbol{x^2+y^2=9}$, y su gráfica se encuentra a la derecha.



C

La ecuación de la circunferencia con centro en $O(0, 0)$ y radio r es

$$x^2+y^2=r^2.$$

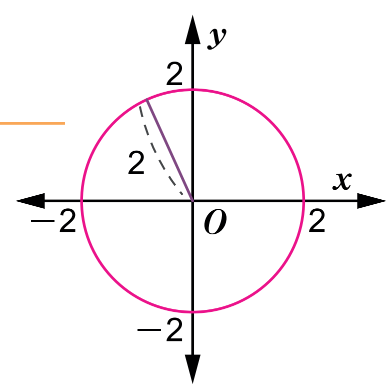
En este caso se dice que está en la **forma canónica**.

Ejemplo Encuentre el centro y el radio de la circunferencia $x^2+y^2=4$ y grafíquela.

La ecuación $x^2+y^2=4$ se reescribe en la forma canónica

$$x^2+y^2=2^2,$$ $\boxed{4=2^2}$

de modo que esta circunferencia tiene **centro en (0,0) y radio $r=2$.**



E

1. Determine en cada caso la ecuación de la circunferencia con centro en (0, 0) y radio dado.

   a) $r=1$ b) $r=4$ c) $r=\sqrt{3}$ d) $r=7$ e) $r=5$

2. Encuentre el centro y radio de cada circunferencia:

   a) $x^2+y^2=25$ b) $x^2+y^2=36$ c) $x^2+y^2=5$

Contenido 2: Ecuación de la circunferencia con centro $C(h, k)$ y radio r

P Determine la ecuación de la circunferencia con centro $C(2, 1)$ y radio 2, y grafíquela.

S

La distancia del centro $C(2, 1)$ a un punto arbitrario $P(x, y)$ de la circunferencia es $CP = 2$. Por la fórmula de la distancia entre dos puntos se tiene

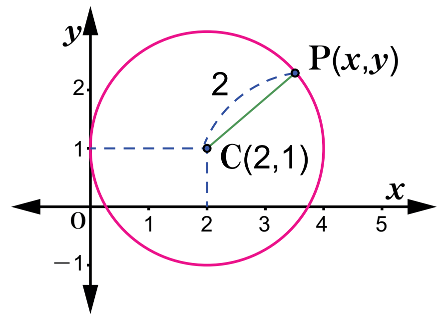
$$\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2} = 2,$$

es decir,

$$(x-2)^2+(y-1)^2 = 4.$$

Luego, la ecuación de la circunferencia es

$$\mathbf{(x-2)^2+(y-1)^2 = 4.}$$



C

La ecuación de la circunferencia con centro $C(h, k)$ y radio r es

$$(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$$

Esta se denomina **forma ordinaria de la ecuación de la circunferencia.**

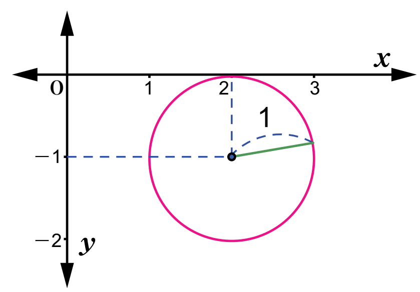
Ejemplo 1 Determine la ecuación de la circunferencia con centro $C(2, -1)$ y radio 1.

Las coordenadas del centro son $h = 2$, $k = -1$ y el radio es $r = 1$, de modo que la ecuación de la circunferencia es

$$(x-2)^2+[y-(-1)]^2 = 1^2,$$

es decir,

$$\mathbf{(x-2)^2+(y+1)^2 = 1.}$$



E1

Determine la ecuación de cada circunferencia sabiendo que:

a) Su centro es $C(3, 1)$ y radio $r = 2$.

b) Su centro es $C(2, 2)$ y radio $r = 3$.

c) Su centro es $C(-2, 1)$ y radio $r = 1$.

d) Su centro es $C(-1, -3)$ y radio $r = 5$.

Ejemplo 2 Encuentre el centro y el radio de la circunferencia $(x-1)^2+(y-2)^2 = 5$.

Se escribe $(x-1)^2+(y-2)^2 = 5$ en la forma ordinaria.

$$(x-1)^2+(y-2)^2 = (\sqrt{5})^2, \qquad \boxed{5 = (\sqrt{5})^2}$$

de modo que el centro es $\mathbf{C(1, 2)}$ y radio $\mathbf{r = \sqrt{5}}$.

E2

Encuentre el centro y el radio de cada circunferencia.

a) $(x-2)^2+(y-4)^2 = 9$

b) $(x-2)^2+(y+2)^2 = 1$

c) $(x-3)^2+(y+1)^2 = 10$

d) $x^2+(y-1)^2 = 25$

Contenido 3: Forma general de la ecuación de una circunferencia

P

Dada la circunferencia con ecuación $(x-1)^2+(y+2)^2=6$, efectúe en cada inciso para determinar la forma general de su ecuación.

a) Desarrolle los cuadrados de los binomios del lado izquierdo.

b) Efectúe la transposición de 6 al lado izquierdo.

c) Reúna primero los términos de segundo grado, después los de primer grado y por último las constantes y reduzca las constantes presentes.

S

a) Dado que $(x-1)^2=x^2-2x+1$ y $(y+2)^2=y^2+4y+4$, la ecuación $(x-1)^2+(y+2)^2=6$ se escribe como

$$x^2-2x+1+y^2+4y+4=6$$

b) Se transpone 6 al lado izquierdo

$$x^2-2x+1+y^2+4y+4-6=0$$

Cuadrado de la suma y de la diferencia de dos términos:

$$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$$
$$(x-a)^2=x^2-2ax+a^2$$

c) Se reúnen los términos de segundo grado, de primer grado y las constantes:

$$x^2+y^2-2x+4y+1+4-6=0$$
$$x^2+y^2-2x+4y-1=0.$$

C

La ecuación $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ de una circunferencia puede escribirse como

$$x^2+y^2+\mathrm{D}x+\mathrm{E}y+\mathrm{F}=0,$$

siendo D, E, F, constantes determinadas. A esta ecuación se le denomina **forma general de la ecuación de la circunferencia**.

E

Determine la forma general de la ecuación de cada circunferencia.

a) $(x-1)^2+(y+3)^2=4$

b) $(x+2)^2+(y-4)^2=9$

c) $(x-2)^2+(y-2)^2=3$

d) $(x-4)^2+(y-5)^2=36$

Contenido 4: Transformación de la forma general a la forma ordinaria de la ecuación de una circunferencia

P

Dada la circunferencia $x^2+y^2-4x+2y-4=0$, responda a los siguientes incisos:

a) Determine su forma ordinaria.

b) A partir de lo obtenido en a), identifique las coordenadas del centro y la longitud del radio.

S

a) Para encontrar la forma ordinaria de la circunferencia se siguen los siguientes pasos:

1. Se agrupan los términos en la misma variable y se transpone la constante dada al lado derecho: $(x^2-4x)+(y^2+2y)=4$
2. Se completan los cuadrados en los términos agrupados, sumando en ambos lados el cuadrado de la mitad de los coeficientes de los términos de primer grado:

$$(x^2-4x) \quad + \quad (y^2+2y) \quad = \quad 4$$

$$(x^2-4x+2^2) \quad + \quad (y^2+2y+1^2) \quad = \quad 4+2^2+1^2$$

Trinomio cuadrado perfecto

$x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$

$x^2-2ax+a^2=(x-a)^2$

3. Se factorizan los trinomios que están en paréntesis y se realizan las sumas indicadas del lado derecho: $(x-2)^2+(y+1)^2=9$

b) De la ecuación del paso anterior se observa que el centro de la circunferencia es $C(2, -1)$ y $r=3$.

C

Para obtener la forma ordinaria de la ecuación de una circunferencia a partir de su forma general $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ se siguen los siguientes pasos:

1. Se agrupan los términos en la misma variable y se transpone la constante dada al lado derecho.
2. Se completan los cuadrados en los términos agrupados, sumando en ambos lados el cuadrado de la mitad del coeficiente de los términos de primer grado.
3. Se factorizan los trinomios cuadrados perfectos del lado izquierdo y se efectúan las sumas indicadas del lado derecho.

La ecuación del paso 3. es la ecuación ordinaria de la circunferencia en la que se identifican el radio y las coordenadas del centro.

E

1. Determine la forma ordinaria de la ecuación de la circunferencia dada por $x^2+y^2-4x+6y-12=0$ completando los recuadros en cada uno de los pasos siguientes:

   a) $(x^2-4x)+(y^2+6y)=\boxed{}$

   b) $(x^2-4x+\boxed{})+(y^2+6y+\boxed{})=12+\boxed{}+\boxed{}$

   c) $(x-\boxed{})^2+(y+\boxed{})^2=\boxed{}$

   d) El centro tiene coordenadas $(\boxed{}, \boxed{})$ y el radio es $\boxed{}$.

2. Determine la forma ordinaria para cada circunferencia:

   a) $x^2+y^2+2x-8y+13=0$

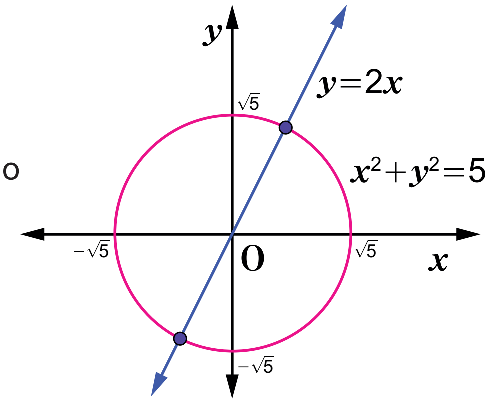
   b) $x^2+y^2+4x-2y-5=0$

Contenido 5: Intersecciones de una circunferencia y una recta secante a esta

P

Encuentre las intersecciones de la circunferencia $x^2+y^2=5$ y la recta $y=2x$.

S



1. Las ecuaciones dadas forman el sistema
$$\begin{cases} x^2+y^2=5 & \text{①} \\ y=2x & \text{②} \end{cases}$$
2. Al sustituir ② en ① se obtiene una ecuación de segundo grado la cual se resuelve a continuación:
$$x^2+(2x)^2=5$$
$$x^2+4x^2=5$$
$$5x^2=5$$
$$x^2=1$$
$$x=-1,\ x=1$$
Obteniéndose 2 soluciones distintas.
3. Se sustituyen los valores de x en ②:
Si $x=1$, entonces $y=(2)(1)=2$.
Si $x=-1$, entonces $y=(2)(-1)=-2$.
4. Con los valores encontrados para x y y se forman los puntos **(1, 2)** y **(−1, −2)**, los cuales son las intersecciones de la circunferencia y la recta dada.

Recta secante a una circunferencia es aquella que la interseca en dos puntos.

C

Para determinar las intersecciones de una circunferencia y una recta secante a esta se siguen los siguientes pasos:
1. Se agrupan las ecuaciones de la circunferencia y la recta formando un sistema de ecuaciones.
2. Se sustituye la expresión para la recta en la ecuación de la circunferencia, dando lugar a una ecuación de segundo grado, la cual se resuelve. (El hecho de que esta ecuación tenga dos soluciones reales distintas indica que efectivamente la recta es secante a la circunferencia).
3. Se sustituyen las soluciones de la ecuación de segundo grado del paso anterior en la ecuación de la recta para obtener los valores de y.
4. Con los valores encontrados para x y y se forman las intersecciones (x, y) de la circunferencia y la recta secante dada.

E

Encuentre las intersecciones de cada circunferencia con la recta secante dada.

a) $x^2+y^2=8,\qquad y=x$

b) $x^2+y^2=20,\qquad y=2x$

c) $x^2+y^2=30,\qquad y=3x$

Contenido 6: Intersección de una circunferencia y una recta tangente a esta

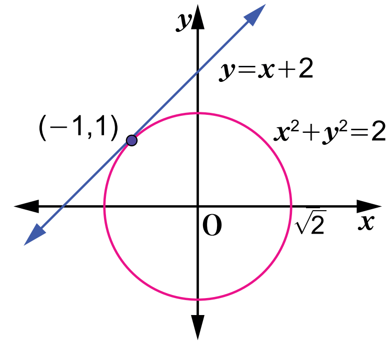
P

Determine la intersección de la circunferencia $x^2+y^2=2$ y la recta $y=x+2$.

S

1. Con las ecuaciones dadas se forma el sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2=2 & ① \\ y=x+2 & ② \end{cases}$$



2. Al sustituir ② en ① se obtiene una ecuación de segundo grado la cual se debe resolver:

$$x^2+(x+2)^2=2$$

$x^2+x^2+4x+4=2$ Se desarrolla el cuadrado del binomio

$2x^2+4x+2=0$ Se reducen términos

$x^2+2x+1=0$ Se divide por 2 ambos lados

$(x+1)^2=0$ Se factoriza el trinomio

$x+1=0$ Se extrae raíz cuadrada

$x=-1$ Una única solución

Recta tangente a una circunferencia es aquella que la interseca en un único punto.

3. Se sustituye en ② el valor encontrado anteriormente.
   Como $x=-1$, entonces $y=-1+2=1$.
4. Con los valores anteriores se forma el punto **(−1, 1)**, el cual es la intersección de la circunferencia y la recta dada.

C

Para determinar la intersección de una circunferencia y una recta tangente a esta se siguen los siguientes pasos:

1. Se agrupan las ecuaciones de la circunferencia y la recta formando un sistema de ecuaciones.
2. Se sustituye la expresión para la recta en la ecuación de la circunferencia, dando lugar a una ecuación de segundo grado, la cual se resuelve. (El hecho de que esta ecuación tenga una única solución indica que efectivamente la recta es tangente a la circunferencia).
3. Se sustituye la solución de la ecuación de segundo grado del paso anterior en la ecuación de la recta para obtener el valor de y.
4. Con los valores encontrados para x y y se forma el punto intersección (x, y) de la circunferencia y la recta tangente dada.

E

Encuentre las intersecciones de cada circunferencia con la recta tangente dada:

a) $x^2+y^2=5$, $y=2x+5$

b) $x^2+y^2=2$ $y=-x+2$

Contenido 7: Comprobemos lo aprendido 3

E

1. Determine en cada caso la ecuación de la circunferencia con centro y radio dados.

   a) $C(0, 0)$, $r=8$

   b) $C(2, 3)$, $r=5$

   c) $C(-1, -3)$, $r=\sqrt{7}$

2. Encuentre el centro y el radio de cada circunferencia.

   a) $x^2+y^2=9$

   b) $(x-1)^2+(y-2)^2=4$

3. Determine la ecuación general de la circunferencia $(x+1)^2+(y+1)^2=6$.

4. Determine la forma ordinaria de la ecuación de la circunferencia dada por $x^2+y^2+4x-2y-4=0$ completando los recuadros en cada uno de los pasos siguientes:

   a) $(x^2+4x)+(y^2-2y)=\square$

   b) $(x^2+4x+\square)+(y^2-2y+\square)=4+\square+\square$

   c) $(x+\square)^2+(y-\square)^2=\square$

   d) El centro tiene coordenadas $(\square, \square)$ y el radio es $\square$.

5. Encuentre las intersecciones de la circunferencia $x^2+y^2=9$ y la recta secante que está dada por $y=x-3$.

6. Encuentre las intersecciones de la circunferencia $x^2+y^2=18$ y la recta tangente que está dada por $y=x+6$.

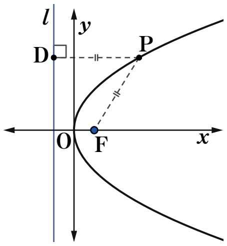
Unidad 5

Cónicas

Sección 1: La parábola

Contenido 1: Parábola con foco en el eje x

Definición

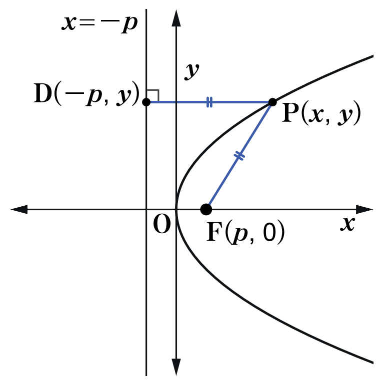


Parábola es el conjunto de puntos P en un plano que equidistan de un punto fijo F (foco) y una recta fija l (directriz). En la figura de la izquierda, los puntos P de la parábola deben cumplir que $\mathrm{PF}=\mathrm{PD}$, donde D es el pie de la perpendicular a l trazada desde P.

Ecuación de la parábola con foco en el eje x

Se deduce la ecuación de la parábola con foco $\mathrm{F}(p, 0)$ y directriz en $x=-p$ ($p>0$) de la siguiente manera:

Si $\mathrm{P}(x, y)$ es un punto cualquiera de la parábola, entonces $\mathrm{PD}=\mathrm{PF}$, cuya expresión en coordenadas es



$$\left[\sqrt{(x-(-p))^2+(y-y)^2}\,\right]^2=\left[\sqrt{(x-p)^2+(y-0)^2}\,\right]^2$$

Reduciendo y elevando al cuadrado

$$(x+p)^2=(x-p)^2+y^2$$
$$x^2+2px+p^2=x^2-2px+p^2+y^2$$
$$y^2=4px$$

Elementos de la parábola $y^2=4px$, con $p\neq 0$

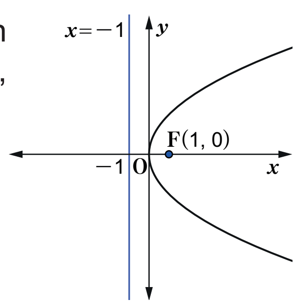
1. Tiene foco $\mathrm{F}(p, 0)$ y directriz $x=-p$.
2. El eje de simetría es eje x.
3. El vértice es (0, 0).
4. Si $p>0$, la parábola se abre hacia la derecha y si $p<0$, la parábola se abre hacia la izquierda.

Ejemplo Determine en cada inciso la ecuación de la parábola con los siguientes elementos:

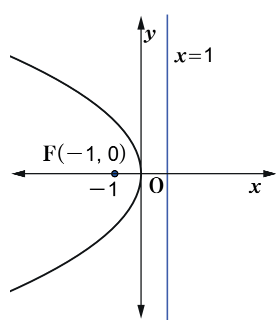
a) Vértice en el origen, foco $\mathrm{F}(1, 0)$ y directriz $x=-1$.

b) Vértice en el origen, foco $\mathrm{F}(-1, 0)$ y directriz $x=1$.

a) Se sustituye $p=1$ en la ecuación $y^2=4px$, resultando $y^2=(4)(1)x$, entonces $\boldsymbol{y^2=4x}$



b) Se sustituye $p=-1$ en la ecuación $y^2=4px$, resultando $y^2=(4)(-1)\,x$, entonces $\boldsymbol{y^2=-4x}$



E

Determine en cada inciso la ecuación de la parábola con los elementos dados:

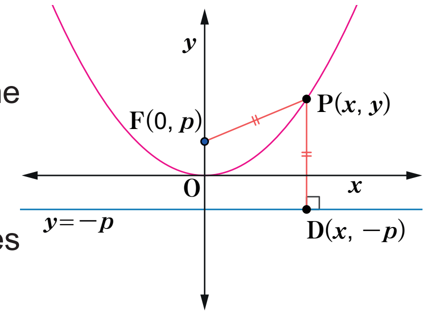
a) Foco $\mathrm{F}(2, 0)$ y directriz en $x=-2$

b) Foco $\mathrm{F}(3, 0)$ y directriz en $x=-3$

c) Foco $\mathrm{F}(-3, 0)$ y directriz en $x=3$

c) Foco $\mathrm{F}(-4, 0)$ y directriz en $x=4$

Contenido 2: Parábola con foco en el eje y



La parábola que tiene foco $F(0,p)$ y directriz $y=-p$, $p\neq 0$, tiene como ecuación:

$$x^2=4py.$$

De acuerdo con la figura, el eje de simetría de esta parábola es el eje y.

P

Encuentre las ecuaciones de las parábolas con los siguientes elementos:

a) Vértice en el origen, foco $F(0, 3)$ y directriz $y=-3$.

b) Vértice en el origen, foco $F(0, -3)$ y directriz $y=3$.

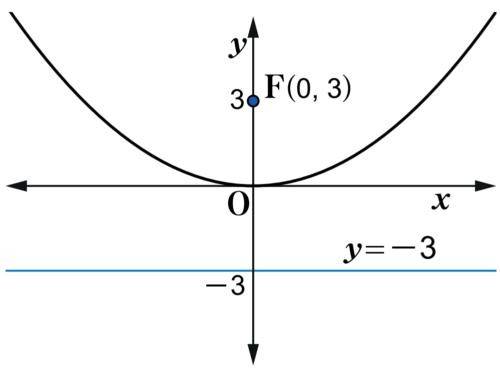
S

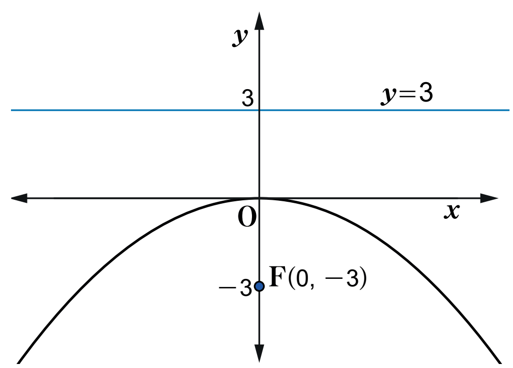
a) Como el foco $F(0, 3)$ está sobre el eje y y la directriz es $y=-3$, entonces la parábola correspondiente tiene la ecuación $x^2=4py$, con $p=3$, es decir:

$$x^2=(4)(3)y$$
$$\mathbf{x^2=12y}$$

b) Como el foco $F(0, -3)$ está sobre el eje y y la directriz es $y=3$, entonces la parábola correspondiente tiene la ecuación $x^2=4py$, con $p=-3$, es decir:

$$x^2=(4)(-3)y$$
$$\mathbf{x^2=-12y}$$





C

Elementos de la parábola $x^2=4py$, con $p\neq 0$:

1. Tiene foco $F(0,p)$ y directriz $y=-p$.
2. El eje de simetría es eje y.
3. El vértice es $(0,0)$.
4. Si $p>0$, la parábola se abre hacia arriba, y si $p<0$, la parábola se abre hacia abajo.

E

Determine en cada inciso la ecuación de la parábola con los elementos dados:

a) Foco $F(0, 2)$ y directriz $y=-2$

b) Foco $F(0, -2)$ y directriz $y=2$

c) Foco $F(0, 4)$ y directriz $y=-4$

d) Foco $F(0, -4)$ y directriz $y=4$

Contenido 3: Elementos de la parábola

P

Encuentre el vértice, eje de simetría, foco y directriz de cada parábola:

a) $y^2 = 8x$ b) $x^2 = -4y$

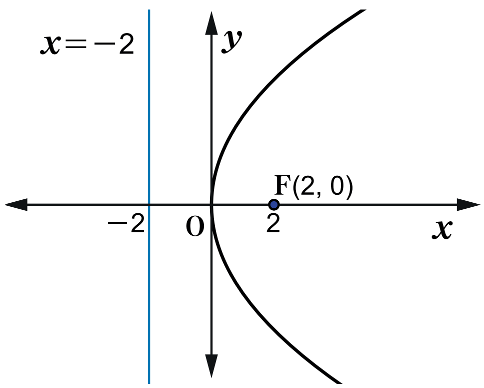
S

a) La parábola $y^2 = 8x$ tiene **vértice (0, 0)**. Se utiliza la ecuación $y^2 = 4px$ para encontrar p:

$$y^2 = 8x = (4)(2)x$$

Entonces, $p = 2$

Por lo tanto, el eje de simetría de la parábola es el **eje x**, **el foco $F(2,\ 0)$** y **la directriz $x = -2$**, como se observa abajo.

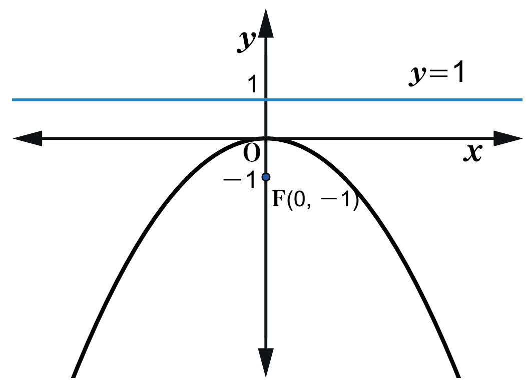


b) La parábola $x^2 = -4y$, tiene **vértice (0, 0)**. Se utiliza la ecuación $x^2 = 4py$ para encontrar p:

$$x^2 = -4y = (4)(-1)y$$

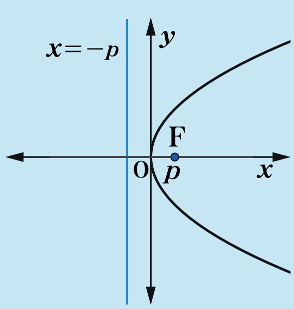
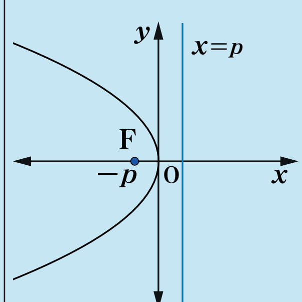
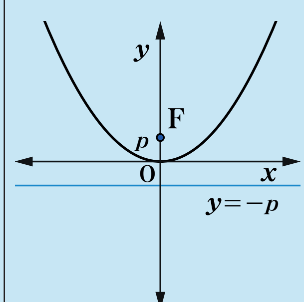
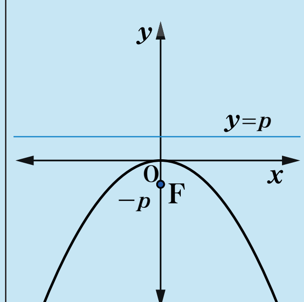
Entonces, $p = -1$.

Por lo tanto, el eje de simetría es el **eje y**, **el foco $F(0,\ -1)$** y la directriz **$y = 1$**, como se observa en la gráfica de abajo.



C

Resumen de propiedades de la parábola ($p > 0$) :

Forma	$y^2 = 4px$	$y^2 = -4px$	$x^2 = 4py$	$x^2 = -4py$
Gráfica				
Vértice	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)
Foco	$F(p,\ 0)$	$F(-p,\ 0)$	$F(0,\ p)$	$F(0,\ -p)$
Directriz	$x = -p$	$x = p$	$y = -p$	$y = p$

E

Encuentre el vértice, eje, foco, y directriz de las siguientes parábolas:

a) $y^2 = 4x$ b) $x^2 = -8y$

Contenido 4: Puntos de intersección de una parábola y una recta (1)

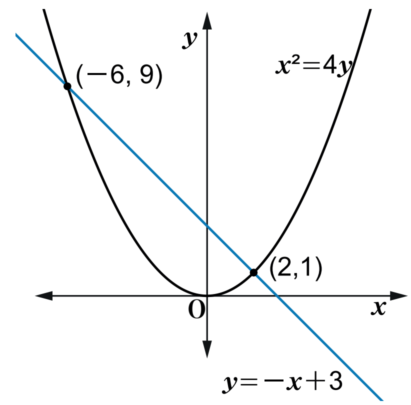
P

Encuentre los puntos de intersección de la recta $y = -x + 3$ con la parábola $x^2 = 4y$.

S

Para determinar los puntos de intersección de la recta $y = -x + 3$ con la parábola, se resuelve el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y = -x + 3 \\ x^2 = 4y \end{cases}$$



A continuación se sustituye el valor de y en $x^2 = 4y$,

$$x^2 = 4(-x + 3)$$
$$x^2 = -4x + 12$$
$$x^2 + 4x - 12 = 0$$

Se resuelve la ecuación anterior por factorización y se obtiene:

$$(x + 6)(x - 2) = 0, \quad \text{luego} \quad x = -6, \quad x = 2$$

Finalmente, en $y = -x + 3$, se sustituyen los valores encontrados,

Para $x = -6$, $y = -(-6) + 3 = 9$

Para $x = 2$, $\quad y = -2 + 3 = 1$

Por tanto, los puntos de intersección son: **(−6, 9)** y **(2, 1)**.

C

Los puntos de intersección de una parábola $x^2 = 4py$ y una recta $y = mx + b$, se encuentran resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y = mx + b \\ x^2 = 4py \end{cases}$$

E

Encuentre los puntos de intersección de:

a) La recta $y = 3x - 2$ con la parábola $x^2 = y$.

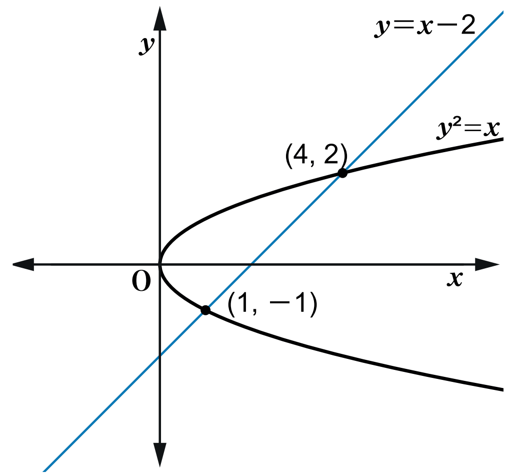
b) La recta $y = 2x - 9$ con la parábola $x^2 = -3y$.

Contenido 5: Puntos de intersección de una parábola y una recta (2)

P

Encuentre los puntos de intersección de la recta $y = x - 2$ con la parábola $y^2 = x$.

S



Para determinar los puntos de intersección se resuelve el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y = x - 2 \\ y^2 = x \end{cases}$$

Se sustituye el valor de y en $y^2 = x$,

$$(x-2)^2 = x$$
$$x^2 - 4x + 4 = x$$
$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

Al resolver la ecuación $x^2 - 5x + 4 = 0$ por factorización se obtiene:

$$(x-1)(x-4) = 0, \text{ luego } x = 1, x = 4$$

Finalmente en $y = x - 2$ se sustituyen los valores encontrados

Para $x = 1$, $y = 1 - 2 = -1$

Para $x = 4$, $y = 4 - 2 = 2$

Por tanto, los puntos de intersección son: **(1, −1)** y **(4, 2)**.

C

Los puntos de intersección de una parábola $y^2 = 4px$ y una recta $y = mx + b$, se encuentran resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y = mx + b \\ y^2 = 4px \end{cases}$$

E

Encuentre los puntos de intersección de:

a) La recta $y = x - 3$ con la parábola $y^2 = 4x$.

b) La recta $y = 2x + 4$ con la parábola $y^2 = -4x$.

Contenido 6: Comprobemos lo aprendido 1

E

1. Determine la ecuación de cada parábola con:

   a) Foco $\mathrm{F}(4, 0)$ y directriz $x = -4$.

   b) Foco $\mathrm{F}(5, 0)$ y directriz $x = -5$

   c) Foco $\mathrm{F}(-5, 0)$ y directriz $x = 5$

   d) Foco $\mathrm{F}(-6, 0)$ y directriz $x = 6$

   e) Foco $\mathrm{F}(0, 1)$ y directriz $y = -1$

   f) Foco $\mathrm{F}(0, 6)$ y directriz $y = -6$

   g) Foco $\mathrm{F}(0, -3)$ y directriz $y = 3$

2. Determine la ecuación de cada parábola con:

   a) Vértice $\mathrm{V}(0, 0)$ y directriz la recta $y = 4$

   b) Vértice $\mathrm{V}(0, 0)$ y directriz la recta $x = 5$

3. Encuentre el vértice, foco, eje y directriz de las siguientes parábolas:

   a) $y^2 = 12x$

   b) $x^2 = -16y$

4. Encuentre los puntos de intersección de:

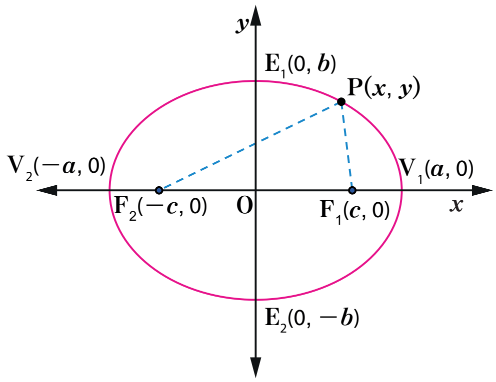
   a) La recta $y = x - 3$ con la parábola $x^2 = -4y$

   b) La recta $y = -x + 4$ con la parábola $y^2 = 2x$

Sección 2: La elipse

Contenido 1: Elipse con focos en el eje x

Definición



Elipse es el conjunto de todos los puntos P del plano tales que la suma de las distancias de P a los dos puntos fijos F_1 y F_2 (focos) es constante, es decir

$$PF_1 + PF_2 = 2a, \text{ donde } a > 0$$

El punto medio del segmento V_1V_2 se llama centro de la elipse. El eje mayor es el segmento V_1V_2, el eje menor es el segmento E_1E_2.

La ecuación de la elipse con eje mayor en x y centro en el origen (0, 0) es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ donde } a > b > 0.$$

(En la página 109 está la demostración de esta ecuación.)

Elementos de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, donde $a > b > 0$

1. Tiene dos vértices V_1 $(a, 0)$ y V_2 $(-a, 0)$ y dos extremos E_1 $(0, b)$ y E_2 $(0, -b)$.
2. El eje mayor y el eje menor están ubicados en los ejes x y y respectivamente, teniendo el primero longitud $2a$ y el segundo longitud $2b$.
3. El eje mayor contiene los dos focos F_1 $(c, 0)$ y F_2 $(-c, 0)$, con $c > 0$.
4. Se da la relación $c^2 = a^2 - b^2$ entre a, b y c. Por tanto $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

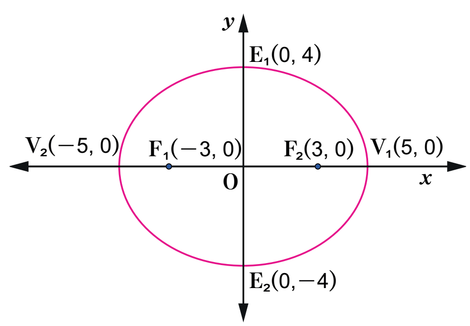
Ejemplo Determine la ecuación de la elipse cuyos focos son F_1 (3, 0) y F_2 (−3, 0) y vértices V_1 (5, 0) y V_2 (−5, 0).

Los focos y vértices están ubicados en el eje x, entonces el eje mayor también está ubicado en este, observándose que $c = 3$ y $a = 5$.

Se sustituye $a = 5$ y $c = 3$ en $c^2 = a^2 - b^2$ y se tiene

$$3^2 = 5^2 - b^2$$
$$9 = 25 - b^2$$
$$b^2 = 25 - 9$$
$$b^2 = 16$$
$$b = 4, \ (b > 0)$$

Por lo tanto, la ecuación de la elipse es $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.



E

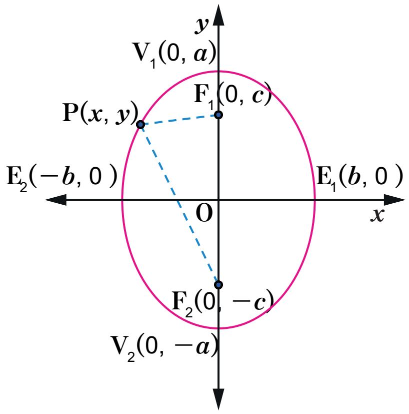
Determine la ecuación de cada elipse, de acuerdo con los siguientes datos.

a) Focos F_1 (5, 0) y F_2 (−5, 0), vértices V_1 (8, 0) y V_2 (−8, 0).

b) Focos F_1 (2, 0) y F_2 (−2, 0), vértices V_1 (9, 0) y V_2 (−9, 0).

Contenido 2: Elipse con focos en el eje y

La ecuación de la elipse con eje mayor sobre el eje y, y centro en el origen (0, 0) es:



$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1, \text{ donde } a>b>0.$$

Elementos de la elipse $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$, donde $a>b>0$

1. Tiene dos vértices $V_1\,(0, a)$ y $V_2\,(0, -a)$ y dos extremos $E_1\,(b, 0)$ y $E_2\,(-b, 0)$.
2. El eje mayor y el eje menor están ubicados en los ejes y y x respectivamente, teniendo el primero longitud $2a$ y el segundo longitud $2b$.
3. El eje mayor contiene los focos $F_1\,(0, c)$ y $F_2\,(0, -c)$, con $c>0$.
4. Se da la relación $c^2=a^2-b^2$ entre a, b y c. Por tanto $c=\sqrt{a^2-b^2}$.

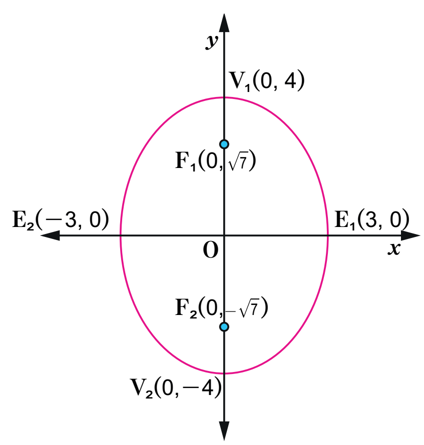
Ejemplo Determine la ecuación de la elipse con focos $F_1\,(0, \sqrt{7})$ y $F_2\,(0, -\sqrt{7})$ y vértices $V_1\,(0, 4)$ y $V_2\,(0, -4)$.

Como los focos y vértices están ubicados en el eje y, el eje mayor está sobre este eje.

De los focos se deduce que $c=\sqrt{7}$ y por los vértices que $a=4$.

Se sustituye $a=4$ y $c=\sqrt{7}$ en $c^2=a^2-b^2$

$$(\sqrt{7})^2=4^2-b^2$$
$$7=16-b^2$$
$$b^2=16-7$$
$$b^2=9$$
$$b=3,\ (b>0)$$



Por lo tanto, la ecuación es $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$.

E

Determine en cada inciso la ecuación de la elipse con los datos dados.

a) Focos $F_1\,(0, 3)$ y $F_2\,(0, -3)$, vértices $V_1\,(0, 4)$ y $V_2\,(0, -4)$.

b) Focos $F_1\,(0, 1)$ y $F_2\,(0, -1)$, vértices $V_1\,(0, 3)$ y $V_2\,(0, -3)$.

Contenido 3: Elementos de la elipse con focos en el eje x

P

Dada la ecuación de la elipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$, encuentre su centro, focos, vértices y extremos.

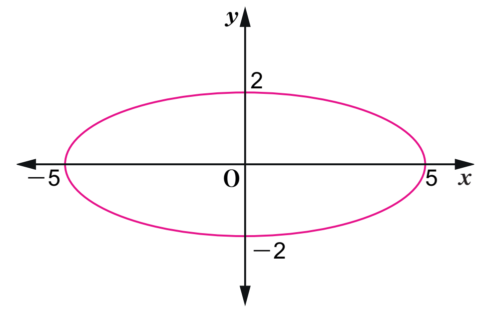
S

La ecuación $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$ se escribe en la forma $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$,
y como $0<2<5$, entonces $a=5$ y $b=2$.

Se utiliza la expresión $c^2=a^2-b^2$, se tiene que:

$$c^2=25-4=21$$

Por lo tanto, $c=\sqrt{21}$, $(c>0)$,
siendo los elementos de la elipse los siguientes:
Centro **(0, 0)**
Focos $\mathbf{F_1\,(\sqrt{21},\,0)}$ y $\mathbf{F_2\,(-\sqrt{21},\,0)}$
Vértices $\mathbf{V_1\,(5,\,0)}$ y $\mathbf{V_2\,(-5,\,0)}$ y extremos $\mathbf{E_1\,(0,\,2)}$ y $\mathbf{E_2\,(0,\,-2)}$



C

Para encontrar los elementos de una elipse cuyos focos se encuentran en el eje x, se identifican a y b a partir de la ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, con $a>b>0$, calculándose después c mediante la fórmula $c^2=a^2-b^2$. De esta forma se obtienen:
focos: $F_1\,(c,\,0)$ y $F_2\,(-c,\,0)$, vértices: $V_1\,(a,\,0)$ y $V_2\,(-a,\,0)$, extremos: $E_1\,(0,\,b)$ y $E_2\,(0,\,-b)$.

E_1

Encuentre los vértices, focos y extremos de las elipses dadas por las ecuaciones siguientes:

a) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

b) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

Ejemplo Dada la ecuación de la elipse $4x^2+100y^2=100$, obtenga sus vértices, focos y extremos.

La ecuación dada se transforma en la forma $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ dividiendo ambos lados por 100

$$\frac{4x^2}{100}+\frac{100y^2}{100}=\frac{100}{100},\quad \text{es decir}\quad \frac{x^2}{25}+y^2=1$$

de donde se obtiene $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{1^2}=1$, luego, $a=5$ y $b=1$.
Utilizando la expresión $c^2=a^2-b^2$, se tiene que:

$$c^2=25-1=24$$

Por lo tanto $c=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$, $(c>0)$.

Su centro es **(0, 0)**, los focos $\mathbf{F_1\,(2\sqrt{6},0)}$ y $\mathbf{F_2\,(-2\sqrt{6},\,0)}$,
los vértices $\mathbf{V_1\,(5,\,0)}$ y $\mathbf{V_2\,(-5,\,0)}$ y los extremos $\mathbf{E_1\,(0,\,1)}$ y $\mathbf{E_2\,(0,\,-1)}$.

E_2

Encuentre vértices, focos y extremos de las elipses dadas por las siguientes ecuaciones:

a) $3x^2+27y^2=27$

b) $x^2+9y^2=36$

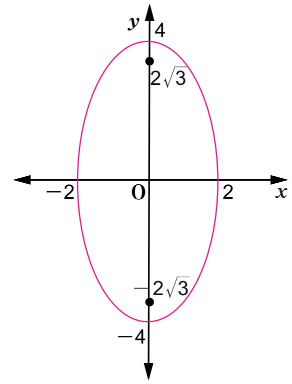
Contenido 4: Elementos de la elipse con focos en el eje y

P

Dada la ecuación de la elipse $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$, encuentre su centro, focos, vértices y extremos.

S

La ecuación $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$ se escribe en la forma $\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$, y como $0<2<4$, entonces $a=4$ y $b=2$.



Se utiliza la expresión $c^2=a^2-b^2$, se tiene que

$$c^2=16-4=12$$

Por lo tanto $c=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$, $(c>0)$, siendo los elementos de la elipse los siguientes:

Centro **(0, 0)**

Focos $\mathbf{F_1}$ **(0, $2\sqrt{3}$)** y $\mathbf{F_2}$ **(0, $-2\sqrt{3}$)**

Vértices $\mathbf{V_1}$ **(0, 4)** y $\mathbf{V_2}$ **(0, −4)** y extremos $\mathbf{E_1}$ **(2, 0)** y $\mathbf{E_2}$ **(−2, 0)**.

C

Para encontrar los elementos de una elipse cuyos focos se encuentran en el eje y, se identifican a y b a partir de la ecuación $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$, con $a>b>0$, calculándose después c mediante la fórmula $c^2=a^2-b^2$, De esta forma se obtienen:
focos: F_1 $(0, c)$ y F_2 $(0, -c)$, vértices: V_1 $(0, a)$ y V_2 $(0, -a)$, extremos: E_1 $(b, 0)$ y E_2 $(-b, 0)$.

Ejemplo Dada la ecuación de la elipse $25x^2+9y^2=225$, obtenga sus vértices, focos y extremos.

La ecuación dada se transforma en la forma $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ dividiendo ambos lados por 225

$$\frac{25x^2}{225}+\frac{9y^2}{225}=\frac{225}{225}, \text{ es decir } \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1,$$

de donde se obtiene $\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$. Luego, $a=5$ y $b=3$

Utilizando la expresión $c^2=a^2-b^2$, se tiene que

$$c^2=25-9=16$$

Por lo tanto $c=\sqrt{16}=4$, $(c>0)$.

En conclusión, su centro es **(0, 0)**, los focos $\mathbf{F_1}$ **(0, 4)** y $\mathbf{F_2}$ **(0, −4)**, vértices $\mathbf{V_1}$ **(0, 5)** y $\mathbf{V_2}$ **(0, −5)** y extremos $\mathbf{E_1}$ **(3, 0)** y $\mathbf{E_2}$ **(−3, 0)**.

E

Encuentre vértices, focos y extremos de las elipses dadas por las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{36}=1$ b) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{49}=1$ c) $9x^2+4y^2=36$

Contenido 5: Comprobemos lo aprendido 2

1. Determine en cada inciso la ecuación de la elipse con los elementos dados:

   a) Focos $F_1\,(1, 0)$ y $F_2\,(-1, 0)$, vértices $V_1\,(3, 0)$ y $V_2\,(-3, 0)$

   b) Focos $F_1\,(3, 0)$ y $F_2\,(-3, 0)$, vértices $V_1\,(4, 0)$ y $V_2\,(-4, 0)$

   c) Focos $F_1\,(0, 2)$ y $F_2\,(0, -2)$, vértices $V_1\,(0, 5)$ y $V_2\,(0, -5)$

   d) Focos $F_1\,(0, 5)$ y $F_2\,(0, -5)$, vértices $V_1\,(0, 7)$ y $V_2\,(0, -7)$

2. Encuentre vértices, focos y extremos a partir de la ecuación dada para cada elipse

   a) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{36}=1$

   b) $\dfrac{x^2}{16}+y^2=1$

   c) $3x^2+4y^2=48$

   d) $4x^2+16y^2=64$

   e) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{16}=1$

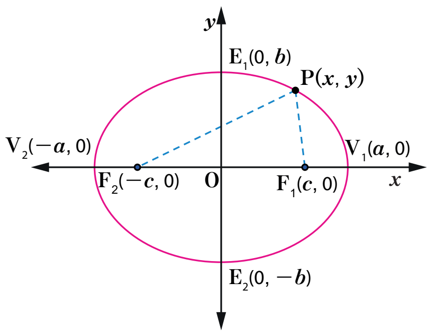
   f) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}=1$

   g) $2x^2+9y^2=18$

Desafío

Demostración de la ecuación de la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ donde $a > b > 0$

Definición



Elipse es el conjunto de todos los puntos P del plano tales que la suma de las distancias de P a los dos puntos fijos F_1 y F_2 (focos) es constante, es decir

$$PF_1 + PF_2 = 2a.$$

El punto medio del segmento V_1V_2 se llama centro de la elipse y está ubicado en el eje x. El eje mayor es el segmento V_1V_2, y el eje menor es el segmento E_1E_2.

La ecuación de la elipse con eje mayor en x y centro en el origen (0, 0) es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ donde } a > b > 0.$$

P Demuestre que la ecuación de la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, donde $a > b > 0$.

S

Sean $F_1(c,0)$ y $F_2(-c,0)$ los focos de la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, donde $a > c > 0$.

Sea $P(x,y)$ un punto cualquiera en la elipse. Por definición de elipse

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

Como $\quad PF_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \;$ y $\; PF_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

Se transpone $\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Se eleva ambos lados al cuadrado y se efectúan las operaciones

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2$$

$$4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 4a^2 + 4cx$$

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx$$

Se eleva ambos lados al cuadrado otra vez

$$a^2(x+c)^2 + a^2y^2 = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2$$

Se opera

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Se hace $a^2 - c^2 = b^2 y$, se sustituye $a^2 - b^2$ por c^2

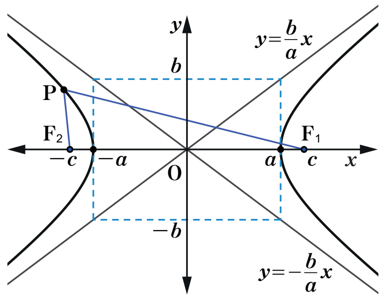
$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Entonces $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Sección 3: La hipérbola

Contenido 1: Hipérbola con focos en el eje x

Definición



Hipérbola es el conjunto de todos los puntos P del plano con la propiedad de que el valor absoluto de la diferencia de las distancias de P a los puntos fijos F_1 y F_2 (focos), es constante, es decir, $|\mathrm{PF}_1-\mathrm{PF}_2|=2a$, donde $a>0$.

El punto medio del segmento que une a F_1 y F_2 se llama **centro** O de la hipérbola, V_1 y V_2 son los vértices de esta.

La ecuación de la hipérbola con centro en el origen (0, 0) y focos ubicados en el eje x es:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \text{ donde } a>0 \text{ y } b>0.$$

(En la página 115 está la demostración de esta ecuación)

Elementos de la Hipérbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, donde $a>0$ y $b>0$

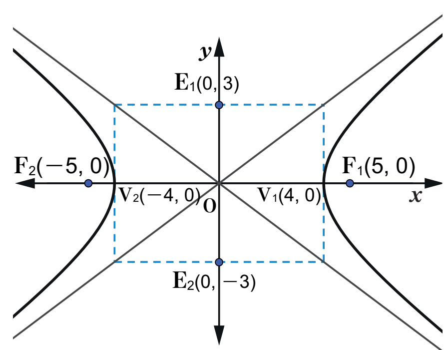
1. Tiene dos focos $\mathrm{F}_1\,(c, 0)$ y $\mathrm{F}_2\,(-c, 0)$, donde $c>0$; dos vértices $\mathrm{V}_1\,(a, 0)$ y $\mathrm{V}_2\,(-a, 0)$ y dos extremos $\mathrm{E}_1\,(0, b)$ y $\mathrm{E}_2\,(0, -b)$. Los focos y vértices están sobre el eje x.
2. La relación entre a, b y c queda establecida con la expresión $c^2=a^2+b^2$.
3. Tiene dos asíntotas, determinadas por las ecuaciones $y=\frac{b}{a}x$ y $y=-\frac{b}{a}x$.

Ejemplo Determine la ecuación de la hipérbola y sus asíntotas, si tiene por focos $\mathrm{F}_1\,(5, 0)$ y $\mathrm{F}_2\,(-5, 0)$ y vértices $\mathrm{V}_1\,(4, 0)$ y $\mathrm{V}_2\,(-4, 0)$.

Dado que los focos y vértices están en el eje x, la ecuación de la hipérbola es de la forma $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. De los focos se deduce que $c=5$ y por los vértices que $a=4$.

Se sustituye $a=4$ y $c=5$ en $c^2=a^2+b^2$

$$5^2=4^2+b^2$$
$$25=16+b^2$$
$$b^2=25-16=9$$
$$b=3, \quad (b>0)$$



Por lo tanto, la ecuación de la hipérbola es $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

Las asíntotas son: $y=\frac{3}{4}x$ y $y=-\frac{3}{4}x$

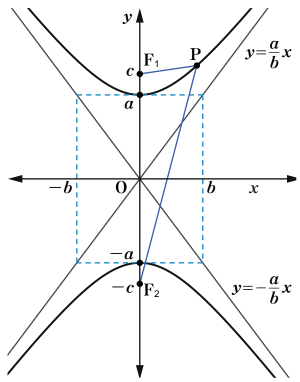
E

Determine para cada inciso la ecuación de la hipérbola y sus asíntotas si tiene:

a) Focos $\mathrm{F}_1\,(10, 0)$ y $\mathrm{F}_2\,(-10, 0)$, vértices $\mathrm{V}_1\,(6, 0)$ y $\mathrm{V}_2\,(-6, 0)$.

b) Focos $\mathrm{F}_1\,(\sqrt{5}, 0)$ y $\mathrm{F}_2\,(-\sqrt{5}, 0)$, vértices $\mathrm{V}_1\,(1, 0)$ y $\mathrm{V}_2\,(-1, 0)$.

Contenido 2: Hipérbola con focos en el eje y



Ecuación de la hipérbola con centro en el origen (0, 0) y focos ubicados en el eje y

La ecuación de la hipérbola con centro en el origen (0, 0) y focos ubicados en el eje y es:

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1,\ \text{donde}\ a>0\ \text{y}\ b>0.$$

Elementos de la hipérbola $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$, donde $a>0$ y $b>0$

1. Tiene dos focos F_1 $(0, c)$ y F_2 $(0, -c)$, donde $c>0$; dos vértices V_1 $(0, a)$ y V_2 $(0, -a)$ y dos extremos E_1 $(b, 0)$ y E_2 $(-b, 0)$. Los focos y vértices están en el eje y.
2. La relación entre a, b y c queda establecida con la expresión $c^2=a^2+b^2$.
3. Tiene dos asíntotas, determinadas por las ecuaciones $y=\frac{a}{b}x$ y $y=-\frac{a}{b}x$.

Ejemplo Determine la ecuación de la hipérbola y sus asíntotas, si tiene por focos F_1 (0, 4) y F_2 (0, −4) y vértices V_1 (0, 3) y V_2 (0, −3).

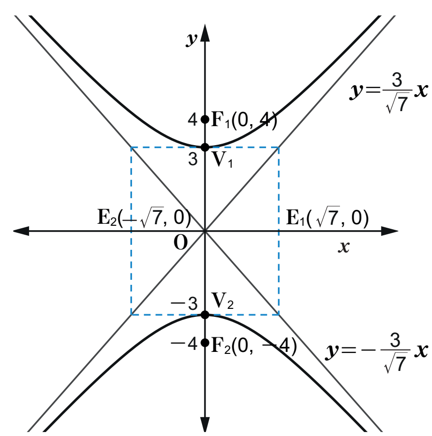
Dado que los focos y vértices están en el eje y, la ecuación de la hipérbola es de la forma $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$. De los focos se deduce que $c=4$ y por los vértices que $a=3$.

Sustituyendo $a=3$ y $c=4$ en $c^2=a^2+b^2$

$$4^2=3^2+b^2$$
$$16=9+b^2$$
$$b^2=16-9=7$$
$$b=\sqrt{7},\quad (b>0)$$

Por lo tanto, la ecuación de la hipérbola es $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{7}=1$

Las asíntotas son: $y=\frac{3}{\sqrt{7}}x$ y $y=-\frac{3}{\sqrt{7}}x$



E

Determine en cada inciso la ecuación de la hipérbola y sus asíntotas si tiene:

a) Focos F_1 (0, 5) y F_2 (0, −5) y vértices V_1 (0, 3) y V_2 (0, −3).

b) Focos son F_1 $(0, \sqrt{8})$ y F_2 $(0, -\sqrt{8})$ y vértices V_1 (0, 2) y V_2 (0, −2).

Contenido 3: Elementos de la hipérbola con focos en el eje x

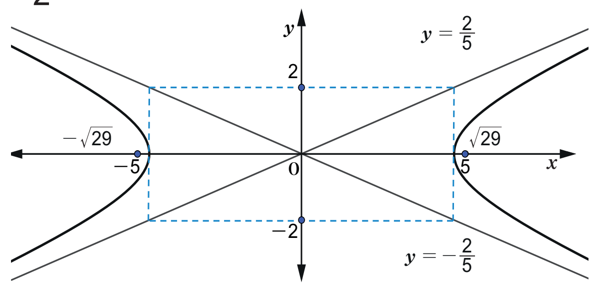
P

Dada la ecuación de la hipérbola $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1$, obtenga su centro, focos, vértices y extremos.

S

La ecuación $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1$ se escribe en la forma $\frac{x^2}{5^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$, de donde $a = 5$ y $b = 2$.

Se utiliza la expresión $c^2 = a^2 + b^2$, se tiene que $c^2 = 25 + 4 = 29$.



Por lo tanto $c = \sqrt{29}$, $(c > 0)$ siendo los elementos de la hipérbola los siguientes:

Centro: **(0, 0)**

Focos: $\mathbf{F_1}$ **($\sqrt{29}$, 0)** y $\mathbf{F_2}$ **($-\sqrt{29}$, 0)**

Vértices: $\mathbf{V_1}$ **(5, 0)** y $\mathbf{V_2}$ **(−5, 0)** y extremos: $\mathbf{E_1}$ **(0, 2)** y $\mathbf{E_2}$ **(0, −2)**.

C

Para encontrar los elementos de una hipérbola cuyos focos están en el eje x, se identifican a y b a partir de la ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, calculándose después c mediante la fórmula $c^2 = a^2 + b^2$, con $c > 0$. De esta forma se obtienen:

Focos: F_1 $(c, 0)$ y F_2 $(-c, 0)$, vértices: V_1 $(a, 0)$ y V_2 $(-a, 0)$, extremos: E_1 $(0, b)$ y E_2 $(0, -b)$.

E1

Dada la ecuación de la hipérbola obtenga sus vértices, focos y extremos.

a) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

b) $\frac{x^2}{25} - y^2 = 1$

Ejemplo Dada la ecuación de la hipérbola $9x^2 - 4y^2 = 36$, obtenga centro, vértices, focos y extremos.

La ecuación dada se transforma en la forma $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, dividiendo ambos lados por 36.

$$\frac{9x^2}{36} - \frac{4y^2}{36} = \frac{36}{36}, \quad \text{es decir} \quad \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1,$$

de donde se obtiene $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$, luego $a = 2$ y $b = 3$.

Utilizando la expresión $c^2 = a^2 + b^2$, se obtiene que:

$$c^2 = 4 + 9 = 13,$$

por lo tanto $c = \sqrt{13}$, $(c > 0)$.

Su centro es **(0, 0)**, los focos $\mathbf{F_1}$ **($\sqrt{13}$, 0)** y $\mathbf{F_2}$ **($-\sqrt{13}$, 0)**, vértices $\mathbf{V_1}$ **(2, 0)** y $\mathbf{V_2}$ **(−2, 0)** y extremos $\mathbf{E_1}$ **(0, 3)** y $\mathbf{E_2}$ **(0, −3)**.

E2

Dada las ecuaciones de las hipérbolas encuentre sus vértices, focos y extremos.

a) $4x^2 - y^2 = 4$

b) $9x^2 - 16y^2 = 144$

Contenido 4: Elementos de la hipérbola con focos en el eje y

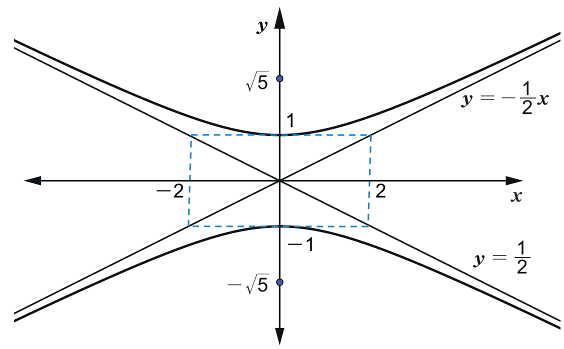
P

Dada la ecuación de la hipérbola $y^2-\frac{x^2}{4}=1$, obtenga su centro, focos, vértices y extremos.

S

La ecuación $y^2-\frac{x^2}{4}=1$, se lleva a la forma $\frac{y^2}{1^2}-\frac{x^2}{2^2}=1$, lo cual permite afirmar que $a=1$ y $b=2$. Se utiliza la expresión $c^2=a^2+b^2$, para obtener c, así se tiene

$c^2=1+4=5$, luego $c=\sqrt{5}$, $(c>0)$



Por tanto, los elementos de la hipérbola dada son:

Centro: **(0, 0)**

Focos: $\mathbf{F_1}$ **(0, $\sqrt{5}$)** y $\mathbf{F_2}$ **(0, $-\sqrt{5}$)**

Vértices: $\mathbf{V_1}$**(0, 1)** y $\mathbf{V_2}$ **(0, −1)** y extremos: $\mathbf{E_1}$ **(2, 0)** y $\mathbf{E_2}$ **(−2, 0)**.

C

Para encontrar los elementos de una hipérbola cuyos focos están en el eje y, se identifican a y b a partir de la ecuación $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$, calculándose después c mediante la fórmula, con $c>0$. De esta forma se obtienen:

Focos: F_1 $(0, c)$ y F_2 $(0, -c)$, vértices: V_1 $(0, a)$ y V_2 $(0, -a)$, extremos: E_1 $(b, 0)$ y E_2 $(-b, 0)$.

E1

Dada la ecuación de la hipérbola obtenga sus vértices, focos y extremos.

a) $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{4}=1$ b) $\frac{y^2}{25}-x^2=1$

Ejemplo Dada la ecuación de la hipérbola $25y^2-4x^2=100$, obtenga centro, vértices, focos y extremos.

Para transformar la ecuación dada a la forma $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$, se divide por 100 cada lado.

$$\frac{25y^2}{100}-\frac{4x^2}{100}=\frac{100}{100},$$

es decir $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{25}=1$, transformándose esta en $\frac{y^2}{2^2}-\frac{x^2}{5^2}=1$ luego $a=2$ y $b=5$.

Utilizando la expresión $c^2=a^2+b^2$, se tiene $c^2=4+25=29$ por lo tanto $c=\sqrt{29}$, $(c>0)$

Su centro es **(0, 0)**, focos $\mathbf{F_1}$ **(0, $\sqrt{29}$)** y $\mathbf{F_2}$ **(0, $-\sqrt{29}$)**, vértices $\mathbf{V_1}$ **(0, 2)** y $\mathbf{V_2}$ **(0, −2)** y extremos $\mathbf{E_1}$ **(5, 0)** y $\mathbf{E_2}$ **(−5, 0)**.

E2

Dadas las ecuaciones de la hipérbola encuentre sus vértices, focos y extremos.

a) $9y^2-x^2=9$ b) $25y^2-16x^2=400$

Contenido 5: Comprobemos lo aprendido 3

$\mathcal{E}_2$

1. Determine la ecuación y asíntotas de cada hipérbola con:

   a) Focos F_1 (5, 0) y F_2 (−5, 0), vértices V_1 (4, 0) y V_2 (−4, 0)

   b) Focos F_1 (3, 0) y F_2 (−3, 0), vértices V_1 (1, 0) y V_2 (−1, 0)

   c) Focos F_1 (0, 10) y F_2 (0, −10), vértices V_1 (0, 6) y V_2 (0, −6)

   d) Focos F_1 (0, 5) y F_2 (0, −5), vértices V_1 (0, 2) y V_2 (0, −2)

2. Encuentre vértices, focos y extremos a partir de la ecuación dada para cada hipérbola.

   a) $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

   b) $\dfrac{x^2}{36} - y^2 = 1$

   c) $16x^2 - y^2 = 16$

   d) $4x^2 - 36y^2 = 144$

3. Encuentre vértices, focos y extremos a partir de la ecuación dada para cada hipérbola.

   a) $\dfrac{y^2}{16} - \dfrac{x^2}{25} = 1$

   b) $\dfrac{y^2}{49} - x^2 = 1$

   c) $25y^2 - x^2 = 25$

   d) $4y^2 - 9x^2 = 36$

Desafío

Demostración de la ecuación de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, donde $a>0$ y $b>0$

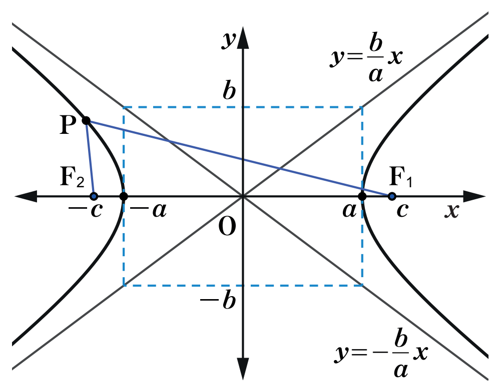
Definición

La **Hipérbola** es el conjunto de todos los puntos P del plano con la propiedad de que la diferencia de las distancias de P a los puntos fijos F_1 y F_2, llamados focos, es constante, es decir, $|PF_1 - PF_2| = 2a$, donde $a>0$.

El punto medio del segmento que une a F_1 y F_2 se llama **centro** O de la hipérbola, V_1 y V_2 son los vértices de esta.

La ecuación de la hipérbola con centro en el origen (0, 0) y focos ubicados en el eje x es:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ donde } a>0 \text{ y } b>0.$$



P Demuestre que la ecuación de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, donde $a>0$ y $b>0$.

S

Sean $F_1(c, 0)$ y $F_2(-c, 0)$ los focos de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, donde $c>a>0$.

Sea $P(x,y)$ un punto cualquiera en la hipérbola.

Por definición de hipérbola $\quad |PF_1 - PF_2| = 2a$

$$PF_1 - PF_2 = \pm 2a$$

Como $\quad PF_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad$ y $\quad PF_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$,

Entonces $\quad \sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a$

Se transpone $\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \pm 2a$$

Desafío

Se eleva ambos lados al cuadrado y se efectúan las operaciones

$$(x-c)^2+y^2=(x+c)^2+y^2\pm 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+4a^2$$

$$-4a^2-4cx=\pm 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$a^2+cx=\pm a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

Se eleva al cuadrado otra vez

$$a^4+2a^2cx+c^2x^2=a^2(x+c)^2+a^2y^2$$

Se opera $(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$

Se hace $c^2-a^2=b^2$ con $c>a>0$, se sustituye c^2-a^2 por b^2

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$$

Entonces $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

Unidad 6

Técnicas de Conteo y Probabilidades

Sección 1 Técnicas de conteo

Sección 2 Probabilidades

Sección 1: Técnicas de conteo

Contenido 1: Diagrama de árbol

P

Elías quiere diseñar la carátula de un libro cuyo título puede ser de color azul o rojo y el fondo verde, naranja, café o blanco. ¿Cuántas combinaciones de colores posibles hay para la carátula?

S

Una posible combinación para la carátula es el título en azul y fondo verde. Todas las posibles combinaciones se muestran en el siguiente diagrama:

Color de Título	Color de Fondo	Combinaciones de colores
Azul (A)	Verde (V)	A - V
	Naranja (N)	A - N
	Café (C)	A - C
	Blanco (B)	A - B
Rojo (R)	Verde (V)	R - V
	Naranja (N)	R - N
	Café (C)	R - C
	Blanco (B)	R - B

En conclusión, se pueden realizar 8 **combinaciones** de colores para diseñar la carátula del libro.

C

Un diagrama de árbol es un recurso gráfico donde se muestran todas las posibles combinaciones de una acción programada, las cuales pueden llevarse a cabo en un número finito de formas. Se coloca una “rama” por cada posibilidad.

E_1

Utilice un diagrama de árbol para resolver el siguiente problema:

Misael tiene una camisa azul y otra blanca y 3 corbatas de color amarillo, verde y café, respectivamente.

¿Cuántas formas de combinar una camisa y una corbata tiene Misael?

Ejemplo Se requiere la formación de un solo número de tres cifras con los dígitos 1, 2, 3, sin repetición de alguno de estos, para abrir una cerradura de combinación instalada en una puerta. Encuentre el total de números de tres cifras que se deben formar si no se conoce la combinación correcta.

Si la primera cifra del número fuese 1, la segunda cifra sería 2 o 3. Si escogemos el 2, la tercera cifra es 3 obteniendo el arreglo 123. Pero si la segunda cifra fuese el número 3, la tercera cifra tendría que ser 2, es decir, formando el número 132.

En el siguiente diagrama de árbol se muestran las 6 cifras posibles dentro de las cuales se encuentra la combinación correcta para abrir la cerradura.

1ra cifra	**2da cifra**	**3ra cifra**	**Combinaciones**
1	2	3	123
	3	2	132
2	1	3	213
	3	1	231
3	1	2	312
	2	1	321

En conclusión, el total de arreglos posibles es **6**.

Resuelva la siguiente situación utilizando un diagrama de árbol:

Rubén tiene 2 pantalones, 2 camisetas y 2 gorras, de colores azul y negro en cada caso.

¿Cuántos trajes de un pantalón, una camiseta y una gorra puede formar?

Contenido 2: Principio del conteo de la suma

P

Determine los posibles pares de números cuya suma sea 6 o 9, que se pueden obtener al lanzar 2 dados A y B.

S

A la derecha se muestran todos los resultados posibles al lanzar dos dados, representados como pares. Así, (1, 2) indica que el dado A cae en 1 y el dado B muestra 2 en la cara superior.

Hay 5 pares en los que la suma de los valores que aparecen en las caras es 6. Estos son:

(5,1), (4, 2), (3, 3), (2, 4) y (1, 5).

También, los pares cuyos componentes suman 9 son 4:

(6, 3), (5, 4), (4, 5) y (3, 6).

A \ B	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2,1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3,1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4,1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5,1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6,1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Suman 6

Suman 9

Se observa que los pares cuyos componentes suman 6 son diferentes de los que suman 9. Luego, el número de pares con componentes que suman 6 o 9 es

$$5+4=\mathbf{9}.$$

C

Si la acción A se puede realizar de m formas distintas y la acción B se puede realizar de n maneras distintas, y si las formas en las que puede ocurrir A son distintas de las de B, entonces se puede realizar la acción A o B de $m+n$ formas distintas.

Ejemplo Un cierto tipo de repuesto de automóvil se vende en 6 tiendas de Masaya y en 8 tiendas de Granada. Diga en cuantas tiendas se puede comprar el repuesto.

Se define la situación A: obtener el repuesto en Masaya, la cual puede ocurrir de 6 maneras, y B: obtener el repuesto en Granada, que puede darse de 8 formas, entonces el número total de tiendas en las que se puede obtener el repuesto es

$$6+8=\mathbf{14}.$$

E

Utilice el principio de conteo de la suma para resolver los siguientes ejercicios:

a) Si se lanzan dos dados, determine el número de casos posibles en los que la suma de los números de las caras es 7 u 11.

b) Un grupo escolar formado por 12 niñas y 14 niños desean elegir su presidente. ¿De cuántas maneras pueden hacer la elección?

c) Los grupos de décimo A y décimo B de un determinado Instituto constan de 43 y 38 alumnos respectivamente. ¿De cuántas maneras puede seleccionarse un estudiante de décimo A o de décimo B?

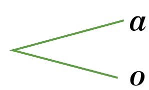
Contenido 3: Principio de conteo de la multiplicación

P

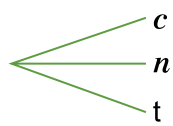
¿De cuántas maneras se puede escoger una vocal y una consonante de la palabra “canto”?

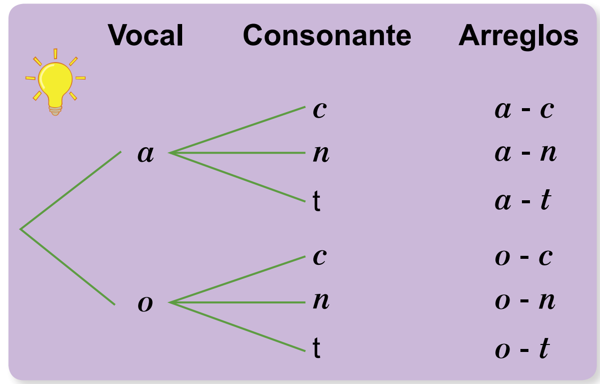
S

La palabra “canto” tiene las vocales: a y o, y las consonantes c, n y t, es decir hay dos posibilidades de escoger una vocal:



Después de haber seleccionado una vocal, hay tres posibilidades de escoger una consonante:





El diagrama de árbol de la derecha muestra las 6 maneras de escoger primero una vocal y después una consonante. Este número coincide con el producto del número de formas de obtener una vocal (2) y el número de formas de obtener una consonante (3), es decir, (número de formas de escoger vocal) (número de formas de escoger consonante) = (2)(3) = 6.

C

Si un suceso o evento A puede ocurrir de m maneras, y luego otro suceso B puede ocurrir de n maneras, entonces el total de formas en que ambos pueden ocurrir es mn.

Si se tienen 3 o más sucesos, el número de formas en que estos pueden ocurrir simultáneamente es el producto de las formas de ocurrencia de cada uno.

Ejemplo Una heladería ofrece cono de sorbete con un solo sabor entre fresa, vainilla y chocolate y un único baño que puede ser caramelo o maní. Si Luis quiere comprar un cono de sorbete, ¿de cuántas maneras puede combinar sabores y baños?

Luis tiene 3 formas de elegir el sabor y 2 para escoger el baño del helado, de modo que cuenta con

$$(3)(2) = 6$$

formas de escoger sabores y baños.

E

Utilice el principio de conteo de la multiplicación para resolver los siguientes problemas:

a) Un menú del día permite seleccionar un plato fuerte entre 5 y una bebida entre 3. ¿De cuántas formas distintas se puede solicitar una comida y bebida?

b) En una fábrica de zapatos de Masaya se elaboran 8 estilos de zapatos de mujer en 6 numeraciones distintas. ¿Qué cantidad debe comprar un comerciante para tener en su negocio de todos los estilos y tamaños?

Contenido 4: Factorial de un número natural

Definición

Factorial de un número natural

El factorial de un número natural n, denotado por $n!$, se define como

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots(3)(2)(1).$$

El símbolo $n!$ se lee "n factorial". En particular,

$$0! = 0 \quad \text{y} \quad 1! = 1$$

Ejemplo Complete las casillas con los factoriales restantes:

$1! = 1$	$2! = (2)(1) = 2$	$3! =$	$4! =$	$5! =$

Al calcular $3!$, $4!$ y $5!$ se obtiene

$3! = (3)(2)(1) = 6$ $\qquad$ $4! = (4)(3)(2)(1) = 24$ $\qquad$ $5! = (5)(4)(3)(2)(1) = 120$

De modo que la tabla completa es

$1! = 1$	$2! = (2)(1) = 2$	$3! = \mathbf{6}$	$4! = \mathbf{24}$	$5! = \mathbf{120}$

E1

Calcule $6!$ y $7!$

P

¿Cuáles y cuántos números de tres cifras puede formar utilizando los dígitos 1, 2 y 3?, ¿importa el lugar que ocupa cada cifra en los arreglos encontrados? Recuerde la escritura de un número de tres cifras en centenas, decenas y unidades: | C | D | U |

S

Arreglos que inician con 1:	Arreglos que inician con 2:	Arreglos que inician con 3:
123, 132	213, 231	312, 321

Se tienen 6 números de tres cifras, lo cual se verifica aplicando el principio de la multiplicación: Se puede ubicar cualquiera de los 3 dígitos en la posición de las centenas, ocupada esta posición quedan 2 para las decenas, y luego de esto solamente 1 para las unidades:

Centenas		Decenas		Unidades	
3	$\times$	2	$\times$	1	$= \mathbf{6}$

$3! = (3)(2)(1) = 6$

El lugar que ocupa cada dígito es importante porque se generan diferentes arreglos.

C

El total de arreglos que se pueden hacer con n elementos distintos, en los que importa el orden, es $\boldsymbol{n}$**!**.

E2

a) ¿Cuántos y cuáles arreglos pueden obtenerse con las letras de la palabra "paz"?

b) En una clase de danza participan 5 bailarines. ¿De cuántas maneras pueden colocarse en fila?

c) ¿De cuántas formas se puede confeccionar una bandera de 4 franjas de distinto color cada una?

d) El dueño de una librería desea exponer en un escaparate 6 banderines correspondientes a 6 países. ¿De cuántas maneras puede hacerlo si los quiere colocar en fila?

Contenido 5: Permutaciones

P

¿Cuántos números de 3 cifras se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5, si no se permite la repetición de estos?

S

Se aplica el principio de la multiplicación:

	Centenas		Decenas		Unidades	
5 dígitos pueden ubicarse →	5	$\times$	4	$\times$	3	$=60$
	Solo 4 pueden ubicarse				Solo 3 pueden ubicarse	

Se pueden formar 60 números de tres cifras con los dígitos dados. Cada número que se obtiene representa una permutación de 3 dígitos tomados de un total de 5. Luego, el número de arreglos es

$$ {}_5P_3 = \underbrace{(5)(4)(3)}_{\text{Se toman 3 factores}} = \mathbf{60}. $$

C

Una permutación es un arreglo sin repeticiones de todos o parte de los elementos de un conjunto para el cual importa el orden.

El número de permutaciones de n objetos distintos tomando r a la vez es

$$ {}_nP_r = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}_{r\text{ factores}} $$

También podemos calcular ${}_nP_r$ mediante ${}_nP_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$.

Cuando $n=r$, ${}_nP_n = n!$

Ejemplo 1 Calcule ${}_6P_4$.

En este caso $n=6$, $r=4$. De modo que

$$ {}_6P_4 = (6)(5)(4)(3) = \mathbf{360}. $$

E_1

Calcule ${}_6P_2$, ${}_5P_4$ y ${}_8P_5$.

Ejemplo 2 Es necesario elegir al presidente, vicepresidente, secretario y vocal de un comité sindical formado por 8 personas. ¿De cuántas formas se puede efectuar esta elección si cada miembro del comité puede ocupar solo un cargo?

Se debe hallar el número de arreglos sin repetición de 8 elementos tomados de a 4. Es importante saber que cada cargo es ocupado por exactamente una de las ocho personas. De modo que, siendo $n=8$ y $r=4$ se tiene

$$ {}_8P_4 = (8)(7)(6)(5) = 1680. $$

Luego, hay **1 680** formas en que se puede efectuar la elección.

E_2

a) ¿Cuántos arreglos de 3 letras se pueden formar con las letras S, **A**, **M**, **K**, si no se permite la repetición de estas?

b) ¿De cuántas formas se puede confeccionar una bandera de 4 franjas de distintos colores si se tiene telas de 5 colores distintos?

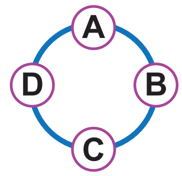
Contenido 6: Permutaciones circulares

P

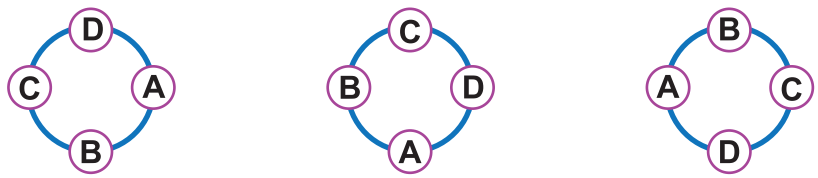
¿De cuántas formas distintas se pueden sentar 4 personas alrededor de una mesa circular?

S

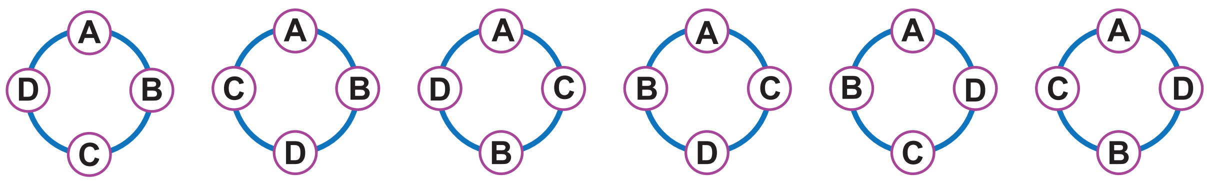
Se denota por $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ las 4 personas. Una manera de que estas ocupen la mesa es



Sin embargo, este arreglo no difiere de los siguientes



ya que en esta situación no existe una primera o última posición, solo interesa quién se sienta a la “izquierda” y quién a la “derecha” de cada una de las personas. Por ejemplo, si se fija $\mathbf{A}$ en una misma posición, los 3 restantes pueden ubicarse de $3! = (3)(2)(1) = 6$ maneras, de modo que las formas distintas en las que pueden sentarse 4 personas son 6:



Nótese que el total de arreglos diferentes para ubicar 4 personas en forma circular es

$$6 = (3)(2)(1) = 3! = (4-1)!$$

Total de personas

Es decir, $(4-1)! = \mathbf{6}$.

C

El número de permutaciones o arreglos circulares de n objetos distintos es igual a $\mathbf{(n-1)!}$.

Ejemplo ¿De cuántas maneras pueden sembrarse 6 árboles de distintas especies alrededor de una rotonda de Managua?

Dado que los arreglos a formar son circulares, se calcula el número de permutaciones circulares con $n = 6$:

$$(6-1)! = 5! = (5)(4)(3)(2)(1) = 120.$$

En total se tienen **120 formas** de sembrarse 6 árboles en torno a una rotonda de la capital.

E

Resuelva los siguientes problemas:

a) Una familia de 3 personas almuerza diariamente en una mesa circular. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden sentar alrededor de la mesa?

b) Juan, Pedro, Jesús y Alberto se reúnen a jugar dominó, ¿de cuántas maneras pueden sentarse a la mesa de juego, si esta es de forma circular?

Contenido 7: Combinaciones (1)

P

Se tienen 4 fichas de colores: Azul , Rojo , Verde y Café . ¿Cuántos arreglos diferentes se pueden realizar tomando tres de estas fichas?

S

Se observa que el orden en los arreglos a efectuar no es importante, ya que, por ejemplo, no hay diferencia en los arreglos

Azul – Rojo – Verde y Azul – Verde – Rojo

Tomando 3 de los colores dados, se tienen $3!=6$ arreglos indistintos. Utilizando la notación Azul: $\mathbf{A}$, Rojo: $\mathbf{R}$, Verde: $\mathbf{V}$ y Café: $\mathbf{C}$, se tiene que los arreglos diferentes son solamente 4: ARV, AVC, ARC, RVC. Cada uno de estos tiene asociados 6 arreglos indistintos:

4 arreglos diferentes	Arreglos indistintos						
ARV	$3!$	ARV	AVR	RAV	RVA	VAR	VRA
AVC	$3!$	AVC	ACV	CAV	CVA	VAC	VCA
ARC	$3!$	ARC	ACR	RAC	RCA	CAR	CRA
RVC	$3!$	RVC	RCV	VRC	VCR	CRV	CVR

$24 = {}_4P_3$

Por lo anterior:

$$(4)(3!) = 24 = {}_4P_3.$$

Es decir,

$$\frac{{}_4P_3}{3!} = 4.$$

C

Una combinación es un arreglo, en el que no importa el orden, de r objetos seleccionados sin repetir de entre n objetos distintos.

El número de combinaciones de n objetos distintos, tomando r a la vez, denotado por ${}_nC_r$, está dado por la fórmula

$$ {}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} .$$

Ejemplo Calcule ${}_5C_3$.

En este caso $n=5$, $r=3$. De modo que

$$ {}_5C_3 = \frac{{}_5P_3}{3!} = \frac{(5)(4)(\cancel{3})}{(\cancel{3})(2)(1)} = \frac{20}{2} = 10.$$

E

Calcule el total de combinaciones en cada caso:

a) ${}_6C_2$ b) ${}_6C_4$ c) ${}_7C_4$

Contenido 8: Combinaciones (2)

Ejemplo 1 ¿Cuántos comités distintos, integrados por 3 personas, se pueden formar a partir de un grupo de 6 personas?

El orden de selección para formar un comité no es relevante. Luego, se debe calcular el número de combinaciones de 6 objetos, tomando 3 a la vez:

$$ {}_6C_3 = \frac{{}_6P_3}{3!} = \frac{(6)(5)(4)}{(3)(2)(1)} = \frac{120}{6} = 20. $$

Por tanto, se pueden formar **20 comités distintos** a partir de un grupo de 6 personas.

E_1

Resuelva los siguientes problemas:

a) Se han seleccionado 7 personas para distribuirles 4 premios. ¿De cuántas maneras puede realizarse esta asignación, si cada persona puede recibir un solo premio?

b) Una señora tiene 10 vestidos y en su viaje de vacaciones quiere llevar consigo 6 de ellos. ¿De cuántas maneras puede seleccionarlos?

Ejemplo 2 ¿De cuántas maneras puede integrarse un concejo municipal formado por 3 hombres y 2 mujeres, si estos deben ser escogidos entre 6 hombres y 5 mujeres?

Se deben seleccionar 3 hombres de un total de 6, para ser miembros del concejo, lo cual se puede efectuar de ${}_6C_3$ formas. En el caso de las mujeres, se seleccionarán 2 de un total de 5, lo cual se puede efectuar de ${}_5C_2$ formas.

Por el principio de la multiplicación, el número de formas que puede integrarse el concejo es:

$$ \underbrace{{}_6C_3}_{\text{Formas de seleccionar hombre}} \cdot \underbrace{{}_5C_2}_{\text{Formas de seleccionar mujer}} = \frac{{}_6P_3}{3!} \cdot \frac{{}_5P_2}{2!} = \frac{(6)(5)(4)}{(3)(2)(1)} \cdot \frac{(5)(4)}{(2)(1)} = (20)(10) = 200. $$

En conclusión, se tienen **200 maneras** de conformar el concejo.

E_2

Resuelva los siguientes problemas:

a) En una estantería hay 6 libros diferentes de matemáticas y 3 de física, también diferentes. Si queremos seleccionar 2 de cada área, ¿de cuántas maneras se puede hacer?

b) En una fiesta escolar hay 8 niñas y 10 niños. ¿De cuántas maneras se pueden escoger de entre ellos 4 parejas de niños y niñas para un baile?

Contenido 9: Combinaciones (3)

Anteriormente se encontró que el número de combinaciones de r objetos seleccionados sin repetir entre n objetos distintos es

$$ {}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!}. \qquad (1)$$

Pero se sabe que

$$ {}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}, \qquad (2)$$

de modo que, al sustituir (2) en (1), se obtiene

$$ {}_nC_r = \frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Luego, el total de combinaciones de r objetos tomados de n, está dado por

$$ {}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

P

Calcule ${}_4C_2$ utilizando las expresiones ${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ y ${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!}$.

S

En este caso $n=4$, $r=2$, de modo que

$$ {}_4C_2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{(4)(3)\cancel{(2)}\cancel{(1)}}{(2)(1)\cancel{(2)}\cancel{(1)}} = \frac{12}{2} = 6.$$

Pero también

$$ {}_4C_2 = \frac{{}_4P_2}{2!} = \frac{(4)(3)}{(2)(1)} = \frac{12}{2} = 6.$$

Con ambas fórmulas se obtiene **6** como resultado. Se observa que el cálculo del total de combinaciones se simplifica utilizando ${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!}$.

E1

En cada inciso calcule el total de combinaciones solicitado usando las fórmulas ${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ y ${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!}$.

a) ${}_4C_3$

b) ${}_5C_2$

Ejemplo

Juan quiere regalar a Lucía 3 libros y elegirlos entre 6 que ella quiere leer. ¿De cuántas maneras puede escoger los tres libros?

Se debe calcular el total de combinaciones de los 6 libros tomando 3 a la vez, es decir:

$$ {}_6C_3 = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{(6)(5)(4)\cancel{(3)}\cancel{(2)}\cancel{(1)}}{(3)(2)(1)\cancel{(3)}\cancel{(2)}\cancel{(1)}} = \frac{120}{6} = 20.$$

De manera que Juan tiene **20 formas** para elegir los libros a obsequiar.

E2

Resuelva los siguientes problemas sobre combinaciones:

a) ¿Cuántas opciones tiene Luis de escoger 2 asignaturas entre 6 optativas?

b) En un canal de televisión hay 7 presentadores de los cuales se deben escoger 3 para conducir un determinado programa. ¿De cuántas formas distintas se puede hacer esta escogencia?

Contenido 10: Permutaciones con repetición

P

Dos hermanos han decidido repartirse una propiedad que heredaron de su padre, para ello sembrarán en la línea divisoria árboles frutales en las siguientes cantidades: 2 de mango, 3 de aguacate y 2 de guayaba. ¿De cuántas maneras pueden plantarse los árboles?

S

En la última columna de la tabla adjunta aparece el número de formas de colocar los árboles de cada especie frutal en la línea divisoria:

Árbol	Cantidad	Nro. de formas de colocarlos
Mango	2	${}_7C_2$
Aguacate	3	${}_5C_3$
Guayaba	2	${}_2C_2$

De los 7 espacios para plantar los árboles se seleccionan 2 para los mangos; esto puede hacerse de ${}_7C_2$ formas.

Quedan 5 posiciones, de las cuales se seleccionan 3 para los aguacates, de ${}_5C_3$ formas.

Quedan 2 espacios para las guayabas, que pueden ocuparse de ${}_2C_2$ formas.

Luego, aplicando el principio de la multiplicación se tiene

$$ {}_7C_2 \cdot {}_5C_3 \cdot {}_2C_2 = \frac{7!}{2!\cancel{5!}} \cdot \frac{\cancel{5!}}{3!2!} \cdot 1 \longleftarrow \boxed{{}_nC_n = 1} $$

$$ = \frac{7!}{2!3!2!} = \frac{(7)(6)(5)(4)(\cancel{3})(\cancel{2})(\cancel{1})}{(\cancel{2})(\cancel{1})(\cancel{3})(2)(1)(2)(1)} = \frac{840}{(2)(2)} = 210. $$

En conclusión, existen **210 formas** diferentes de plantar los 7 árboles.

C

El número de permutaciones diferentes de n objetos de los cuales un objeto aparece n_1 veces, otro objeto aparece n_2 veces y así sucesivamente es

$$ \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_k!} $$

siendo $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$.

Ejemplo ¿Cuántas secuencias de 8 letras se pueden formar con las letras x, x, x, y, y, y, c, c?

La cantidad de letras a considerar es 8, de las cuales, 3 son de un tipo, 3 de otro y 2 de un tercer tipo, de modo que el total de secuencias que se pueden formar es:

$$ \frac{8!}{3!3!2!} = \frac{(8)(7)(6)(5)(4)(\cancel{3})(\cancel{2})(\cancel{1})}{(\cancel{3})(2)(1)(3)(2)(1)(\cancel{2})(\cancel{1})} = \frac{6\,720}{12} = \mathbf{560}. $$

E

Resuelva los siguientes problemas:

a) ¿Cuántos números de 5 cifras se pueden formar en los cuales el 2 se repita 2 veces y el 3 aparezca 3 veces?

b) ¿De cuántas maneras se pueden alinear en un estante 2 libros de Matemáticas, 2 de Física y 3 de Historia si los libros de cada materia son iguales?

c) ¿Cuántas permutaciones diferentes se pueden formar utilizando las 8 letras de la palabra PARALELA?

Contenido 11: Comprobemos lo aprendido 1

E

Resuelva los siguientes problemas:

a) Utilice un diagrama de árbol para ilustrar todas las combinaciones posibles que pueden obtenerse en el lanzamiento al aire de dos monedas.

b) A un estudiante de Arquitectura se le ha pedido como trabajo final de curso diseñar 4 planos de modelos de casa diferentes en 6 tamaños distintos, ¿cuántos planos deberá entregar?

c) ¿Cuántos números de 6 cifras se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5 y 6?

d) En una carrera compiten los caballos Emperador, Rocinante y Babieca. ¿De cuántas maneras pueden ser ocupados el primer y segundo lugar?

e) Una familia de 4 personas almuerza diariamente en una mesa circular. ¿Es posible que durante toda una semana se sienten de manera diferente?, ¿por qué?

f) ¿Cuántos ramilletes distintos pueden venderse en una floristería si esta cuenta con 6 variedades de flores y cada ramillete debe componerse de 4 variedades distintas?

g) En un estanque hay 15 patos y 8 gansos. ¿De cuántas maneras se pueden escoger 2 patos y 3 gansos?

h) Calcule el número de comités que pueden formarse con 4 químicos y 3 físicos si cada comité debe constar de 2 químicos y 1 físico.

i) ¿Cuántas permutaciones distintas pueden obtenerse con las letras de la palabra INFINITO?

Sección 2: Probabilidades

Contenido 1: Definición de probabilidad teórica

Definición

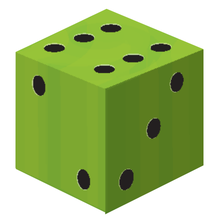
Espacio muestral y evento

Un espacio muestral E es un conjunto cuyos elementos son todos los resultados posibles de un experimento dado. Un evento A es cualquier subconjunto (*parte*) del espacio muestral.

P

En el lanzamiento de un dado no cargado se consideran los eventos

A: obtener un número impar y B: obtener un múltiplo de 4



a) Exprese como conjuntos los eventos A, B y el espacio muestral E asociado.

b) Encuentre las cardinalidades de los conjuntos.

c) ¿Qué es más probable obtener: un número impar o un múltiplo de 4?

S

a) Los resultados posibles en el lanzamiento de un dado son 1, 2, 3, 4, 5, 6, de modo que estos son los elementos del espacio muestral:

$$\mathrm{E}=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Los números impares incluidos en el espacio muestral son 1, 3, 5 y múltiplo de 4 solo es el mismo 4. Luego, estos eventos quedan definidos respectivamente por

$$\mathrm{A}=\{1, 3, 5\} \quad \text{y} \quad \mathrm{B}=\{4\}.$$

b) Hay 6 elementos en E, lo cual se representa como $n(\mathrm{E})=6$.

Hay 3 elementos en A y 1 elemento en B, lo cual se representa como $n(\mathrm{A})=3$ y $n(\mathrm{B})=1$.

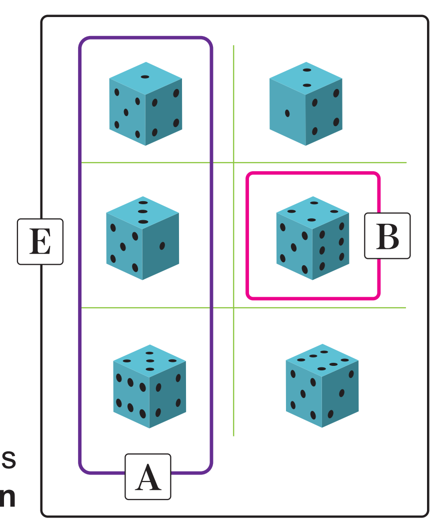
Cardinalidad de conjuntos

$n(\mathrm{E})$: es la cantidad de elementos de E (Total de casos posibles)

$n(\mathrm{A})$: cantidad de elementos de A (Total de casos favorables)

c) Existen más casos favorables de ocurrencia de A que para B, luego, es más probable obtener un número impar. Esto se puede aclarar mediante los cocientes que aparecen en la última fila de la tabla siguiente:

	A: obtener un número impar	B: obtener un múltiplo de 4
Casos favorables	3	1
Total de casos	6	6
Cociente	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}$



El cociente para la ocurrencia de A es mayor que el de B, es decir, es **más probable obtener un número impar que un múltiplo de 4** en el lanzamiento de un dado.

C

Definición de probabilidad

Dado el espacio muestral E asociado a un experimento en el que todos los elementos tienen la misma oportunidad de ocurrir, la probabilidad de que ocurra el evento A se denota por $\mathrm{P(A)}$ y está dada por la razón

$$\mathrm{P(A)} = \frac{n(\mathrm{A})}{n(\mathrm{E})} = \frac{\text{número de resultados favorables}}{\text{número de resultados posibles}}.$$

Ejemplo Una urna contiene 5 canicas blancas, 10 canicas verdes y 8 amarillas. Si se extrae una canica, calcule la probabilidad de que sea verde.

El espacio muestral lo constituyen todas las canicas, de modo que este posee $5+10+8=23$ elementos, es decir,

$$n(\mathrm{E}) = 23.$$

Se define el evento A: extraer una canica verde. Este consta de 10 casos favorables, de modo que

$$n(\mathrm{A}) = 10.$$

Por tanto,

$$\mathrm{P(A)} = \frac{n(\mathrm{A})}{n(\mathrm{E})} = \frac{10}{23}.$$

Es decir, la probabilidad de extraer una canica verde es $\mathbf{\frac{10}{23}}$.

E

Resuelva los siguientes problemas aplicando la definición de probabilidad.

a) En el lanzamiento de un dado, ¿qué es más probable obtener: un número par o un múltiplo de 3?

b) Una urna contiene 18 fichas marcadas cada una con un número de 1 a 18. Si se extrae una ficha, ¿cuál es la probabilidad de que esta muestre un múltiplo de 7?

c) Un recipiente consta de 9 pelotas de golf blancas, 8 verdes y 3 anaranjadas. Si se selecciona al azar una pelota del recipiente, ¿cuál es la probabilidad de que sea blanca?, ¿y de que una de estas sea verde?

Contenido 2: Aplicaciones del concepto de probabilidad teórica

Ejemplo 1 Calcule la probabilidad de que la suma de los números que aparecen en las caras superiores de dos dados que se lanzan sea 7.

Los 36 pares del espacio muestral E de este experimento se muestran en la tabla, es decir, $n(\mathrm{E}) = 36$

El evento definido como

A: la suma de los resultados es 7
consta de los 6 pares :
(6,1), (5, 2), (4, 3), (3, 4), (2, 5), (1, 6).

Así, $n(\mathrm{A}) = 6$ y

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \frac{n(\mathrm{A})}{n(\mathrm{E})} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2,1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3,1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4,1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5,1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6,1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Suman 7

En conclusión, la probabilidad de obtener 7 como suma de los números de las caras en el lanzamiento de dos dados es $\frac{1}{6}$.

Ejemplo 2 Calcule la probabilidad de obtener 2 escudos y un número en el lanzamiento de tres monedas (N representa número en la moneda y E escudo).

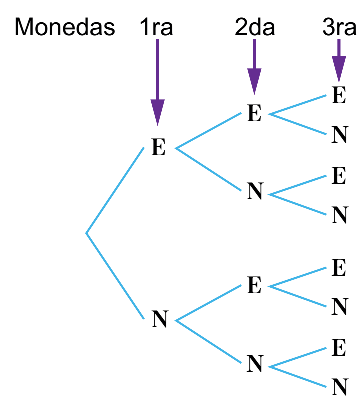
El diagrama de la derecha revela los 8 posibles resultados del experimento, de modo que el espacio muestral es

$$\mathrm{E} = \{\mathrm{EEE}, \mathrm{EEN}, \mathrm{ENE}, \mathrm{ENN}, \mathrm{NEE}, \mathrm{NEN}, \mathrm{NNE}, \mathrm{NNN}\}.$$

Así, $n(\mathrm{E}) = 8$.

El evento A: obtener 2 escudos y 1 número, consta de los resultados: EEN, ENE, NEE, de modo que $n(\mathrm{A}) = 3$.
Luego,

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \frac{3}{8}.$$



Es decir, la probabilidad de obtener 2 escudos y 1 número es $\frac{3}{8}$.

E

Resuelva los siguientes problemas de aplicación:

1. Si se lanzan dos dados, calcule la probabilidad de que:
   a) Las dos caras de los dados tengan el mismo número.
   b) La suma de los números de las caras sea 8.
2. Se escoge una carta de una baraja de 52 cartas, ¿cuál es la probabilidad de seleccionar un as?
3. Determine la probabilidad de obtener un escudo y dos veces número en el lanzamiento de 3 monedas.

Contenido 3: Probabilidad de la unión de dos eventos

P

Si se lanza un dado, calcule la probabilidad para cada evento dado:

a) A: obtener un número par.

b) B: obtener un múltiplo de 3.

c) $A \cap B$: obtener un número par y múltiplo de 3.

d) $A \cup B$: obtener un número par o un múltiplo de 3.

La intersección $A \cap B$ de A y B es el conjunto de los elementos comunes de A y B.

La unión $A \cup B$ es el conjunto de los elementos comunes y no comunes de A y B.

S

El espacio muestral de este experimento es $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. De manera que $n(E) = 6$.

a) Los números pares en E son 2, 4, 6, de modo que $A = \{2, 4, 6\}$, y por tanto $n(A) = 3$. Entonces, la probabilidad de obtener un número par es

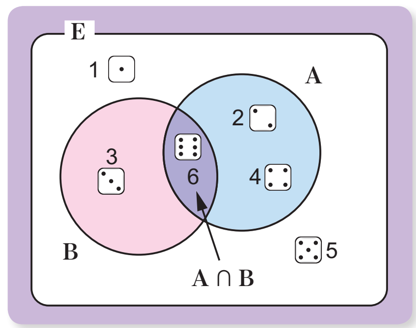
$$P(A) = \frac{3}{6} = \mathbf{\frac{1}{2}}.$$

b) Para el evento B: obtener un múltiplo de 3, se tienen 2 casos favorables: 3 y 6, de modo que $B = \{3, 6\}$ y por lo tanto $n(B) = 2$. Luego,

$$P(B) = \frac{2}{6} = \mathbf{\frac{1}{3}}.$$

c) Nótese que hay un resultado común en los eventos A y B, que corresponde al evento: "número par y múltiplo de 3", esto es $A \cap B = \{6\}$. Por lo cual

$$P(A \cap B) = \mathbf{\frac{1}{6}}.$$



d) El diagrama de la derecha muestra que para el evento $A \cup B$: "obtener un número par o un múltiplo de 3" se tiene 4 casos favorables: 2, 3, 4 y 6, de modo que $n(A \cup B) = 4$,

$$P(A \cup B) = \frac{4}{6} = \mathbf{\frac{2}{3}}.$$

Observe que

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = P(A \cup B)$$

es decir,

$$\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}.$$

C

Regla de la adición (Probabilidad de la unión de dos eventos)

Dados dos eventos A y B cualesquiera,

$$\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}.$$

Ejemplo Si de una baraja de 52 cartas se extrae una al azar, ¿cuál es la probabilidad de que esta sea un as o diamante?

El espacio muestral consta de 52 cartas, de las cuales 4 son ases, 13 de diamantes (entre estas hay una que es as de diamante), de modo que tenemos los siguientes eventos con sus respectivas probabilidades:

A: seleccionar un as $\qquad \mathrm{P(A)} = \dfrac{4}{52}$

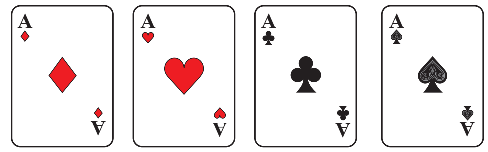
B: seleccionar carta de diamante $\qquad \mathrm{P(B)} = \dfrac{13}{52}$

$\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$: seleccionar un as de diamante $\quad \mathrm{P(A \cap B)} = \dfrac{1}{52}$

De manera que para calcular la probabilidad del evento $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$: seleccionar un as o diamante, se tiene:

$$\begin{aligned} \mathrm{P(A \cup B)} &= \mathrm{P(A)} + \mathrm{P(B)} - \mathrm{P(A \cap B)} \\ &= \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}. \end{aligned}$$

En conclusión, la probabilidad de seleccionar un as o diamante es $\mathbf{\dfrac{4}{13}}$.



Diamantes	Corazones	Tréboles	Picas
K	K	K	K
Q	Q	Q	Q
J	J	J	J
10	10	10	10
9	9	9	9
8	8	8	8
7	7	7	7
6	6	6	6
5	5	5	5
4	4	4	4
3	3	3	3
2	2	2	2
As	As	As	As

E

Resuelva los siguientes problemas:

a) Si se lanza un dado, ¿cuál es la probabilidad de obtener un número impar o un múltiplo de 3?

b) Se lanzan dos dados, ¿cuál es la probabilidad de obtener un 6 como suma de los resultados de las caras o números iguales en estas?

Contenido 4: Eventos mutuamente excluyentes

P

Para el experimento de lanzar un dado calcule la probabilidad de cada evento:
a) A: obtener un número par.
b) B: obtener un múltiplo de 5.
c) $A \cup B$: obtener un número par o un múltiplo de 5.

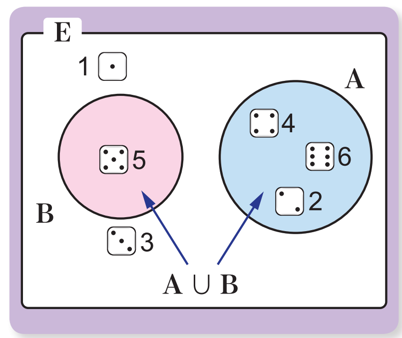
S

El espacio muestral de este experimento es $E=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, siendo $n(E)=6$.

a) Para el evento A: obtener un número par, se tienen los casos favorables 2, 4, 6, de modo que $A=\{2, 4, 6\}$, y por tanto $n(A)=3$. Así,
$$P(A)=\frac{3}{6}=\mathbf{\frac{1}{2}}.$$

b) Para el evento B: obtener un múltiplo de 5, se tiene solo un caso favorable: 5, $B=\{5\}$ de modo que $n(B)=1$. Luego,
$$P(B)=\mathbf{\frac{1}{6}}.$$

c) El diagrama de la derecha muestra que para el evento $A \cup B$: obtener un número par o un múltiplo de 5 (se han coloreado ambos eventos) se tienen 4 casos favorables: 2, 4, 5 y 6, de modo que $n(A \cup B)=4$,
$$P(A \cup B)=\frac{4}{6}=\mathbf{\frac{2}{3}}.$$



Se observa que $P(A)+P(B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}=P(A \cup B)$

Nótese que los eventos A y B no pueden ocurrir simultáneamente ya que el número en la cara del dado no puede ser par y múltiplo de 5 a la vez, esto es $A \cap B=\phi$, siendo ϕ el conjunto vacío.

C

Eventos mutuamente excluyentes

Dos eventos A y B son mutuamente excluyentes si no tienen elementos en común, es decir $A \cap B=\phi$, en este caso la ocurrencia de uno excluye la ocurrencia del otro (no ocurren de forma simultánea).
Si dos eventos A y B son mutuamente excluyentes, entonces
$$P(A \cup B)=P(A)+P(B).$$

E

Resuelva los siguientes problemas:

a) Se tiene un libro de cada una de las materias: Matemática, Biología, Química, Física y Lengua y Literatura. Si se toma uno de ellos, ¿cuál es la probabilidad de que este sea de Matemática o de Física?

b) La probabilidad de que Juan asista a un bachillerato estatal es $\frac{2}{5}$ y la de que asista a un bachillerato privado es $\frac{1}{2}$. Si Juan no puede asistir a ambos simultáneamente, ¿cuál es la probabilidad de asistir a uno u otro bachillerato?

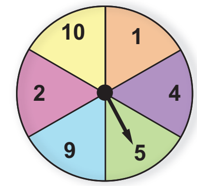
c) Si se escoge una carta de una baraja de 52 cartas, ¿cuál es la probabilidad de escoger un corazón o un diamante?

d) Si se arrojan dos dados, encuentre la probabilidad de que la suma de los dos números de las caras sea 5 u 11.

Contenido 5: Propiedades de las probabilidades

P

Imagine que hace girar en sentido horario la aguja de la ruleta de la derecha .
Calcule la probabilidad de cada evento:
a) A: obtener un número entero.
b) B: obtener un número negativo.
c) C: obtener un múltiplo de 5.



S

El total de resultados posibles es 6. Para cada inciso tenemos:

a) En este caso el número de casos favorables es 6, igual al número de elementos del espacio muestral, por lo cual:

$$\mathrm{P(A)} = \frac{6}{6} = \mathbf{1}$$

b) Dado que en la ruleta no aparecen números negativos, hay 0 casos favorables a este hecho y

$$\mathrm{P(B)} = \frac{0}{6} = \mathbf{0}$$

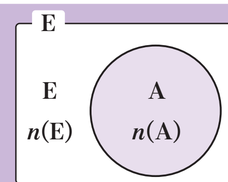
c) En la ruleta aparecen 2 múltiplos de 5: 5 y 10, de manera que $n(\mathrm{C}) = 2$ y su probabilidad es

$$\mathrm{P(C)} = \frac{2}{6} = \mathbf{\frac{1}{3}}$$

Observe que $\frac{1}{3}$ es un número no negativo y menor que 1, por lo cual se puede decir que

$$0 \leq \mathrm{P(C)} \leq 1$$

El número de elementos de un evento cumple la relación:



$0 \leq n(\mathrm{A}) \leq n(\mathrm{E})$. ①

Al dividir ① entre $n(\mathrm{E})$ se tiene

$$\frac{0}{n(E)} \leq \frac{n(A)}{n(E)} \leq \frac{n(E)}{n(E)},$$

es decir, $0 \leq \mathrm{P(A)} \leq 1$.

C

Propiedades de la Probabilidad

1. $0 \leq \mathrm{P(A)} \leq 1$, para cualquier evento A.
2. $\mathrm{P(E)} = 1$, en cuyo caso E (considerado un evento), se denomina evento seguro.
3. Denotando un evento imposible con ϕ, se tiene que $\mathrm{P}(\phi) = 0$.
4. $\mathrm{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$, si A y B son mutuamente excluyentes, entonces $\mathrm{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$.

(*) La propiedad 4. fue verificada en contenidos anteriores.

E

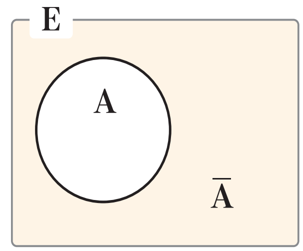
1. En el experimento de lanzar un dado, verifique las propiedades de la probabilidad calculando $\mathrm{P(A)}$, $\mathrm{P(B)}$, $\mathrm{P(C)}$ y $\mathrm{P(A \cup B)}$ para los eventos siguientes:
   a) A: cae en número positivo.
   b) B: obtener un múltiplo de 3.
   c) C: cae en número par o impar.
2. Si se elige al azar un número natural del 1 al 10, calcule la probabilidad de cada evento:
   a) A: obtener número par.
   b) B: obtener número positivo.
   c) C: obtener un número mayor que 15.

Contenido 6: Probabilidad de un evento complementario

Definición

Eventos complementarios

El complemento de un evento A, denotado por $\overline{\mathrm{A}}$, está formado por todos los elementos del espacio muestral asociado E, que no están en A.



P

Considere el lanzamiento de un dado y determine los elementos del espacio muestral que no forman parte del evento A: obtener un múltiplo de 3. ¿Cuál es la probabilidad del evento conformado por dichos elementos?

S

El espacio muestral es $\mathrm{E}=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. El evento A: obtener un múltiplo de 3, es $\mathrm{A}=\{3, 6\}$, de modo que los elementos del espacio muestral que no están en A son 1, 2, 4 y 5.

Los elementos anteriores conforman el evento $\overline{\mathrm{A}}=\{1, 2, 4, 5\}$ definido por

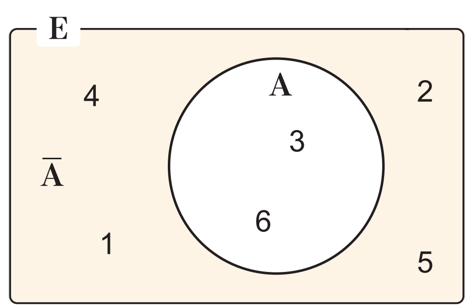
$\overline{\mathrm{A}}$: no se obtiene un número múltiplo de 3.

Dado que $\overline{\mathrm{A}}=\{1, 2, 4, 5\}$, su probabilidad es

$$\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}})=\frac{4}{6}=\mathbf{\frac{2}{3}}.$$

Se observa que A y $\overline{\mathrm{A}}$ no tienen elementos en común, como se muestra en la gráfica y su unión es el espacio muestral, de modo que si consideramos el evento $\mathrm{A}\cup\overline{\mathrm{A}}$: obtener un número que sea múltiplo de 3 o que no lo sea, este será un evento seguro, y así

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\overline{\mathrm{A}})=1$$
$$\mathrm{P}(\mathrm{A})+\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}})=1$$
$$\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}})=1-\mathrm{P}(\mathrm{A}).$$



Con el resultado anterior, se puede calcular $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}})$

$$\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}})=1-\mathrm{P}(\mathrm{A})=1-\frac{2}{6}$$
$$=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

Los eventos A y $\overline{\mathrm{A}}$ son complementarios.

Propiedades de eventos complementarios:
1. $\mathrm{A}\cup\overline{\mathrm{A}}=\mathrm{E}$
2. $\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{A}}=\phi$

C

La probabilidad de $\overline{\mathrm{A}}$, complemento del evento A, está dada por

$$\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}})=1-\mathrm{P}(\mathrm{A})$$

Ejemplo Si el experimento consiste en lanzar dos dados, calcule la probabilidad de cada evento:

a) A: la suma de los números que aparecen en las caras es 10.

b) $\overline{\mathrm{A}}$: la suma de los números que aparecen en las caras no es 10.

a) A la derecha se muestran los 36 posibles resultados de este experimento, es decir, $n(\mathrm{E}) = 36$.

El evento A: la suma de los números que aparecen en las caras es 10, tiene 3 casos favorables, coloreados en la tabla, de modo que

$$\mathrm{P(A)} = \frac{3}{36} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{12}}.$$

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2,1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3,1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4,1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5,1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6,1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Suman 10

b) La probabilidad de $\overline{\mathrm{A}}$ es

$$\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - \mathrm{P(A)} = 1 - \frac{1}{12} = \frac{\mathbf{11}}{\mathbf{12}}.$$

E

Resuelva los siguientes problemas usando la relación $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - \mathrm{P(A)}$.

1. Para el lanzamiento de dos dados, calcule la probabilidad de cada evento:

   a) A: la suma de los números que aparecen en las caras es 5.

   b) $\overline{\mathrm{A}}$: la suma de los números que aparecen en las caras no es 5.

2. Suponga que tiene un pequeño texto formado por 80 palabras del español, entre las cuales están 35 nombres y 45 verbos. Si se selecciona una palabra al azar, calcule la probabilidad de:

   a) A: escoger un verbo.

   b) $\overline{\mathrm{A}}$: no escoger un verbo.

3. En una bolsa se tienen 7 bolas rojas, 9 azules y 4 verdes. Si se extrae una bola, calcule la probabilidad de:

   a) A: la bola que se extrae es roja.

   b) $\overline{\mathrm{A}}$: la bola que se extrae no es roja.

Contenido 7: Probabilidad de eventos independientes

P

Si de una baraja de 52 cartas, se extrae una de ellas, se coloca de nuevo en el paquete y se toma una segunda carta. Se consideran los eventos A: se extrae un 7 y B: se extrae un corazón rojo. Responda:

a) ¿La ocurrencia de cualquiera de los eventos afecta o depende de la ocurrencia del otro?

b) Calcule $\mathrm{P(A), P(B)}$ y $\mathrm{P(A \cap B)}$.

c) Compare $\mathrm{P(A \cap B)}$ y $\mathrm{P(A) \cdot P(B)}$.

S

a) El espacio muestral lo constituyen las 52 cartas de la baraja. Si, por ejemplo, en la primera extracción ocurriese el evento A, esto no afectaría que en la segunda extracción se dé el evento B, dado que la carta extraída se coloca de nuevo en la baraja. De igual forma se tendrá que la ocurrencia de B no ha de alterar o impedir la del evento A.

b) De las 52 cartas, 4 muestran el número 7, 13 son de corazón rojo y entre estas hay una que es 7 de corazón de rojo, esto se ilustra en la figura de abajo, de modo que $\mathrm{A \cap B} = \{\text{7 de corazón rojo}\}$, luego:

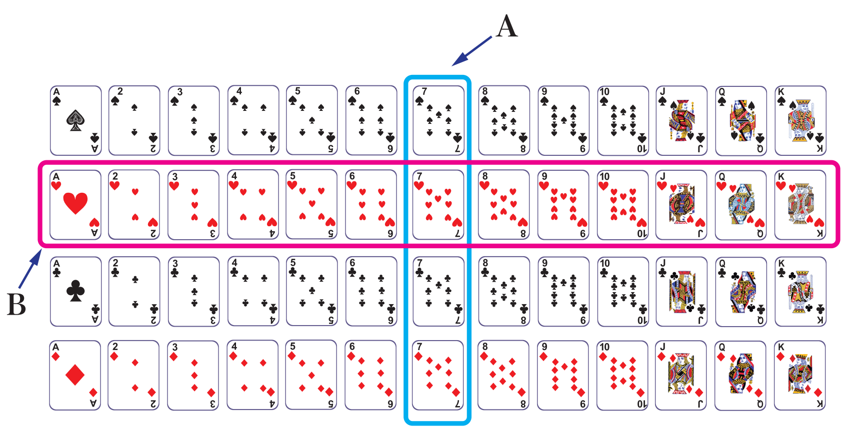
$$\mathrm{P(A)} = \frac{4}{52} = \mathbf{\frac{1}{13}}, \qquad \mathrm{P(B)} = \frac{13}{52} = \mathbf{\frac{1}{4}}, \qquad \mathrm{P(A \cap B)} = \mathbf{\frac{1}{52}}$$

c) Por lo obtenido en el inciso anterior:

$$\begin{aligned}\mathrm{P(A) \cdot P(B)} &= \left(\frac{1}{13}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\\ &= \frac{1}{52}\\ &= \mathrm{P(A \cap B)}\end{aligned}$$

Por tanto

$$\mathbf{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}.$$



C

Dos eventos A y B son independientes si la ocurrencia de uno no afecta la ocurrencia del otro. En este caso se cumple que

$$\mathbf{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}.$$

Si A y B no son independientes, se dice que son dependientes.

Ejemplo En una cajita hay 3 fichas amarillas y 6 azules. ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos fichas amarillas si el experimento se hace con reposición?

Se considera el evento A: la primera ficha extraída es amarilla, como hay 3 amarillas en la bolsa, entonces $n(\mathrm{A})=3$ y su probabilidad es

$$\mathrm{P(A)} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Se define ahora el evento B: la segunda ficha extraída es amarilla. Dado que el experimento es con reposición, la primera ficha extraída se deposita nuevamente en la cajita, así, esta sigue teniendo 3 fichas amarillas, de modo que

$$\mathrm{P(B)} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Los eventos A y B son independientes ya que se realiza reposición de la ficha extraída, entonces la probabilidad de $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$: la primera y la segunda fichas son amarillas es

$$\mathrm{P(A \cap B)} = \mathrm{P(A)} \cdot \mathrm{P(B)} = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \mathbf{\frac{1}{9}}$$

E

Resuelva los siguientes ejercicios, identificando en cada caso eventos independientes:

a) En una bolsa hay 4 canicas rojas y 3 verdes. ¿Cuál es la probabilidad de que, al sacar dos canicas con reposición, estas sean rojas?

b) Si se lanzan dos monedas, ¿cuál es la probabilidad de obtener dos escudos?

c) En el lanzamiento de dos dados, uno después del otro, ¿cuál es la probabilidad de que en el primer lanzamiento resulte 3 y en el segundo un número impar?

Contenido 8: Probabilidad condicional

Se lanza un par de dados. Calcule:

a) La probabilidad del evento A: la suma de los puntos es 6.

b) Dado el evento B: en uno de los dados aparece 2, calcule la probabilidad de $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$: La suma de los puntos es 6 y en uno de los dados aparece 2.

c) La probabilidad de que solo en uno de los dados aparezca un 2, sabiendo que la suma de los puntos es 6.

a) El evento definido como

A: la suma de los resultados es 6

está definido por

$\mathrm{A} = \{(5,1), (4, 2), (3, 3), (2, 4), (1, 5)\}$

Así, $n(\mathrm{A}) = 5$ y,

$$\mathrm{P(A)} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{36}}$$

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2,1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3,1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4,1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5,1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6,1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Suman 6

b) El evento B: en uno de los dados aparece 2, queda definido como

$$\mathrm{B} = \{(2,1),\ (1,2),\ (3,2),\ (2,3),\ (4,2),\ (2,4),\ (5,2),\ (2,5),\ (6,2),\ (2,6)\}$$

el cual tiene 2 elementos en común con A (coloreados anteriormente), de modo que para el evento $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ se tiene que $n(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 2$ y

$$\mathrm{P(A \cap B)} = \frac{2}{36} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{18}}.$$

c) En vista de que el evento A ha ocurrido, se reduce el espacio muestral para B. Es decir, los casos posibles para B son ahora $\{(5,1),(4,2),(3,3),(2,4),(1,5)\}$, de los cuales hay 2 casos favorables: (4, 2), (2, 4).

Luego, la probabilidad de B, habiendo ocurrido el evento A es $\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}$.

Se puede expresar esta situación con la expresión siguiente

$$\mathrm{P(B/A)} = \frac{\mathrm{P(A \cap B)}}{\mathrm{P(A)}}$$

En efecto:

$$\mathrm{P(B/A)} = \frac{\mathrm{P(A \cap B)}}{\mathrm{P(A)}} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{2}{36} \div \frac{5}{36} = \left(\frac{2}{\cancel{36}}\right)\left(\frac{\cancel{36}}{5}\right) = \frac{2}{5}$$

Es decir,

$$\mathrm{P(B/A)} = \frac{n(\mathrm{A \cap B})}{n(\mathrm{A})} = \frac{\mathrm{P(A \cap B)}}{\mathrm{P(A)}}$$

C

Probabilidad condicional

La probabilidad del evento B, condicionado por la ocurrencia del evento A, denotada por $\mathrm{P(B\,/A)}$, es

$$\mathrm{P(B/A)} = \frac{n(\mathrm{A \cap B})}{n(\mathrm{A})} = \frac{\mathrm{P(A \cap B)}}{\mathrm{P(A)}}$$

$\mathrm{P(A)} > 0$ y $\mathrm{P(B\,/A)}$ se lee: "la probabilidad de B dado A".

E

Resuelva los siguientes ejercicios:

1. Se lanza un par de dados. Calcule:

   a) La probabilidad de A: La suma de los puntos es 7.

   b) Dado el evento B: En uno de los dados aparece 1, calcule la probabilidad de $\mathrm{A \cap B}$: La suma de los puntos es 7 y en uno de los dados aparece 1.

   c) La probabilidad de que solo en uno de los dados aparezca un 1, sabiendo que la suma de los puntos es 7.

2. Para un bus interurbano de la ruta Managua-Chinandega, la probabilidad de A: sale a tiempo de su parada es de $\mathrm{P(A)} = \frac{2}{5}$ y de B: llegue a tiempo a su destino es de $\mathrm{P(B)} = \frac{3}{5}$, y la de $\mathrm{A \cap B}$: salga de su parada y llegue a tiempo a su destino es de $\mathrm{P(A \cap B)} = \frac{1}{3}$. Encuentre la probabilidad de que llegue a tiempo dado que salió a tiempo, es decir, $\mathrm{P(B/A)}$.

Contenido 9: Comprobemos lo aprendido 2

E

1. En una bolsa se tienen fichas enumeradas de 1 al 8. Si se extrae una de estas fichas al azar, calcule la probabilidad de los eventos:

   a) $\mathbf{A}$: extraer un número par.

   b) $\mathbf{B}$: extraer un número impar.

   c) $\mathbf{C}$: extraer un múltiplo de 4.

2. Se lanzan al aire tres monedas. Calcule la probabilidad de que salgan dos escudos (E) y un número $(\mathbf{N})$.

3. En una urna hay 10 pelotas enumeradas del 1 al 10. Si se extrae una pelota al azar, calcule la probabilidad de sacar un número par o un múltiplo de 3.

4. Se lanzan dos dados al aire y se anota la suma de los resultados obtenidos. Calcule la probabilidad de:

   a) $\mathbf{A}$: se obtenga 7.

   b) $\mathbf{B}$: se obtenga 11.

   c) $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$: la suma es 7 u 11.

   d) $\overline{\mathbf{M}}$: no se obtenga 9, usando la expresión $\mathbf{P}(\overline{\mathbf{M}}) = 1 - \mathbf{P}(\mathbf{M})$.

5. La probabilidad de que un hombre viva 20 años es $\frac{1}{4}$, y la de que su mujer viva 20 años es $\frac{1}{3}$, calcule la probabilidad de que ambos vivan 20 años.

6. Se lanza un par de dados. Calcule lo pedido en cada inciso:

   a) La probabilidad de $\mathbf{A}$: ambos dados muestran el mismo número.

   b) Dado el evento $\mathbf{B}$: la suma de los puntos es 4, calcule la probabilidad de $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$: ambos dados muestran el mismo número y la suma de los puntos es 4.

   c) La probabilidad de que la suma de los puntos sea 4, sabiendo que ambos dados muestran el mismo número.

UNIDAD 1

Sección 1 Contenido 1 (S1C1)

a) $3, 6, \mathbf{9}, 12, 15, \mathbf{18}, 21, \ldots$

b) $5, \mathbf{10}, 15, 20, \mathbf{25}, 30, 35, \mathbf{40}, \ldots$

c) $1, \mathbf{3}, 5, 7, \mathbf{9}, 11, 13, \mathbf{15}, \ldots$

d) $-1, \mathbf{1}, -1, 1, \mathbf{-1}, 1, -1, \mathbf{1}, \ldots$

e) $1, \frac{1}{2}, \mathbf{\frac{1}{3}}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \mathbf{\frac{1}{6}}, \ldots$

f) $1, 2, 4, \mathbf{7}, 11, 16, \mathbf{22}, \ldots$

S1C2

E1

a) $a_n = 2n$ b) $a_n = 5n$ c) $a_n = n$

E2

a)	b)	c)
$a_1 = 3$	$a_1 = 1$	$a_1 = 1$
$a_2 = 5$	$a_2 = 4$	$a_2 = 4$
$a_3 = 7$	$a_3 = 7$	$a_3 = 9$
$a_4 = 9$	$a_4 = 10$	$a_4 = 16$
$a_5 = 11$	$a_5 = 13$	$a_5 = 25$
$a_{10} = 21$	$a_{10} = 28$	$a_{10} = 100$

S1C3

E1

a) $4, 8, \mathbf{12}, 16, \mathbf{20}, 24, \ldots$

b) $10, \mathbf{20}, 30, 40, \mathbf{50}, 60 \ldots$

c) $100, 200, \mathbf{300}, 400, \mathbf{500}, \ldots$

d) $0, -1, \mathbf{-2}, -3, -4, \mathbf{-5}, \ldots$

e) $2, 4, \mathbf{8}, 16, 32, \mathbf{64}, \mathbf{128}, \ldots$

f) $3, 4, 6, 9, \mathbf{13}, 18, \mathbf{24}, \ldots$

E2

a) $a_n = 3n$ b) $a_n = 6n$ c) $a_n = -n$

d) $a_n = n - 1$ e) $a_n = n^2$ f) $a_n = \frac{n+1}{n}$

E3

a)	b)	c)
$a_1 = -1$	$a_1 = 4$	$a_1 = 0$
$a_2 = -2$	$a_2 = 7$	$a_2 = -1$
$a_3 = -3$	$a_3 = 10$	$a_3 = -2$
$a_4 = -4$	$a_4 = 13$	$a_4 = -3$
$a_5 = -5$	$a_5 = 16$	$a_5 = -4$
$a_{15} = -15$	$a_9 = 28$	$a_{20} = -19$

d)	e)	f)
$a_1 = \frac{1}{2}$	$a_1 = -1$	$a_1 = 1$
$a_2 = \frac{1}{4}$	$a_2 = 1$	$a_2 = 3$
$a_3 = \frac{1}{8}$	$a_3 = -1$	$a_3 = 7$
$a_4 = \frac{1}{16}$	$a_4 = 1$	$a_4 = 15$
$a_5 = \frac{1}{32}$	$a_5 = -1$	$a_5 = 31$
$a_7 = \frac{1}{128}$	$a_{10} = 1$	$a_7 = 127$

S2C1

a) $5, 7, 9, 11, \mathbf{13}, \ldots$ $d = 2$

b) $7, 10, 13, \mathbf{16}, \mathbf{19}, \ldots$ $d = 3$

c) $6, 4, \mathbf{2}, 0, \mathbf{-2}, \ldots$ $d = -2$

d) $-1, -2, -3, \mathbf{-4}, -5, \mathbf{-6}, \ldots$ $d = -1$

e) $10, \mathbf{8}, \mathbf{6}, 4, 2, \mathbf{0}, \ldots$ $d = -2$

f) $\mathbf{0}, 5, 10, \mathbf{15}, \mathbf{20}, \ldots$ $d = 5$

S2C2

a) $a_n = 4n + 3;$ $a_6 = 27$

b) $a_n = 7n + 6;$ $a_8 = 62$

c) $a_n = 4n - 10;$ $a_9 = 26$

d) $a_n = -2n + 1;$ $a_{11} = -21$

S2C3

E1

a) $a_1 = 6$ b) $a_1 = 5$ c) $a_1 = 15$

E2

a) $d = 4$ b) $d = 2$ c) $d = -3$

S2C4

a) $a_1 = 6,\ d = 2$

b) $a_1 = -15,\ d = 6$

c) $a_1 = 11,\ d = -3$

d) $a_1 = -1,\ d = -1$

S2C5

E1

a) $4, 6, 8, 10, \mathbf{12}, \ldots$

b) $12, 15, 18, \mathbf{21}, \mathbf{24}, \ldots$

c) $9, 7, \mathbf{5}, 3, \mathbf{1}, \ldots$

d) $-2, -4, -6, \mathbf{-8}, -10, \mathbf{-12}, \ldots$

e) $30, \mathbf{40}, \mathbf{50}, 60, 70, \mathbf{80}, \mathbf{90}, \ldots$

f) $\mathbf{5}, \mathbf{0}, -5, -10, \mathbf{-15} - \mathbf{20}, \ldots$

E2

a) $a_n = 6n - 1;$ $a_5 = 29$

b) $a_n = 8n - 6;$ $a_7 = 50$

c) $a_n = -3n + 2;$ $a_6 = -16$

d) $a_n = -3n;$ $a_{11} = -33$

E3

a) $a_1 = -4$ b) $a_1 = 37$

b) $a_1 = 170$ d) $a_1 = 105$

E4

a) $d = 6$ b) $d = 3$

c) $d = -5$ d) $d = -17$

E5

a) $a_1 = 4,\ d = 4$

b) $a_1 = -2,\ d = 7$

c) $a_1 = -45,\ d = 5$

d) $a_1 = -10,\ d = -10$

S2C6

a) $S_6 = 51$ b) $S_8 = 124$

c) $S_7 = -28$ d) $S_9 = -153$

S2C7

a) $S_6 = 81$ b) $S_8 = 184$

c) $S_5 = -80$ d) $S_7 = -126$

S2C8

E1

a) $a_6 = 20$ b) $a_8 = 15$

c) $a_7 = 16$ d) $a_9 = -18$

E2

a) $n = 10,\ S_{10} = 100$

b) $n = 8,\ S_8 = 108$

c) $n = 7,\ S_7 = 98$

d) $n = 16,\ S_{16} = -136$

S2C9

Se distribuirán en 9 filas.

S2C10

E1

a) $S_8 = 180$ b) $S_{12} = 168$

c) $S_9 = -135$ d) $S_{11} = -330$

E2

a) $S_7 = 154$ b) $S_5 = 115$

c) $S_{10} = -15$ d) $S_6 = -102$

E3

a) $a_5 = 18$ b) $a_9 = -33$

c) $a_6 = 95$ d) $a_{10} = -34$

E4

a) $n = 7,\ S_7 = 70$

b) $n = 8,\ S_8 = 240$

E5

a) Se forman 8 filas.

b) $S_8 = 152$, coloca 152 ladrillos en total.

S3C1

a) $3, 6, 12, \mathbf{24}, 48, 96, \ldots$ $r = 2$

b) $2, 6, 18, \mathbf{54}, \mathbf{162}, \ldots$ $r = 3$

c) $5, 10, \mathbf{20}, 40, \mathbf{80}, \ldots$ $r = 2$

d) $\mathbf{32}, \mathbf{16}, 8, 4, \mathbf{2}, \ldots$ $r = \frac{1}{2}$

e) $1, \mathbf{3}, \mathbf{9}, 27, 81, \mathbf{243}, \ldots$ $r = 3$

f) $\mathbf{1}, \mathbf{-2}, 4, -8, \mathbf{16}, \ldots$ $r = -2$

S3C2

a) $a_n = 2^n,$ $a_6 = 64$

b) $a_n = (5)(2^{n-1}),$ $a_7 = 320$

c) $a_n = (2)(4^{n-1}),$ $a_5 = 512$

d) $a_n = (-2)(3^{n-1}),$ $a_4 = -54$

S3C3

a) $a_1 = 3$ b) $a_1 = 4$ c) $a_1 = 5$

Desafío

a) $r = 5$ b) $r = 2$ c) $r = -2$

S3C4

a) $r = \pm 3,\ a_1 = \pm 1$

b) $r = \pm 2,\ a_1 = 3$

Desafío

a) $r = 2,\ a_1 = 3$ b) $r = -3,\ a_1 = -2$

S3C5

a) $S_3 = 42$ b) $S_5 = 248$

c) $S_4 = -360$ d) $S_7 = -3$

S3C6

a) $a_1 = 3$ b) $a_1 = 5$

c) $a_1 = -1$ d) $a_1 = -4$

S3C7

E1

a) $1, 4, 16, \mathbf{64}, \mathbf{256}, \dots$ $r = 4$

b) $4, 12, \mathbf{36}, 108, \mathbf{324}, \dots$ $r = 3$

c) $\mathbf{-3}, \mathbf{-6}, -12, -24, \mathbf{-48}, \dots$ $r = 2$

d) $-81, \mathbf{27}, \mathbf{-9}, 3, -1, \mathbf{\frac{1}{3}}, \mathbf{-\frac{1}{9}}, \dots$ $r = -\frac{1}{3}$

E2

a) $a_n = 6^{n-1}$, $a_4 = 216$

b) $a_n = (5)(3^{n-1})$, $a_5 = 405$

c) $a_n = (-7)(-2)^{n-1}$, $a_6 = 224$

d) $a_n = (-16)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, $a_7 = -\frac{1}{4}$

E3

a) $a_1 = 8$ b) $a_1 = 4$ c) $a_1 = -32$

E4

a) $r = -2$ b) $r = 2$ c) $r = \pm 3$

E5

a) $S_3 = 21$ b) $S_4 = 255$ c) $S_3 = 63$

E6

a) $a_1 = 9$ b) $a_1 = 1$ c) $a_1 = -2$

S4C1

E1

a) $\sum_{k=1}^{n} 3k = 3 + 6 + 9 + \cdots + 3n$

b) $\sum_{k=1}^{6} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2$

c) $\sum_{k=4}^{7} 2^k = 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7$

E2

a) $\sum_{k=1}^{n} k_2$ b) $\sum_{k=1}^{20} k$ c) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

S4C2

a) $5 \sum_{k=1}^{5} k$ b) $\sum_{k=1}^{15} 2 = (15)(2)$

c) $\sum_{k=1}^{4} k^2 + \sum_{k=1}^{4} k^3$ d) $2 \sum_{k=1}^{6} k + \sum_{k=1}^{6} k^2$

S4C3

a) 55 b) 120 c) 465

S4C4

E1

a) 55 b) 204 c) 385

E2

a) 180 b) 105 c) 245

S4C5

E1

a) $\sum_{k=1}^{n} 6k = 6 + 12 + 18 + \cdots + 6n$

b) $\sum_{k=3}^{10} k^2 = 9 + 16 + 25 + 36 + \cdots + 81 + 100$

c) $\sum_{k=2}^{6} 2^k = 4 + 8 + 16 + 32 + 64$

E2

a) $\sum_{k=2}^{18} k^2$ b) $\sum_{k=1}^{n} (2k+1)$ c) $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k$

E3

a) $10 \sum_{k=1}^{4} k$ b) $\frac{1}{5} \sum_{k=2}^{8} k^2$ c) $3 \sum_{k=1}^{7} k + \sum_{k=1}^{7} k^2$

E4

a) 325 b) 80 c) 140

d) 70 e) 15 f) 284

UNIDAD 2

S1C1

E1

a) 3^3 b) 4^4 c) 10^5 d) $(1{,}2)^2$ e) $\left(\frac{1}{3}\right)^3$

E2

a) 243 b) 16 c) -27

d) 0,04 e) $-\frac{1}{8}$

S1C2

a) a^7 b) a^5 c) a^{20} d) a^8

e) a^5b^5 f) a^6b^3 g) a^4 h) a

S1C3

a) 1 b) 1 c) 1

d) $\frac{1}{5}$ e) $\frac{1}{16}$ f) $-\frac{1}{8}$

S1C4

E1

a) a^3 b) $\frac{1}{a^6}$ c) $\frac{1}{a^3b^3}$

d) $\frac{1}{a^2}$ e) $\frac{b^{20}}{a^{10}}$

S1C4

E1

a) a^3 b) $\frac{1}{a^6}$ c) $\frac{1}{a^3b^3}$

d) $\frac{1}{a^2}$ e) $\frac{b^{20}}{a^{10}}$

E2

a) 8 b) $\frac{1}{81}$ c) $\frac{1}{27}$

c) $\frac{1}{1000}$ e) 1

S1C5

Potenciación	Radicación	Se lee la radicación
$2^4 = 16$	$2 = \sqrt[4]{16}$	Dos es igual a raíz cuarta de dieciséis
$3^2 = 9$	$3 = \sqrt{9}$	Tres es igual a raíz cuadrada de nueve
$(-3)^3 = -27$	$-3 = \sqrt[3]{-27}$	Menos tres es igual a raíz cúbica de menos veintisiete
$3^4 = 81$	$3 = \sqrt[4]{81}$	Tres es igual a raíz cuarta de ochenta y uno

S1C6

a) 3 b) -3 c) 5

d) -3 e) 10 f) -10

S1C7

a) 2 b) 5 c) 3 d) 3 e) 2

S1C8

E1

a) 2 b) 2 c) 4 d) $\frac{1}{3}$ e) $\frac{1}{3}$

E2

a) 2 b) 3 c) 3

S1C9

a) $\sqrt[5]{a^3}$ b) $\sqrt[4]{a}$ c) $a^2\sqrt{a}$

d) $\sqrt[4]{a^3}$ e) $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$ f) $a^{\frac{1}{4}}$ g) $a^{\frac{3}{2}}$

h) $a^{\frac{4}{7}}$ i) $a^{\frac{4}{5}}$ j) $a^{\frac{8}{3}}$

S1C10

a) 3 b) 2 c) 16 d) $\frac{1}{5}$

S1C11

a) 3 b) 3 c) 5 d) 9

S1C12

E1

a) 7^4 b) $0{,}3^4$ c) $\left(\frac{1}{2}\right)^5$

E2

a) 512 b) 81 c) $\frac{1}{4}$ d) 1 e) 1

f) $\frac{1}{64}$ g) $-\frac{1}{125}$ h) 100

E3

a) 8 b) 9 c) 4 d) 2 e) 2

E4

a) 512 b) 81 c) 100 d) 3

E5

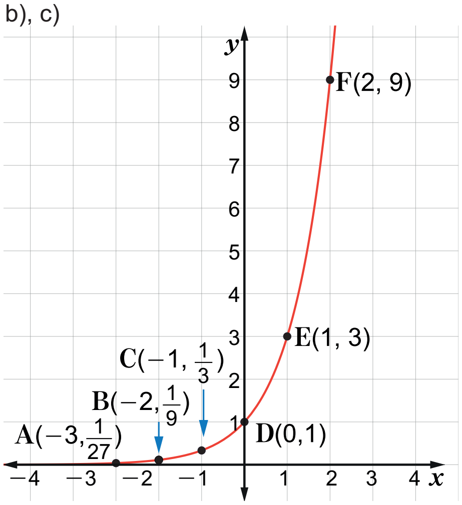
a) 1 b) 1

S2C1

a)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{27}$	$\mathbf{\frac{1}{9}}$	$\mathbf{\frac{1}{3}}$	1	$\mathbf{3}$	$\mathbf{9}$	27
punto	$A\left(-3,\frac{1}{27}\right)$	$B\left(-2,\mathbf{\frac{1}{9}}\right)$	$C\left(-1,\mathbf{\frac{1}{3}}\right)$	$D(0,1)$	$E(1,\mathbf{3})$	$F(2,\mathbf{9})$	$G(3,27)$

b), c)

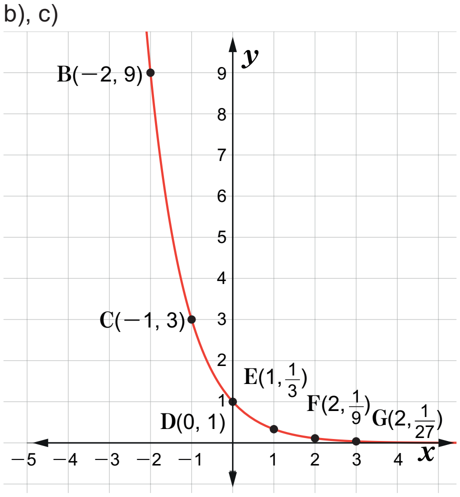


S2C2

a)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	27	$\mathbf{9}$	$\mathbf{3}$	1	$\mathbf{\frac{1}{3}}$	$\mathbf{\frac{1}{9}}$	$\frac{1}{27}$
punto	$A(-3,27)$	$B(-2,\mathbf{9})$	$C(-1,\mathbf{3})$	$D(0,1)$	$E\left(1,\mathbf{\frac{1}{3}}\right)$	$F\left(2,\mathbf{\frac{1}{9}}\right)$	$G\left(3,\frac{1}{27}\right)$

b), c)



S2C3

E1

a) $2^2 < 2^3$ b) $3^5 < 3^7$ c) $4^3 > 4^2$

E2

a) $2^{-3} < 2^{\frac{1}{2}} < 2^2$ b) $5^{-1} < 5^{\frac{1}{2}} < 5^2$

S2C4

E1

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 > \left(\frac{1}{2}\right)^6$ b) $\left(\frac{1}{3}\right)^2 > \left(\frac{1}{3}\right)^4$ c) $\left(\frac{1}{4}\right)^3 < \left(\frac{1}{4}\right)^2$

E2

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^3 < \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$

b) $\left(\frac{1}{5}\right)^2 < \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} < \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$

S2C5

a) $x = 2$ b) $x = 2$ c) $x = \frac{3}{2}$

d) $x = -5$ e) $x = 3$

S2C6

a) $x = 1$ b) $x = 7$ c) $x = 3$

d) $x = 9$ e) $x = 3$ f) $x = 5$

S2C7

a) $x = 5,\ x = -1$ b) $x = 3,\ x = -1$

c) $x = 0,\ x = -1$ d) $x = -1$

e) $x = 2,\ x = -\frac{1}{2}$

S2C8

a) $x = 1$ b) $x = 0,\ x = 1$

S2C9

E1

a) $3^{-3} < 3^{-2} < 3^0$ b) $\left(\frac{1}{5}\right)^4 < \left(\frac{1}{5}\right)^{3,5} < \left(\frac{1}{5}\right)^3$

c) $\left(\frac{1}{4}\right)^2 < \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}} < \left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$

E2

a) $x = \frac{1}{2}$ b) $x = -\frac{1}{2}$ c) $x = 4$

d) $x = 5$ e) $x = -5$

f) $x = 1$ g) $x = 3$

UNIDAD 3

Sección 1 Contenido 1 (S1C1)

E1

Forma exponencial	$144 = 12^2$	$7 = 7^1$	$9 = 3^2$	$\frac{1}{243} = 3^{-5}$
Forma logarítmica	$\log_{12} 144 = 2$	$\log_7 7 = 1$	$\log_3 9 = 2$	$\log_3 \frac{1}{243} = -5$

E2

a) $x = 4$ b) $x = 9$ c) $b = 4$

d) $x = \frac{1}{8}$ e) $b = 5$ f) $b = 10$

S1C2

a) 5 b) 0 c) 1

d) 2 e) −1 f) $\frac{1}{2}$

S1C3

a) $2\log_3 7$ b) $-2\log_{10} 5$ c) $2\log_2 3$

d) $3\log_5 3$ e) $-2\log_7 3$

S1C4

a) 2 b) 1 c) 2 d) 1

S1C5

a) 1 b) 3 c) −2 d) 4

S1C6

a) 1 b) 2 c) 1

S1C7

a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{5}{2}$ c) $\frac{1}{2}$ d) 2 e) 4

S1C8

E1

a) 2 b) 3 c) $\frac{5}{2}$ d) −2

e) $\frac{5}{3}$ f) $-\frac{1}{2}$ g) 1 h) $\frac{3}{2}$

E2

a) $\frac{1}{2}$ b) 1 c) 2 d) 0

E3

a) −2 b) −2 c) −4 d) $\frac{1}{3}$

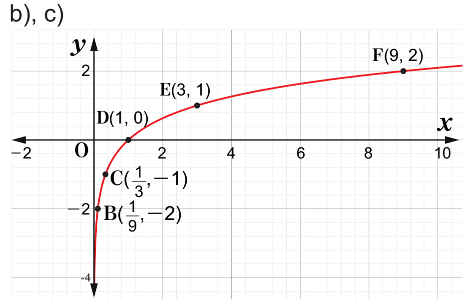
e) 5 f) $\frac{1}{2}$ g) 3

S2C1

a)

x	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27
y	-3	$\mathbf{-2}$	$\mathbf{-1}$	0	$\mathbf{1}$	$\mathbf{2}$	3
punto	$A\left(\frac{1}{27},-3\right)$	$B\left(\frac{1}{9},\mathbf{-2}\right)$	$C\left(\frac{1}{3},\mathbf{-1}\right)$	$D(1,0)$	$E(3,\mathbf{1})$	$F(9,\mathbf{2})$	$G(27,3)$

b), c)

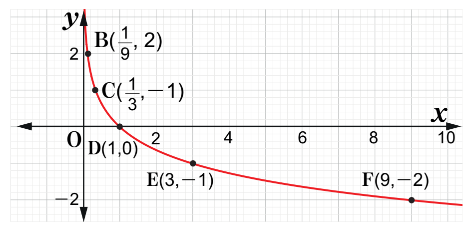


S2C2

a)

x	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27
y	3	$\mathbf{2}$	$\mathbf{1}$	0	$\mathbf{-1}$	$\mathbf{-2}$	-3
punto	$A\left(\frac{1}{27},3\right)$	$B\left(\frac{1}{9},\mathbf{2}\right)$	$C\left(\frac{1}{3},\mathbf{1}\right)$	$D(1,0)$	$E(3,\mathbf{-1})$	$F(9,\mathbf{-2})$	$G(27,-3$

b), c)



S2C3

a) $\log_2 3 < \log_2 5$ b) $\log_3 \frac{1}{2} < \log_3 2 < \log_3 4$

S2C4

a) $\log_{\frac{1}{2}} 5 < \log_{\frac{1}{2}} 3$ b) $\log_{\frac{1}{3}} 8 < \log_{\frac{1}{3}} 4 < \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{4}$

S2C5

a) 9 b) 15 c) 4

S2C6

a) $x = 2$ b) $x = 0$ c) $x = 3$

S2C7

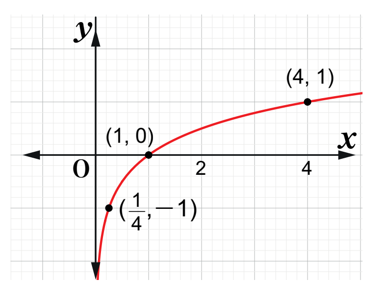
a) 0,6020 b) 1,2552 c) 1,3801

d) 1,4313 e) 1,505 f) 1,5562

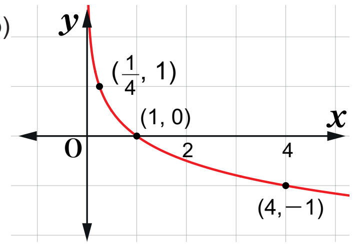
S2C8

E1

a)



b)



E2

a) $\log_2 \frac{1}{2} < \log_2 3 < \log_2 5$

b) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} > \log_{\frac{1}{3}} 2 > \log_{\frac{1}{3}} 6$

E3

a) $x = \frac{1}{32}$ b) $x = 5$ c) $x = -5$

d) $x = 6$ e) $x = 5$

E4

a) 1,204 b) 1,9084 c) 1,6811

UNIDAD 4

Sección 1 Contenido 1 (S1C1)

E1

a) $AB = 4$ b) $CD = 5$ c) $MF = 7$

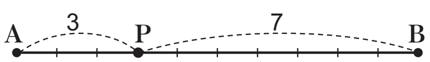
d) $FH = 5$ e) $RQ = 6{,}5$

E2

$AB + BC = 3 + 12 = 15 = AC$

S1C2

E1



E2

a) $P(9)$ b) $P(5)$ c) $P(30)$

S1C3

a) $AB = 5$ b) $MQ = 2\sqrt{5}$

c) $RS = 5$ d) $FT = 7$

S1C4

a) $P(5,4)$ b) $P(3,2)$

S1C5

E1

a) $\left(\frac{7}{2}, 6\right)$ b) $\left(\frac{11}{2}, 1\right)$

c) $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$ d) $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

E2 $(1, -2)$

S1C6

E1

a) $AB = 3$ b) $PQ = 17$ c) $MT = 3$

E2

a) $P(7)$ b) $P(4)$ c) $P(2)$

E3

a) $PQ = 5$ b) $FN = 5$

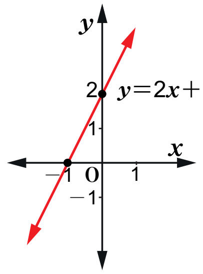
c) $HK = 3\sqrt{10}$ d) $WU = 5$

E4 $P(7, -1)$

E5 $(7, -2)$

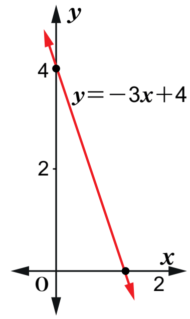
S2C1

a)



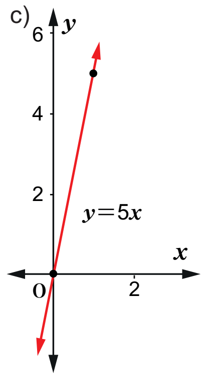
Intercepto con eje y: $(0,2)$
Pendiente: $m = 2$

b)



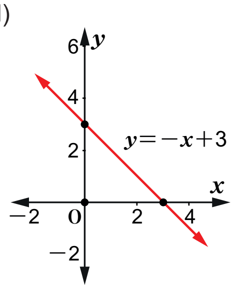
Intercepto con eje y: $(0,4)$
Pendiente: $m = -3$

c)



Intercepto con eje y: $(0,0)$
Pendiente: $m = 5$

d)



Intercepto con eje y: $(0,3)$
Pendiente: $m = -1$

S2C2

E1

a) $y = 2x - 1$ b) $y = -3x + 9$

c) $y = 3$

E2

a) $y = -4x + 15$

S2C3

a) $m = 3$ b) $m = -\frac{6}{7}$

c) $m = -\frac{1}{3}$ d) $m = 0$

S2C4

a) $y = 2x + 7$ b) $y = 3x - 5$

c) $y = 5$ d) $y = -\frac{7}{5}x - \frac{3}{5}$

S2C5

E1

a) $2x + y - 3 = 0$

b) $x - 10 = 0$

c) $\frac{3}{5}x + y - 1 = 0$ o $3x + 5y - 5 = 0$

d) $y - 2 = 0$

E2

$y = \frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$

S2C6

E1

a) $y = 1$ b) $x = 1$

c) $x = -1$ d) $y = 3$

E2 $y = 3$

S2C7

E1

a) No son paralelas b) Sí son paralelas

c) Sí son paralelas d) Sí son paralelas

E2

a) $y = -4x - 11$ b) $y = -2x - 2$

S2C8

a) $m_2 = \frac{1}{4}$ b) $m_2 = -\frac{1}{5}$

c) $m_2 = -2$ d) $m_2 = \frac{1}{6}$

S2C9

a) 1 b) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ c) $\frac{1}{2}$

d) $\frac{7\sqrt{10}}{10}$ e) 1 f) 0

S2C10

a) $y = 2x + 3$ b) $-\frac{3}{2}$

c) $y = \frac{3}{5}x + \frac{11}{5}$ d) $2x + 3y - 1 = 0$

e) $x = 5$ f) $y = 2x - 5$

g) $\frac{1}{3}$ h) $\frac{\sqrt{13}}{13}$

S3C1

E1

a) $x^2 + y^2 = 1$ b) $x^2 + y^2 = 16$

c) $x^2 + y^2 = 3$ d) $x^2 + y^2 = 49$

E2

a) $C(0,0)$, $r = 5$ b) $C(0,0)$, $r = 6$

c) $C(0,0)$, $r = \sqrt{5}$

S3C2

E1

a) $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$

b) $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 9$

c) $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$

d) $(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 25$

E2

a) $C(2,4), r = 3$ b) $C(2,-2), r = 1$

c) $C(3,-1), r = \sqrt{10}$ d) $C(0,1), r = 5$

S3C3

a) $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0$

b) $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 11 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 5 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 8x - 10y + 5 = 0$

S3C4

E1

a) $(x^2-4x)+(y^2+6y)=12$

b) $(x^2-4x+4)+(y^2+6y+9)$
$=12+4+9$

c) $(x-2)^2+(y+3)^2=25$

d) El Centro: $(2,-3)$, el radio: 5

E2

a) $(x+1)^2+(y-4)^2=4$

b) $(x+2)^2+(y-1)^2=10$

S3C5

a) $(2,2)$ y $(-2,-2)$

b) $(2,4)$ y $(-2,-4)$

c) $(\sqrt{3},3\sqrt{3})$ y $(-\sqrt{3},-3\sqrt{3})$

S3C6

a) $(-2,1)$ b) $(1,1)$

S3C7

E1

a) $x^2+y^2=64$

b) $(x-2)^2+(y-3)^2=25$

c) $(x+1)^2+(y+3)^2=7$

E2

a) $C(0,0)$, $r=3$ b) $C(1,2)$, $r=2$

E3 $x^2+y^2+2x+2y-4=0$

E4

a) $(x^2+4x)+(y^2-2y)=4$

b) $(x^2+4x+4)+(y^2-2y+1)$
$=4+4+1$

c) $(x+2)^2+(y-1)^2=9$

d) El centro: $(-2,1)$, el radio: 3

E5 $(0,-3)$ y $(3,0)$

E6 $(-3,3)$

UNIDAD 5

Sección 1 Contenido 1 (S1C1)

a) $y^2=8x$ b) $y^2=12x$

c) $y^2=-12x$ d) $y^2=-16x$

S1C2

a) $x^2=8y$ b) $x^2=-8y$

c) $x^2=16y$ d) $x^2=-16y$

S1C3

	a) $y^2=4x$	b) $x^2=-8y$
Vértice	$(0,0)$	$(0,0)$
Foco	$(1,0)$	$(0,-2)$
Eje	x	y
Directriz	$x=-1$	$y=2$

S1C4

a) $(1,1)$ y $(2,4)$ b) $(3,-3)$ y $(-9,-27)$

S1C5

a) $(1,-2)$ y $(9,6)$

b) $(-1,2)$ y $(-4,-4)$

S1C6

E1

a) $y^2=16x$ b) $y^2=20x$

c) $y^2=-20x$ d) $y^2=-24x$

e) $x^2=4y$ f) $x^2=24y$

g) $x^2=-12y$

E2

a) $x^2=-16y$ b) $y^2=-20x$

E3

	a) $y^2=12x$	b) $x^2=-16y$
Vértice	$(0,0)$	$(0,0)$
Foco	$(3,0)$	$(0,-4)$
Eje	x	y
Directriz	$x=-3$	$y=4$

E4

a) $(-6,-9)$ y $(2,-1)$ b) $(2,2)$ y $(8,-4)$

S2C1

a) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{39}=1$ $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{77}=1$

S2C2

a) $\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{16}$ $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{9}=1$

S2C3

E1

	a) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$	b) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$
Vértice	$(3,0),(-3,0)$	$(5,0),(-5,0)$
Foco	$(\sqrt{5},0),(-\sqrt{5},0)$	$(3,0),(-3,0)$
Extremos	$(0,2),(0,-2)$	$(0,4),(0,-4)$

E2

	a) $3x^2+27y^2=27$	b) $x^2+9y^2=36$
Vértice	$(3,0),(-3,0)$	$(6,0),(-6,0)$
Foco	$(2\sqrt{2},0),(-2\sqrt{2},0)$	$(4\sqrt{2},0),(-4\sqrt{2},0)$
Extremos	$(0,1),(0,-1)$	$(0,2),(0,-2)$

S2C4

	a) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{36}=1$	b) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{49}=1$
Vértice	$(0,6),(0,-6)$	$(0,7),(0,-7)$
Foco	$(0,3\sqrt{3}),(0,-3\sqrt{3})$	$(0,2\sqrt{10}),(0,-2\sqrt{10})$
Extremos	$(3,0),(-3,0)$	$(3,0),(-3,0)$
	c) $9x^2+4y^2=36$	
Vértice	$(0,3),(0,-3)$	
Foco	$(0,\sqrt{5}),(0,-\sqrt{5})$	
Extremos	$(2,0),(-2,0)$	

S2C5

E1

a) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$ b) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$

c) $\frac{x^2}{21}\ \frac{y^2}{25}=1$ d) $\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{49}=1$

E2

	a) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{36}=1$	b) $\frac{x^2}{16}+y^2=1$
Vértice	$(0,6),(0,-6)$	$(4,0),(-4,0)$
Foco	$(0,\sqrt{11}),(0,-\sqrt{11})$	$(\sqrt{15},0),(-\sqrt{15},0)$
Extremos	$(5,0),(-5,0)$	$(0,1),(0,-1)$

	c) $3x^2+4y^2=48$	d) $4x^2+16y^2=64$
Vértice	$(4,0),(-4,0)$	$(4,0),(-4,0)$
Foco	$(2,0),(-2,0)$	$(2\sqrt{3},0),(-2\sqrt{3},0)$
Extremos	$(0,2\sqrt{3}),(0,-2\sqrt{3})$	$(0,2),(0,-2)$

	e) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$	f) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$
Vértice	$(0,4),(0,-4)$	$(0,5),(0,-5)$
Foco	$(0,2\sqrt{3}),(0,-2\sqrt{3})$	$(0,3),(0,-3)$
Extremos	$(2,0),(-2,0)$	$(4,0),(-4,0)$

	g) $2x^2+9y^2=18$
Vértice	$(3,0),(-3,0)$
Foco	$(\sqrt{7},0),(-\sqrt{7},0)$
Extremos	$(0,\sqrt{2}),(0,-\sqrt{2})$

S3C1

a) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$, $y=\frac{4}{3}x$, $y=-\frac{4}{3}x$

b) $x^2-\frac{y^2}{4}=1$, $y=2x$, $y=-2x$

S3C2

a) $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$, $y=\frac{3}{4}x$, $y=-\frac{3}{4}x$

b) $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{4}=1$, $y=x$, $y=-x$

S3C3

E1

	a) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$	b) $\frac{x^2}{25}-y^2=1$
Vértice	$(3,0),(-3,0)$	$(5,0),(-5,0)$
Foco	$(\sqrt{13},0),(-\sqrt{13},0)$	$(\sqrt{26},0),(-\sqrt{26},0)$
Extremos	$(0,2),(0,-2)$	$(0,1),(0,-1)$

E2

	a) $4x^2-y^2=4$	b) $9x^2-16y^2=144$
Vértice	$(1,0),(-1,0)$	$(4,0),(-4,0)$
Foco	$(\sqrt{5},0),(-\sqrt{5},0)$	$(5,0),(-5,0)$
Extremos	$(0,2),(0,-2)$	$(0,3),(0,-3)$

S3C4

E1

	a) $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{4}=1$	b) $\frac{y^2}{25}-x^2=1$
Vértice	$(0,3),(0,-3)$	$(0,5),(0,-5)$
Foco	$(0,\sqrt{13}),(0,-\sqrt{13})$	$(0,\sqrt{26}),(0,-\sqrt{26})$
Extremos	$(2,0),(-2,0)$	$(1,0),(-1,0)$

E2

	a) $9y^2 - x^2 = 9$	b) $25y^2 - 16x^2 = 400$
Vértice	$(0,1),(0,-1)$	$(0,4),(0,-4)$
Foco	$(0,\sqrt{10}),(0,-\sqrt{10})$	$(0,\sqrt{41}),(0,-\sqrt{41})$
Extremos	$(3,0),(-3,0)$	$(5,0),(-5,0)$

S3C5

E1

a) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1,\quad y=\dfrac{3}{4}x,\quad y=-\dfrac{3}{4}x$

b) $x^2-\dfrac{y^2}{8}=1,\quad y=2\sqrt{2}x,\quad y=-2\sqrt{2}x$

c) $\dfrac{y^2}{36}-\dfrac{x^2}{64}=1,\quad y=\dfrac{3}{4}x,\quad y=-\dfrac{3}{4}x$

d) $\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{x^2}{21}=1,\quad y=\dfrac{2}{\sqrt{21}}x,\quad y=-\dfrac{2}{\sqrt{21}}x$

E2

	a) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$	b) $\dfrac{x^2}{36}-y^2=1$
Vértice	$(4,0),(-4,0)$	$(6,0),(-6,0)$
Foco	$(5,0),(-5,0)$	$(\sqrt{37},0),(-\sqrt{37},0)$
Extremos	$(0,3),(0,-3)$	$(0,1),(0,-1)$

	c) $16x^2 - y^2 = 16$	d) $4x^2 - 36y^2 = 144$
Vértice	$(1,0),(-1,0)$	$(6,0),(-6,0)$
Foco	$(\sqrt{17},0),(-\sqrt{17},0)$	$(2\sqrt{10},0),(-2\sqrt{10},0)$
Extremos	$(0,4),(0,-4)$	$(0,2),(0,-2)$

E3

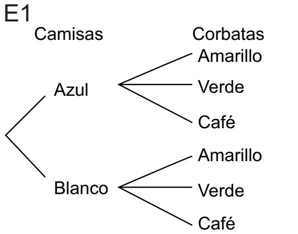
	a) $\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{x^2}{25}=1$	b) $\dfrac{y^2}{49}-x^2=1$
Vértice	$(0,4),(0,-4)$	$(0,7),(0,-7)$
Foco	$(0,\sqrt{41}),(0,-\sqrt{41})$	$(0,5\sqrt{2}),(0,-5\sqrt{2})$
Extremos	$(5,0),(-5,0)$	$(1,0),(-1,0)$

	c) $25y^2 - x^2 = 25$	d) $4y^2 - 9x^2 = 36$
Vértice	$(0,1),(0,-1)$	$(0,3),(0,-3)$
Foco	$(0,\sqrt{26}),(0,-\sqrt{26})$	$(0,\sqrt{13}),(0,-\sqrt{13})$
Extremos	$(5,0),(-5,0)$	$(2,0),(-2,0)$

UNIDAD 6

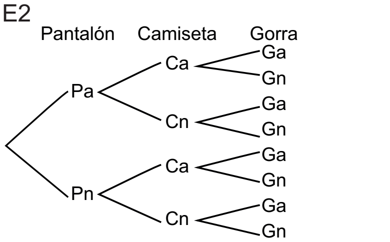
Sección 1 Contenido 1 (S1C1)

E1



6 juegos de 1 camisa y 1 corbata.

E2



8 trajes de 1 pantalón, 1 camiseta y 1 gorra.

S1C2

a) 8 b) 26 c) 81

S1C3

a) $(5)(3)=15$ b) $(8)(6)=48$

S1C4

E1

$6!=720$ $7!=5040$

E2

a) 6 b) 120 c) 24 d) 720

S1C5

E1

${}_6P_2=30$ ${}_5P_4=120$ ${}_8P_5=6720$

E2

a) ${}_4P_3=24$ b) ${}_5P_4=120$

S1C6

a) $(3-1)!=2$ b) $(4-1)!=6$

S1C7

a) ${}_6C_2=15$ b) ${}_6C_4=15$ c) ${}_7C_4=35$

S1C8

E1

a) ${}_7C_4=35$ b) ${}_{10}C_6=210$

E2

a) ${}_6C_2\cdot{}_3C_2=45$ b) ${}_{10}C_4\cdot{}_8C_4=14700$

S1C9

E1

a) ${}_4C_3=4$ b) ${}_5C_2=10$

E2

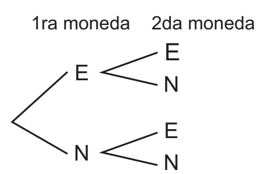
a) ${}_6C_2=15$ b) ${}_7C_3=35$

S1C10

a) 10 b) 210 c) 3360

S1C11

a)



b) 24 c) 720 d) 6

e) 6. No es posible que se sienten de manera diferente toda una semana, porque el número de los días de una semana es mayor que 6.

f) 15 g) 5880 h) 18 i) 3360

S2C1

a) Es más probable obtener un número par.

b) Seleccionar múltiplo de 7: $\dfrac{1}{9}$

c) Seleccionar pelota blanca: $\dfrac{9}{20}$

Seleccionar pelota verde: $\dfrac{2}{5}$

S2C2

E1

a) Resultados iguales, $\frac{1}{6}$

b) Resultados suman 8, $\frac{5}{36}$

E2 $\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$

E3 $\dfrac{3}{8}$

S2C3

a) $P(A\cup B)=\frac{2}{3}$ b) $P(A\cup B)=\frac{5}{18}$

S2C4

a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{9}{10}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $P(A\cup B)=\frac{1}{6}$

S2C5

E1

a) $P(A)=1$ b) $P(B)=\dfrac{1}{3}$ $P(C)=1$

c) $P(A\cup B)=1$

E2

a) $P(A)=\frac{1}{2}$ b) $P(B)=1$ c) $P(C)=0$

S2C6

E1

a) $P(A)=\frac{1}{9}$ b) $P(\bar{A})=\frac{8}{9}$

E2

a) $P(A)=\frac{9}{16}$ b) $P(\bar{A})=\frac{7}{16}$

E3

a) $P(A)=\frac{7}{20}$ b) $P(\bar{A})=\frac{13}{20}$

S2C7

a) $\frac{16}{49}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{12}$

S2C8

E1

a) $P(A)=\dfrac{1}{6}$ b) $(A\cap B)=\dfrac{1}{18}$

c) $P(B/A)=\dfrac{1}{3}$

E2

$P(B/A)=\dfrac{5}{6}$

S2C9

E1

a) $P(A)=\dfrac{1}{2}$ b) $P(B)=\dfrac{1}{2}$ c) $P(C)=\dfrac{1}{4}$

E2

$EEN, ENE, NEE \rightarrow \frac{3}{8}$

E3 $P(A\cup B)=\frac{7}{10}$

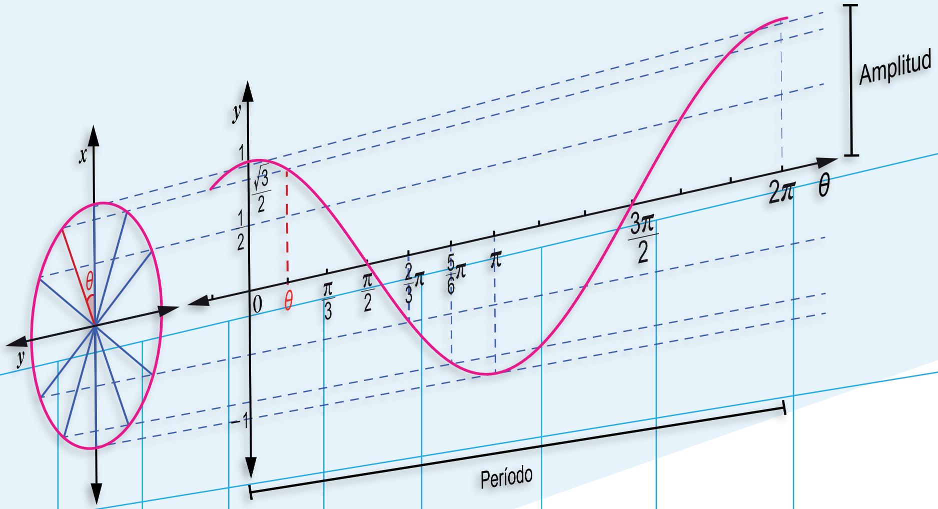
E4

a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{18}$ c) $\frac{2}{9}$ d) $\frac{8}{9}$

E5 $\frac{1}{12}$

E6

a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{36}$ c) $\frac{1}{6}$



NICAMATE

Proyecto para el Aprendizaje Amigable de Matemática en Educación Secundaria

MATEMÁTICA

Portal Educativo